

修士論文 (2004年度)

ボース凝縮系におけるトンネル現象*

早稲田大学理工学部物理学科 栗原研究室

段下 一平†

目次

1	序論	97
2	Bogoliubov 理論	98
2.1	Gross-Pitaevskii 方程式と Bogoliubov 方程式の導出	98
2.2	一様系の Bogoliubov 励起スペクトル	99
3	Bogoliubov 励起のトンネル現象	100
3.1	音波励起の anomalous tunneling	101
3.2	Anomalous tunneling の起源	105
4	Kronig-Penney ポテンシャル中の励起スペクトル	107
4.1	背景	107
4.2	Kronig-Penney ポテンシャル中の凝縮体波動関数	108
4.3	励起スペクトル	109
4.3.1	励起スペクトルのバンド構造	109
4.3.2	音波分散	112
4.3.3	バンドギャップ	113
4.3.4	強結合極限	113
5	二重井戸型ポテンシャル中の凝縮体の集団励起	114
5.1	背景	115
5.2	凝縮体波動関数と Josephson plasma エネルギー	115
5.3	励起スペクトル	119
5.4	最低エネルギー励起	121
6	総括と展望	122

*本稿は、早稲田大学に提出した修士論文「Tunneling Phenomena in Bose Condensed Systems」を、本誌掲載のために和訳した原稿である。

†e-mail:danshita@kh.phys.waseda.ac.jp

1 序論

1995年にアルカリ原子気体のボース・アインシュタイン凝縮が実験で初めて実現して以来 [1, 2]、この分野での研究は実験・理論両面において著しい発展を遂げている [3, 4, 5]。この系においては、実験家たちが原子に対する外場ポテンシャルを様々な手段で調節できるということが最大の利点の一つである。例えば、原子気体を空間的に閉じ込めるための標準的な手段である磁気トラップは、原子にとって調和ポテンシャルとして働く。この分野の研究の初期の段階では、調和ポテンシャル中の凝縮体の性質が精力的に研究されてきた。また、原子に対して斥力ポテンシャルとして働くレーザービームを閉じ込めポテンシャルの中心に照射すると、二重井戸型ポテンシャルができあがる。そのような二重井戸型ポテンシャルを用いて、凝縮体のコヒーレンスを実証する見事な実験が MIT のグループによって行われた [6]。さらには、レーザービームの定在波を用いて、原子にとっての周期ポテンシャルを作ることでもある。このように、実験家と理論家が頭に思い描く理想的な実験系が精巧に実現できるという事実が、原子気体のボース・アインシュタイン凝縮という分野の豊かさの源となっている。

上述したような外場ポテンシャルの制御性から、この分野は量子トンネル現象の研究に適しているといえる。実際に、MIT のグループが二重井戸型ポテンシャル中に凝縮体を作ること成功して以来、多くの理論家たちが一種の巨視的量子トンネル現象である Josephson 効果について研究してきた [3, 4, 7, 8]。ごく最近、Josephson plasma 振動と self-trapping と呼ばれる Josephson ダイナミクスが実験的に観測され、注目を集めている [9]。

それに加えて、素励起の研究は凝縮体のダイナミクスや熱力学や超流動性などの重要な性質を理解するための主要なテーマである。集団励起モードが観測されたり [3, 10, 11]、ブラッグ散乱を利用して Bogoliubov 励起スペクトルが測定されるなど [3, 12]、原子気体の素励起は実験的にも盛んに研究されている。素励起のトンネル現象に関して、ゼロエネルギーをピークとする低エネルギー領域である種の共鳴トンネルが起こることを Kagan らが予言した [13]。彼らは、素励起のこのような振る舞いを “anomalous tunneling” と呼んだ。本論文では、素励起の重要性とその奇妙なトンネル現象に注目し、素励起のトンネル現象について議論をする。

