

Twist-spun Knots の Groups について

関学 理学部 吉川克之

§ 1 Introduction まず, § 2 では n -winding bands $B_i^{(n)}$ を定義し, Zeeman の論文 [9] にある twist-spun knots を Fox の方法で構成する事について考える。§ 3 では, いくつかの 1-knots に対して群 $G(k, n)$ (§ 2 で定義される) を計算し, 2-knot groups の torsion elements について考察する。§ 4 では, 群 $G(k, n)$ の center について言及する。

以後, 次の様な記号が用いられる。

$$\star H_+^4 = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 \geq 0 \}$$

$$\star H_+^3 = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 > 0, x_4 = 0 \}$$

$$\star R_t^3 = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = t \}$$

$$\star \gamma_3 : \mathbb{R}_0^3 \longrightarrow \mathbb{R}_0^3, (x_1, x_2, x_3, 0) \longmapsto (x_1, x_2, -x_3, 0)$$

$$\star \gamma_4 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, (x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto (x_1, x_2, x_3, -x_4)$$

$$\star G' = [G, G] \quad (G \text{ は group})$$

§2 Two-spheres $S(k, n)$

任意の 1-knot k を, $k \subset H_+^3$ である様に取り, k は図 1 の様に $(m+1)$ -bridge の形で与えられているとする。

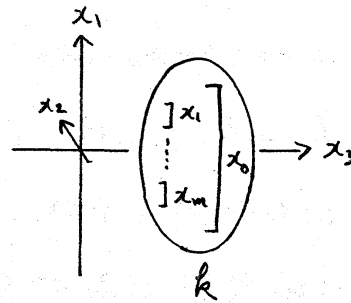


図 1.

次に図 2 の様に, k とその mirror

image $\sigma_3 k$ を overpasses x_0 と $\sigma_3 x_0$ の部分で composite する。

そして左右対応する overpasses x_i と $\sigma_3 x_i$, $i=1, \dots, m$ との間にはまっすぐにはられた bands B_i を考える。これらの bands B_i , $i=1, \dots, m$, による hyperbolic transformations を $k \# \sigma_3 k$ に行うことにより 2-disk $(D^2; k \# \sigma_3 k) \subset (H_+^4, R_0^3)$ が得られることが示される。

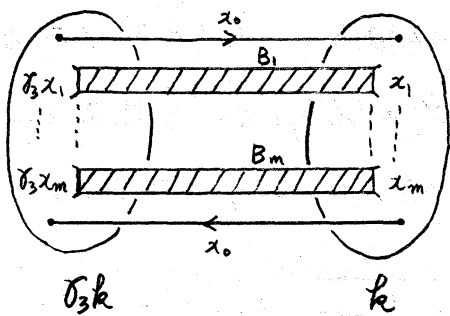


図 2

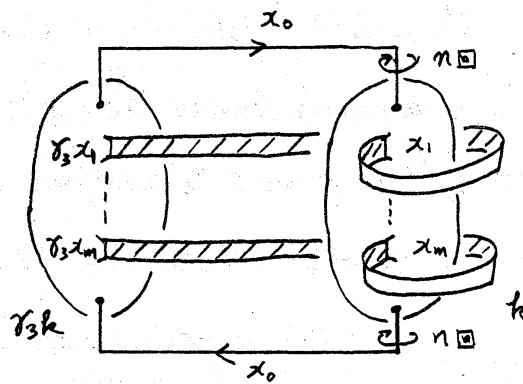


図 3

次に, $\sigma_3 k$ を固定したままで x_0 を軸として右ネジの方向に k を n 回, 回転せるといふ isotopic deformation を考える。この変形により bands $B_1, \dots, B_m$ は図 3 の様に k に n 回, 巻きつく。こうして得られる bands を B_i に対して, n -winding bands $B_i^{(n)}$ と言う。 n -winding bands $B_1^{(n)}, \dots, B_m^{(n)}$ による hyperbolic

transformations を $k \# \sigma_3 k$ に行うことにより 2-disk $(D^2; k \# \sigma_3 k) \subset (H^4, R^3_0)$ が得られることは, winding bands の構成の仕方より明らかである。こうして得られる 2-disk を, $D(k, B_i^{(n)})$ で表わす。