本研究の主題は、1) 1 次元的な周期ポテンシャル中の凝縮体の素励起を研究することと、2) 二重井戸型ポテンシャル中の凝縮体の素励起を研究することである。これら 2 つの系における素励起の性質を anomalous tunneling という現象と結びつけるために、周期ポテンシャルとして Kronig-Penney ポテンシャル、二重井戸型ポテンシャルとしては箱型の二重井戸型ポテンシャルを採用する。

本論文では、まず第 2 章において、希薄なボース気体の素励起を微視的な立場から記述する上で信頼にたる理論として、Bogoliubov 理論を簡単におさらいする。第 3 章で、素励起のトンネル現象について議論し、anomalous tunneling について詳しく説明する。第 4 章では、Kronig-Penney ポテンシャル中における励起スペクトルのバンド構造を解析的に計算し、励起スペクトルの低エネルギーにおける性質と anomalous tunneling の関係について議論する。第 5 章では、二重井戸型ポテンシャル中の励起スペクトルを解析的に計算し、Josephson plasma モードと anomalous tunneling の関係について議論する。最後に第 6 章において、本研究の総括と今後の展望を述べる。

2 Bogoliubov 理論

この章では、ボース凝縮体の素励起を記述する方法として、Bogoliubov 理論を紹介し、簡単におさらいする。

2.1 Gross-Pitaevskii 方程式と Bogoliubov 方程式の導出

Bogoliubov 理論の解釈として、2つの観点があることがよく知られている [3, 14]。一方では、Bogoliubov 方程式は第二量子化表示の多体のハミルトニアンから導かれる。この場合、Bogoliubov 方程式はボース凝縮転移温度 T_c よりもはるかに低い温度での非凝縮成分の性質を記述する。このことは、Bogoliubov 理論が $T \ll T_c$ の希薄ボース気体の熱力学特性を与えることを意味する。他方では、Bogoliubov 方程式は凝縮体波動関数 $\psi_0(\vec{r}, t) \equiv \langle \hat{\psi}(\vec{r}, t) \rangle$ のダイナミクスを記述する時間依存 Gross-Pitaevskii 方程式から導かれる。この場合、Bogoliubov 方程式は絶対零度における凝縮体の微小振動を記述する。つまり、Bogoliubov 理論は $T = 0$ での希薄ボース気体の動的特性を与える。絶対零度において素励起と密度揺らぎが同じスペクトルを持つという事実から、これら2つの観点の同等性が示される [15]。この意味で、Bogoliubov 方程式を解いて励起スペクトルを求めると、ボース凝縮系の熱力学的性質と動的性質が明らかになる。この節では、前者の観点から Bogoliubov 理論について議論しよう。

次のようなハミルトニアンで記述される $T \ll T_c$ の希薄ボース気体を考える。

$$\hat{K} \equiv \hat{H} - \mu \hat{N} = \int d\vec{r} \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \left[h_0(\vec{r}) + \frac{U_0}{2} \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r}) \right] \hat{\psi}(\vec{r}). \quad (1)$$

ここで、 $h_0(\vec{r})$ は一体のハミルトニアン

$$h_0(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\vec{r}) - \mu, \quad (2)$$

である。化学ポテンシャルを μ 、外場ポテンシャルを $V_{\text{ext}}(\vec{r})$ と表した。原子間相互作用を δ 関数型のポテンシャルで近似して、結合定数 U_0 は s 波散乱長 a_s を用いて $U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}$ と表される。

ボソン場の演算子、 $\hat{\psi}(\vec{r})$ と $\hat{\psi}^\dagger(\vec{r})$ は次の交換関係を満たす。

$$[\hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}')] = \delta(\vec{r} - \vec{r}'), [\hat{\psi}(\vec{r}), \hat{\psi}(\vec{r}')] = [\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}')] = 0. \quad (3)$$

この交換関係を用いると、Heisenberg の運動方程式がたやすく導出できる。

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}(\vec{r}, t)}{\partial t} = [\hat{\psi}(\vec{r}, t), \hat{H} - \mu \hat{N}] = \left[h_0 + U_0 \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) \hat{\psi}(\vec{r}, t) \right] \hat{\psi}(\vec{r}, t). \quad (4)$$

ここで、 $\hat{\psi}(\vec{r}, t)$ と $\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t)$ は Heisenberg 表示でのボソン場の演算子である。凝縮成分の粒子数が巨視的であるとき、場の演算子は c 数の凝縮体波動関数 $\Psi_0(\vec{r})$ と非凝縮成分 $\hat{\phi}(\vec{r}, t)$ の和として書ける。

$$\hat{\psi}(\vec{r}, t) = \Psi_0(\vec{r}) + \hat{\phi}(\vec{r}, t). \quad (5)$$

ここで、 Ψ_0 は次の規格化条件を満たす。

$$\int d\vec{r} |\Psi_0(\vec{r})|^2 = N_0. \quad (6)$$

絶対零度近くの希薄ボース気体では、凝縮成分の粒子数 (N_0) が非凝縮成分の粒子数 ($N - N_0$) よりはるかに大きいので、(5) 式を (4) 式に代入して、 $\hat{\phi}$ の 2 次以上の項を無視する。すると、 Ψ_0 に対する Gross-Pitaevskii 方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V(\vec{r}) + U_0 |\Psi_0(\vec{r})|^2 \right] \Psi_0(\vec{r}) = \mu \Psi_0(\vec{r}), \quad (7)$$

と、 $\hat{\phi}$ に対する線形化された方程式

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\phi}(\vec{r}, t)}{\partial t} = [h_0 + 2U_0 |\Psi_0(\vec{r})|^2] \hat{\phi}(\vec{r}, t) + g \Psi_0(\vec{r})^2 \hat{\phi}^\dagger(\vec{r}, t). \quad (8)$$

を得る。(8) 式の解として次のような形をしたものを考える。

$$\hat{\phi}(\vec{r}, t) = \sum_i \left[u_i(\vec{r}) \hat{b}_i e^{-\frac{i\varepsilon_i t}{\hbar}} - v_i^*(\vec{r}) \hat{b}_i^\dagger e^{\frac{i\varepsilon_i t}{\hbar}} \right]. \quad (9)$$

ここで、 ε_i は i 番目の励起エネルギーで、 $\hat{b}_i$ と $\hat{b}_i^\dagger$ はそれぞれ i 番目の素励起の消滅演算子と生成演算子である。これらはボソンの交換関係に従う。

$$[\hat{b}_i, \hat{b}_j^\dagger] = \delta_{ij}, [\hat{b}_i, \hat{b}_j] = [\hat{b}_i^\dagger, \hat{b}_j^\dagger] = 0. \quad (10)$$

Bogoliubov 励起の波動関数、 $u_i(\vec{r})$ と $v_i(\vec{r})$ は次のような規格化条件を満たす。

$$\int d\vec{r} [u_i^*(\vec{r}) u_j(\vec{r}) - v_i^*(\vec{r}) v_j(\vec{r})] = \delta_{ij}. \quad (11)$$

(9) 式を (8) 式に代入すると、Bogoliubov 方程式が導かれる。

$$\begin{pmatrix} h_0 + 2U_0 |\Psi_0(\vec{r})|^2 & -U_0 \Psi_0(\vec{r})^2 \\ U_0 \Psi_0^*(\vec{r})^2 & -h_0 - 2U_0 |\Psi_0(\vec{r})|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i(\vec{r}) \\ v_i(\vec{r}) \end{pmatrix} = \varepsilon_i \begin{pmatrix} u_i(\vec{r}) \\ v_i(\vec{r}) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Bogoliubov 方程式を解くと、励起エネルギー ε_i と波動関数 $(u_i(\vec{r}), v_i(\vec{r}))^t$ が得られる。(9) 式の操作は Bogoliubov 変換と呼ばれ、この変換によって $\hat{\phi}$ の二次までの範囲で (1) 式のハミルトニアンが対角化される。