この 2-disk $D(k, B_i^{(n)})$ の group $\pi_1(H^4 - D(k, B_i^{(n)}))$ は, 次の様になる。knot k による Wirtinger presentation を

$$G(k) = \langle x_0, x_1, \dots, x_m : r_1, \dots, r_m \rangle$$

とすると, knot $\sigma_3 k$ による Wirtinger presentation は

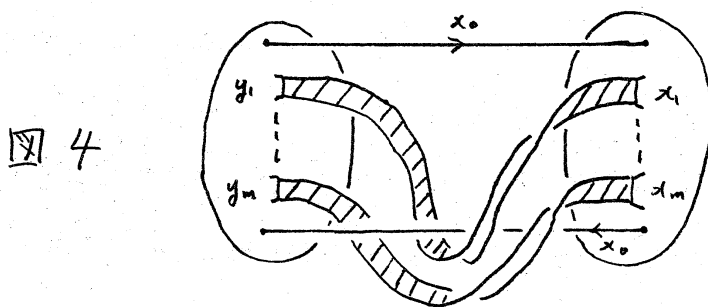
$$G(\sigma_3 k) = \langle y_0, y_1, \dots, y_m : r'_1, \dots, r'_m \rangle$$

となる。但し, ここで $r'_i = r_i(y_0, y_1, \dots, y_m)$, $i = 1, \dots, m$ 。

故に $G(k \# \sigma_3 k) = \langle G(k) * G(\sigma_3 k) : x_0 = y_0 \rangle$ 。

n -winding bands $B_i^{(n)}$ は, 図 4 の様な bands と同じだから, 各 $B_i^{(n)}$ に対応する relation は, $x_i = x_0^n y_i x_0^{-n}$ となる。

$\therefore \pi_1(H^4 - D(k, B_i^{(n)})) = \langle G(k \# \sigma_3 k); x_i = x_0^n y_i x_0^{-n}, i = 1, \dots, m \rangle$



n -winding bands は, isotopic deformation によって得られたのだから, 次の prop. が成立することが容易に示される。

Proposition (2, 1).

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \pi_1(H_+^4 - D(k, B_i^{(n)})) \cong \pi_1(H_+^4 - D(k, B_i^{(0)}))$$

$D(k, B_i^{(n)})$ を用いて 2-sphere $S(k, n) \subset R^4$ を次の様に定義する。

Definition (2, 2).

$$S(k, n) \subset R^4 = D(k, B_i^{(0)}) \cup \gamma_4 D(k, B_i^{(n)})$$

$$\partial D(k, B_i^{(0)}) \stackrel{\text{id.}}{=} \partial \gamma_4 D(k, B_i^{(n)})$$

Remark (2, 3).

この 2-sphere $S(k, n)$ は, Zeeman の論文 [9] にある k の n -twist-spun knot と同じ type の 2-sphere を定義する。

$S(k, n)$ の group $\pi_1(R^4 - S(k, n))$ を $G(k, n)$ で表ゆす。 $G(k, n)$ の presentation は, $D(k, B_i^{(n)})$ の presentation と van Kampen の定理より

$$G(k, n) = \langle G(k \# \gamma_3 k) : x_i = y_i, x_i = x_0^n y_i x_0^{-n}, i = 1, \dots, m \rangle$$

となる。

$$\therefore G(k, n) = \langle G(k) : x_i = x_0^n x_i x_0^{-n}, i = 1, \dots, m \rangle$$

この presentation より 次の prop. が容易に証明出来る。

Proposition (2, 4) (Zeeman [9]).

$$\forall n \in \mathbb{Z} : G(k, n) \cong G(k, -n)$$

Proposition (2, 5) (Zeeman [9], Horibe [2]).

$$G(k, \pm 1) \cong \mathbb{Z}$$

prop. (2, 4) より 以後, $n \geq 0$ とする。

§ 3 Groups $G(k, n)$ 1-knot k を具体的に与えて $G(k, n)$ を計算してみる。

Theorem (3, 1).