励起エネルギー ε_i は系の動的性質と熱力学的性質だけでなくその安定性とも密接に関係している。負の励起エネルギーは Landau 不安定性を示していて、複素数の励起エネルギーは動的不安定性を示している。例えば、そのような不安定性は、量子化された渦や光学格子中の凝縮体の運動に関する研究の中で実際に観測されている。

2.2 一様系の Bogoliubov 励起スペクトル

Bogoliubov 理論の最も簡単な応用例の一つとして、運動量 $\vec{k}$ で動いている一様な凝縮体を考える [16]。この場合、凝縮体波動関数は次のように表される。

$$\Psi_0(\vec{r}) = \sqrt{n_0} e^{\frac{i\vec{k} \cdot \vec{r}}{\hbar}}. \quad (13)$$

ここで、 $n_0 \equiv \frac{N_0}{V}$ は凝縮体密度である。Gross-Pitaevskii 方程式に (13) 式を代入すると、

$$\mu = U_0 n_0 + E_k, \quad E_k \equiv \frac{k^2}{2m}, \quad (14)$$

のように化学ポテンシャルが求まる。一様系では運動量 $\vec{p}$ がよい量子数となるので、Bogoliubov 方程式の固有関数は平面波として表される。

$$\begin{pmatrix} u_i(\vec{r}) \\ v_i(\vec{r}) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{V}} \begin{pmatrix} u_{\vec{p}} e^{\frac{i(\vec{p}+\vec{k})\cdot\vec{r}}{\hbar}} \\ v_{\vec{p}} e^{\frac{i(\vec{p}-\vec{k})\cdot\vec{r}}{\hbar}} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

(14) 式と (15) 式を Bogoliubov 方程式に代入すると、

$$\begin{pmatrix} E_p + \frac{\vec{p}\cdot\vec{k}}{m} + U_0 n_0 & -U_0 n_0 \\ U_0 n_0 & -E_p + \frac{\vec{p}\cdot\vec{k}}{m} - U_0 n_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\vec{p}} \\ v_{\vec{p}} \end{pmatrix} = \varepsilon_{\vec{p}} \begin{pmatrix} u_{\vec{p}} \\ v_{\vec{p}} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

この方程式は 2 つの固有値を持つ。

$$\varepsilon_p^\pm = \frac{\vec{p}\cdot\vec{k}}{m} \pm \varepsilon_p^B \quad (17)$$

ここで、

$$\varepsilon_p^B \equiv \sqrt{E_p(E_p + 2U_0 n_0)} \quad (18)$$

は $\vec{k} = 0$ に対する Bogoliubov 励起スペクトルである。この素励起は、 $\varepsilon < U_0 n_0$ でフォノンのであり、 $\varepsilon > U_0 n_0$ 一粒子的である。(11) 式の規格化条件が、固有エネルギー ε_p^- を持つ励起の存在を排除する。

凝縮体の流れとは正反対の方向に動く励起に注目して考えよう。波数が小さい領域では、(17) 式の励起スペクトルの形は線形になり、次のように表される。

$$\varepsilon_p^+ \simeq \left(c_0 - \frac{k}{m}\right)p. \quad (19)$$

ここで、 $c_0 \equiv \sqrt{\frac{U_0 n_0}{m}}$ は $k = 0$ のときの音速である。明らかに、凝縮体の運動の速度が音速よりも大きいとき (19) 式の励起エネルギーは負の値になり、これは系の Landau 不安定性を表している。

3 Bogoliubov 励起のトンネル現象

この章では、凝縮体を分断している障壁ポテンシャルに対する Bogoliubov 励起のトンネル現象について議論する。Kagan らが主張したとおり、低エネルギー励起が障壁を完全透過することを示す。Kagan らが用いた長方形型の障壁でなく、問題を完全に解析的に扱うために δ 関数型の障壁を採用する。

3.1 音波励起の anomalous tunneling

絶対零度における軸対称なトラップ中のボース凝縮体を考える。凝縮体は流れを持たずに静止しているとする。凝縮体の中央に凝縮体を分断するような形で障壁ポテンシャル $V_{\text{ext}}(x) = V_0\delta(x)$ があるとする。ここで、問題を解析的に扱うために δ 関数型の障壁ポテンシャルを採用した。軸方向の外場ポテンシャルはポテンシャル障壁以外は一様であるとする。軸方向の励起の運動のみに注目して、系が実質的に一次元的であると仮定する。一次元的な取り扱いは、動径方向の閉じ込めが十分にきついか動径方向の外場ポテンシャルが一様である場合に正当化される。第3章から第5章まで通じて、系が実質的に一次元的であることを想定する。前章で導入した Bogoliubov 理論に基づいて議論を展開しよう。系が実質的に一次元的であるとき、Gross-Pitaevskii 方程式は、

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) + g|\Psi_0(x)|^2 \right] \Psi_0(x) = \mu \Psi_0(x), \quad (20)$$

Bogoliubov 方程式は、

$$\begin{pmatrix} H_0 & -g\Psi_0(x)^2 \\ g\Psi_0(x)^{*2} & -H_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} - \mu + V(x) + 2g|\Psi_0(x)|^2, \quad (22)$$

となる。原子間相互作用 g は動径方向の閉じ込めに左右される。動径方向の閉じ込めが調和的で十分に強いとき、原子間相互作用は $g = \frac{2\hbar^2 a_s}{ma_\perp^2}$ となる。ここで、 $a_\perp$ は動径方向の調和振動子長である。一方、動径方向の外場ポテンシャルが一様であるとき原子間相互作用は $g = \frac{4\hbar^2 a_s}{mL^2}$ となる。ここで、 L は動径方向の系のサイズである。

障壁から遠く離れたところ ($|x| \gg \xi$) で境界条件 $\Psi_0(x) = \sqrt{\frac{\mu}{g}}$ を満たすような解を求めよう。ただし、 $\xi \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{m\mu}}$ は緩和長である。(20) 式に $\Psi_0(x)$ をかけて積分すると、

$$\left(\frac{d\Psi_0}{dx} \right)^2 = \frac{\mu}{\xi^2 g} \left(1 - \frac{g}{\mu} \Psi_0^2 \right)^2. \quad (23)$$

(23) 式をもう一度積分して、

$$\Psi_0(x) = \sqrt{\frac{\mu}{g}} \tanh \left(\frac{|x| + x_0}{\xi} \right), \quad (24)$$

を得る。定数 x_0 は $x = 0$ における凝縮体波動関数の値を反映していて、次の境界条件から求まる。

$$\Psi_0(-0) = \Psi_0(+0), \quad (25)$$

$$\left. \frac{d\Psi_0}{dx} \right|_{x=-0} = \left. \frac{d\Psi_0}{dx} \right|_{x=+0} - \frac{2mV_0}{\hbar^2} \Psi_0(0). \quad (26)$$

結果として、

$$\tanh \frac{x_0}{\xi} = \frac{-V_0 + \sqrt{V_0^2 + 4(\mu\xi)^2}}{2\mu\xi}. \quad (27)$$

を得る。図1の実線が凝縮体波動関数の概形を表している。

続いて、凝縮体の密度を媒質として伝達する励起のトンネル現象を考える。(24)式の凝縮体波動関数を代入して Bogoliubov 方程式を解こう。障壁から遠く離れたところ ($|x| \gg \xi$) で境界条件 $(u(x), v(x))^t \propto e^{\frac{ip_n x}{\hbar}}$ を満たすとする、Bogoliubov 方程式の4つの特別解が次のように解析的に求まる。

$$u_n(x) = \Lambda_n e^{\frac{ip_n x}{\hbar}} \left[\tanh \left(\frac{|x| + x_0}{\xi} \right) - i \operatorname{sgn}(x) \frac{p_n \xi}{2\hbar \varepsilon} \left(\varepsilon + \mu - \mu \tanh^2 \left(\frac{|x| + x_0}{\xi} \right) \right) + \frac{E_{p_n}}{\varepsilon} \tanh \left(\frac{|x| + x_0}{\xi} \right) - i \operatorname{sgn}(x) \frac{E_{p_n} p_n \xi}{2\hbar \varepsilon} \right], \quad (28)$$