k : normal form (α, β) ($\alpha \geq 3$, α, β は odd, $0 \leq |\beta| < \alpha$, $(\alpha, \beta) = 1$) を持つ 2-bridge knot

$$\Rightarrow G'(k, 2) \cong \mathbb{Z}_\alpha$$

[証明] k は 2-bridge knot であるから k の group G は

$$G = \langle x, y : y = LxL^{-1} \rangle, \text{ 但し } L = x^{\epsilon_1} y^{\delta_1} \cdots x^{\epsilon_p} y^{\delta_p},$$

$$\epsilon_i, \delta_i = |\alpha| - 1, \quad i = 1, \dots, p, \quad 2p + 1 = \alpha$$

と (1) 形の Wirtinger presentation を持つ。

$$\therefore G(k, 2) = \langle x, y : y = LxL^{-1}, y = x^2 y x^2 \rangle$$

各 i ($i = 1, \dots, p$) に対して

$$\begin{aligned} x^{\epsilon_i} y^{\delta_i} &= x x^{\epsilon_i - 1} y^{-1} y^{\delta_i + 1} \\ &= x y^{-1} x^{\epsilon_i - 1} y^{\delta_i + 1} \quad \because \epsilon_i - 1 \equiv 0 \pmod{2} \\ &= x y^{-1} x^{\epsilon_i + \delta_i} \quad \because y^{\delta_i + 1} = x^{\delta_i + 1} \end{aligned}$$

$$\therefore L = (x y^{-1} x^{\epsilon_1 + \delta_1}) (x y^{-1} x^{\epsilon_2 + \delta_2}) \cdots (x y^{-1} x^{\epsilon_p + \delta_p})$$

更に $\epsilon_i + \delta_i \equiv 0 \pmod{2}$ であるから

$$L = (x y^{-1})^p x^{\sum_{i=1}^p (\epsilon_i + \delta_i)}$$

故に defining relation $y = LxL^{-1}$ は,

$$\begin{aligned} y &= (x y^{-1})^p x^{\sum_{i=1}^p (\epsilon_i + \delta_i)} x ((x y^{-1})^p x^{\sum_{i=1}^p (\epsilon_i + \delta_i)})^{-1} \\ &= (x y^{-1})^p x (x y^{-1})^{-p} \end{aligned}$$

に reduce できる。

$$\therefore G(k, 2) = \langle x, y : y = (x\bar{y})^p x (x\bar{y}^{-1})^{-p}, y = x^2 y \bar{x}^2 \rangle$$

$$x\bar{y} = a \text{ とおく。}$$

$$G(k, 2) = \langle x, a; \bar{a}^{-1} = a^p x a^{-p} \bar{x}^{-1}, a = x^2 a \bar{x}^2 \rangle$$

$$= \langle x, a; \bar{a}^{-1} = a^p x a^{-p} \bar{x}^{-1}, a = x^2 a \bar{x}^2,$$

$$\bar{a}^{-1} x a \bar{x}^{-1} = (a^p x a^{-p} \bar{x}^{-1})(x a^p x a^{-p} \bar{x}^{-2}) \rangle$$

$$= \langle x, a; \bar{a}^{-1} = a^p x a^{-p} \bar{x}^{-1}, a = x^2 a \bar{x}^2, \bar{a}^{-1} = x a \bar{x}^{-1} \rangle$$

$$= \langle x, a; a^{2p+1}, x a \bar{x}^{-1} = \bar{a}^{-1} \rangle$$

$$\therefore G'(k, 2) \cong \mathbb{Z}_{2p+1} = \mathbb{Z}_d$$

Q. E. D.

Proposition (3, 2).

k を trefoil knot とすると次の事が成立する。

$$1) G'(k, 1) \cong 1$$

$$2) G'(k, 2) \cong \mathbb{Z}_3$$

$$3) G'(k, 3) \cong \text{quaternion group}$$

$$4) G'(k, 4) \cong \langle a, b; a^3 = b^3 = (ab)^2 \rangle$$

$$= \text{binary tetrahedral group}$$

$$5) (\text{Zeeman [9]}) G'(k, 5) \cong \langle a, b; a^5 = b^3 = (ab)^2 \rangle$$

$$= \text{binary icosahedral group}$$

$$6) G'(k, 6) \cong \langle a, b; [a, [a, b]], [b, [a, b]] \rangle$$

$$= \text{rank 2 の free abelian group による } \mathbb{Z} \text{ の extension}$$

[証明略]

Remark (3, 3). この prop. を用いて次の様な興味ある例を構成することが出来る。 k を trefoil knot とする。

"2-spheres $S(k, 0), \dots, S(k, 6)$ は, 各 level t での cross sections $S(k, 0) \cap R_t^3, \dots, S(k, 6) \cap R_t^3$ が R_t^3 の中で, ambient isotopic である様にする事が出来るが, $S(k, 0), \dots, S(k, 6)$ は, どの2つも R^4 で ambient isotopic ではない。"

前半の部分は n -winding bands の構成の仕方より明か。後半の部分も prop. (3, 2) より, それぞれの group が, 同型で在り (1) ことからわかる。

この例から cross sections から全体の 2-sphere を判断する場合には, 十分な注意が必要である事がわかる。

次に 2-knot groups の torsion elements について考えてみる。Fox [1] は, 任意の正奇数 $2n+1$ に対して order が, $2n+1$ の元を持つ 2-knot groups を構成した。また Zeeman [9] は, order が偶数となる元 ~~を~~ 持つ 2-knot group の例として prop. (3, 2) の $G(k, 5)$ を与えた。そこで次には,

Problem (3, 4) (Suzuki [5, problem 4.18]).

$\forall n(>0) \in \mathbb{Z}$ に対して order $2n$ の元を持つ 2-knot group が存在するか?

という事が問題となる。

この問題はまだ完全には解決されて(い)ないが、次の様に部分的な解答を与える事が出来た。

Proposition (3,5).

n を正奇数とすると,

order $2n$ 及び $4n$ の元を持つ 2-knot group が存在する。

つまり 8 の倍数以外のすべての正整数に対しては、それが order とする元の存在が示された。

[prop. (3,5) の証明]

order が, $4n$ の元の存在を示せば十分である。

k として図 5 の様な pretzel knot $(p, q, r, \underbrace{\epsilon, \dots, \epsilon}_{2m})$ を取る。ここで, $p = \pm 2, q = \pm 3, r = \pm 3, \epsilon = \pm 1$ とする。
(図 5 は, $(2, 3, 3, 1, 1)$ を表わす。) をして ϵ の正負により m に正負をつける。

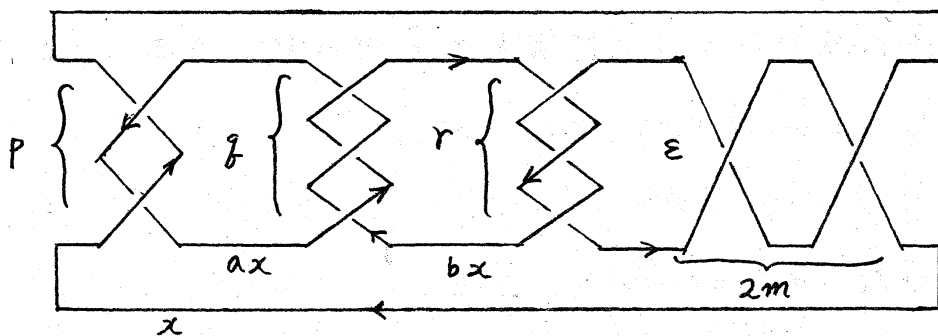


図 5

この k に対する $G'(k, n)$ を計算すると,

$$G'(k, 2) = \langle a, b; \bar{a}^p = (cab^{-1})^q, \bar{a}^{-2mpr-p} = b^r \rangle$$