$$v_n(x) = \Lambda_n e^{\frac{ip_n x}{\hbar}} \left[\tanh \left(\frac{|x| + x_0}{\xi} \right) - i \operatorname{sgn}(x) \frac{p_n \xi}{2\hbar \varepsilon} \left(\varepsilon - \mu + \mu \tanh^2 \left(\frac{|x| + x_0}{\xi} \right) \right) - \frac{E_{p_n}}{\varepsilon} \tanh \left(\frac{|x| + x_0}{\xi} \right) + i \operatorname{sgn}(x) \frac{E_{p_n} p_n \xi}{2\hbar \varepsilon} \right]. \quad (29)$$

ここで、

$$p_{1,2} = \pm p = \pm \sqrt{2m(\sqrt{\mu^2 + \varepsilon^2} - \mu)}, \quad (30)$$

$$p_{3,4} = \mp i\gamma = \mp i \sqrt{2m(\sqrt{\mu^2 + \varepsilon^2} + \mu)}, \quad (31)$$

$$\Lambda_n = \sqrt{\frac{\mu^2}{2g\varepsilon}} \times \begin{cases} \frac{\sqrt{2\mu + \operatorname{sgn}(x)} i \sqrt{E_p}}{\sqrt{2\mu + E_p}}, & n = 1 \\ \frac{\sqrt{2\mu - \operatorname{sgn}(x)} i \sqrt{E_p}}{\sqrt{2\mu + E_p}}, & n = 2 \\ 1, & n = 3, 4 \end{cases} \quad (32)$$

$(u_1(x), v_1(x))^t$ と $(u_2(x), v_2(x))^t$ は散乱成分である。障壁の左側における $(u_3(x), v_3(x))^t$ と障壁の右側における $(u_4(x), v_4(x))^t$ は障壁の周りに局在した成分である。障壁の左側における $(u_4(x), v_4(x))^t$ と障壁の右側における $(u_3(x), v_3(x))^t$ は障壁から遠く離れたところで発散してしまう成分である。ここで、(30)式と(31)式は次の方程式を運動量 p_n について解くことによって得られた。

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{p_n^2}{2m} \left(\frac{p_n^2}{2m} + 2\mu \right)}. \quad (33)$$

この方程式は一様系の Bogoliubov 励起スペクトルである。散乱状態の規格化因子 Λ_n は $|x| \gg \xi$ で、

$$u_n(x), v_n(x) = \sqrt{\frac{E_p + \mu \pm \varepsilon}{2\varepsilon}} e^{\frac{ip_n x}{\hbar}} \quad (34)$$

を満たすように決めた。

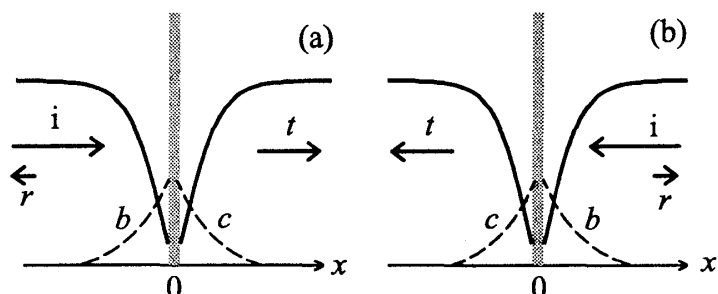


図 1: 散乱過程の模式図。Bogoliubov 励起が (a) 左方から入射する場合、(b) 右方から入射する場合。矢印、破線、実線は、それぞれ散乱成分、局在成分、凝縮体波動関数を表している。