となる。 p, q, r, m の組み合わせのうちで同じ knot になるも

の及び mirror image となるものを除くと

$$1) p=2, q=r=3, m \text{ は任意}$$

$$2) p=-2, q=r=3, \quad "$$

$$3) p=2, q=-3, r=3, \quad "$$

だけが残る。更に $G'(k, 2)$ は,

$$G'(k, 2) = \langle a, b, c : a^N = 1, c^2 = a^2, ca\bar{c}^{-1} = a^{2L+1}, \bar{a}^{6mp-p} = b^3,$$

$$bab^{-1} = c, bcb^{-1} = ca^L \rangle$$

$$\text{但し } N = 24mp + 4p + 4p\delta + 12,$$

$$L = 6mp + p + p\delta + 3, \quad q = 3\delta$$

と変形出来る。

故に, この presentation より, $G'(k, 2)$ は, $\langle a; a^N \rangle$ を $\langle c; c^2 \rangle$ で extension し, 更に $\langle b; b^3 \rangle$ で extension したものである事がわかる。故に a の order は $|N|$ である。

N は各場合について計算すると次の様になる。

$$1) N = 4(12m+7)$$

$$2) N = -4(12m+1)$$

$$3) N = 4(12m+3)$$

$\therefore$ order $|4(12m+7)|, |4(12m+1)|, |4(12m+3)|$ の元が, 存在する。 Q. E. D.

§ 4 $G(k, n)$ の center について 1-knot group の center は, trivial であるか, infinite cyclic である事が知られてゐる (Neuwirth [4]). しかし 2-knot group の center が, 一般にどのような group になるかはまだ知られてゐないが $G(k, n)$ の center $C(G(k, n))$ については, 次の事が成り立つ。

Theorem (4, 1).

$$C(G(k, n)) \cong \mathbb{Z} \oplus A \quad (n \neq 0)$$

$$\text{但し } A = C(G(k, n)) \cap G'(k, n)$$

[証明] $C = C(G(k, n))$ とする。

明らかに $C \cong (C/A) \oplus A$ である。一方,

$$G(k, n)/G'(k, n) \cong (C \cdot G'(k, n))/G'(k, n)$$

であり, また

$$(C \cdot G'(k, n))/G'(k, n) = C/(C \cap G'(k, n)) = C/A$$

である。

$$\therefore G(k, n)/G'(k, n) \cong C/A$$

ところが,

$$x_0^n \in C, x_0^n \notin A, (n \neq 0)$$

だから $C/A \neq 1$ 。

故に $G(k, n)/G'(k, n) \cong \mathbb{Z}$ より

$$C/A \cong \mathbb{Z}.$$

Q. E. D.

$A \neq 1$ となる例を次に与える。

Proposition (4, 2). k を trefoil knot とする。

$$1) C(G(k, 1)) \cong \mathbb{Z}$$

$$2) C(G(k, 2)) \cong \mathbb{Z}$$

$$3) C(G(k, 3)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$$

$$4) C(G(k, 4)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$$

$$5) C(G(k, 5)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$$

$$6) C(G(k, 6)) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

[証明略]

この prop. より 2-knot group G の center が trivial でも, infinite cyclic でもないものが存在し, 更に, center の元で finite order を持つものが存在する。これらのことは, 1-knot group の center と 2-knot group の center との間の違いの存在を示している。しかし一般に 2-knot group の center が, どのような group になるかは, 今後の問題である。

References

[1] R. H. Fox: "A quick trip through knot theory,"

Topology of 3-Manifold and Related Topics, Prentice-Hall, (1962), 120-167.

[2] M. Horibe: "On trivial 2-spheres in 4-space,"

Masters Thesis, Kobe Univ. 1974.

- [3] W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar: "Combinatorial Group Theory," Interscience Publ., New York, 1966.
- [4] L. P. Neuwirth: "Knot Groups," Ann. of Math. Studies #56, Princeton Univ. Pr., Princeton, 1965.
- [5] S. Suzuki: "Knotted problems of 2-spheres in 4-sphere," Math. Sem. Notes Kobe Univ. 4 (1976), 241-371.
- [6] T. Yajima: "On the fundamental groups of knotted 2-manifolds in the 4-space," J. Math. Osaka City Univ., 13 (1962), 63-71.
- [7] T. Yajima: "On simply knotted spheres in R^4 ," Osaka J. Math. 1 (1964), 133-152.
- [8] T. Yajima: "On a characterization of knot groups of some spheres in R^4 ," Osaka J. Math., 6 (1969), 435-446.
- [9] E. C. Zeeman: "Twisting spun knots," Trans. Amer. Math. Soc., 115 (1965), 471-495.