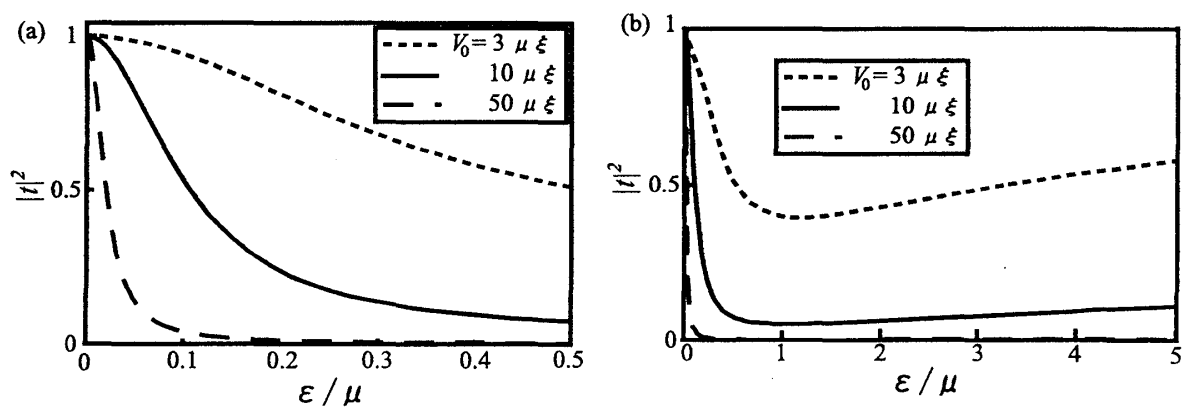


図 2: トンネル確率 $|t|^2$ 。 $V_0 = 3\mu\xi$ の場合を点線、 $V_0 = 10\mu\xi$ を実線、 $V_0 = 50\mu\xi$ を破線で表す。(a) 低エネルギー領域。(b) 比較的高エネルギー領域。

非物理的な発散成分を除くと、図 1 に示されているように、Bogoliubov 方程式の解として二つの独立解が存在し、それらはそれぞれ左方投入解 $\psi^l(x)$ と右方投入解 $\psi^r(x)$ である。前者は次のように書ける。

$$\psi^l(x) = \begin{pmatrix} u^l \\ v^l \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} u_3 \\ v_3 \end{pmatrix}, & x < 0, \\ t \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} u_4 \\ v_4 \end{pmatrix}, & x > 0, \end{cases} \quad (35)$$

ここで、 r 、 b 、 t 、 c はそれぞれ反射成分、左側に局在した成分、透過成分、右側に局在した成分の振幅である。これらの係数は励起エネルギー ε と障壁の強さ V_0 の関数である。原点 $x = 0$ における境界条件からこれらすべての係数を与える方程式を得る。

$$\psi^l(-0) = \psi^l(+0), \quad (36)$$

$$\left. \frac{d\psi^l}{dx} \right|_{x=-0} = \left. \frac{d\psi^l}{dx} \right|_{x=+0} - \frac{2mV_0}{\hbar^2} \psi^l(0). \quad (37)$$

この方程式は 4 元の連立方程式なので解析的に解くことができる。しかしながら、解の形が不必要に複雑であるので、ここではある極限での近似的な表式のみを書く。例として、関係式 $\varepsilon \ll \mu$ と $V_0 \gg \mu\xi$ が成立するとき、全ての係数は近似的に次のような表式になる。

$$r = \frac{\varepsilon V_0 - \varepsilon \mu \xi + i \frac{\varepsilon^2 V_0}{\mu}}{Z}, \quad (38)$$

$$b = -c = \frac{-2\varepsilon \mu \xi + \frac{4\varepsilon \mu^2 \xi^2}{V_0} + i \varepsilon^2 \xi}{4Z}, \quad (39)$$

$$t = \frac{\varepsilon \mu \xi + i \mu^2 \xi}{Z}, \quad (40)$$

$$Z = \varepsilon V_0 - \varepsilon \mu \xi + i \mu^2 \xi. \quad (41)$$

このように、 $\psi^l(x)$ が解析的に求められた。同様に、 $\psi^r(x)$ も求めることができる。

図 2 にトンネル確率 $|t|^2$ を、図 3 に t の位相 δ を励起エネルギーの関数として示した。それぞれ、 $V_0 = 3\mu\xi$ 、 $V_0 = 10\mu\xi$ 、 $V_0 = 50\mu\xi$ の場合を図示している。トンネル振幅 t を $\varepsilon = 0$ の周りで展開すると、次のような表式を解析的に得る。

$$|t| \simeq 1 - \alpha \left(\frac{\varepsilon}{\mu} \right)^2, \quad (42)$$

$$\delta \simeq \beta \frac{\varepsilon}{\mu}. \quad (43)$$

係数 α と β は

$$\alpha = \frac{2(V_0 - \mu\xi)(V_0^3 + \nu V_0^2 + 2\nu(\mu\xi)^2 - 4(\mu\xi)^3) + 9(\mu\xi V_0)^2}{8(\mu\xi\nu)^2}, \quad (44)$$

$$\beta = \frac{V_0^2 + \nu V_0 - 3\mu\xi\nu + 6(\mu\xi)^2}{2\mu\xi\nu}, \quad (45)$$

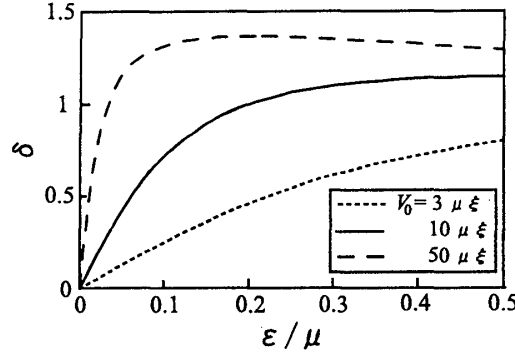


図 3: 透過振幅の位相のずれ δ 。 $V_0 = 3\mu\xi$ の場合を点線、 $V_0 = 10\mu\xi$ を実線、 $V_0 = 50\mu\xi$ を破線で表す。

である。ここで、

$$\nu = \sqrt{V_0^2 + 4(\mu\xi)^2}. \quad (46)$$

(42) 式、(43) 式、図 2、図 3 から明らかなように、エネルギーがゼロに減少していくにつれてトンネル確率 $|t|^2$ は 1 に近づき、位相のずれ δ は 0 に近づく。このような励起のトンネル現象における奇妙な振る舞いは、障壁の強さに関係なく現れる。これは障壁が低エネルギーの励起に対して透明であることを意味し、Kagan らはこのような振る舞いを “anomalous tunneling” と呼んだ [13]。トンネル確率のピークは十分強い障壁に対して半値幅 $\Delta\varepsilon \sim \frac{\mu^2\xi}{V_0}$ のローレンツ型のピークであり、障壁が強くなるにつれて、anomalous tunneling は非常に低いエネルギーを持つ励起のみにしか効かなくなる。第 4 章と第 5 章で議論するように、この Bogoliubov 励起の anomalous tunneling という性質は、Kronig-Penney ポテンシャルや二重井戸型ポテンシャル中における凝縮体の素励起の重要な特性に密接に関係している。

ピークの幅に比べて十分に高いエネルギーの領域では、Bogoliubov 励起は一粒子的に振舞うので、トンネル確率はエネルギーの増加に伴って平凡に増加する。図 2(b) において、このことが明確にあらわれている。

3.2 Anomalous tunneling の起源

Anomalous tunneling は共鳴トンネルのような特徴を示すので、 $\tau_{qb} \sim \frac{\hbar}{\Delta\varepsilon}$ の寿命を持つ準束縛状態の出現が anomalous tunneling の起源になっているのではないかと期待される。実際、anomalous tunneling を最初に予言した Kagan らは、凝縮体密度の空間変化が準束縛状態を誘起すると主張した。凝縮体密度は素励起にとって一種のポテンシャルとして働く。障壁近傍では、凝縮体密度は必然的に減少するので、結果として図 1 で見られるような励起に対するポテンシャル井戸が形成される。一粒子の共鳴トンネルとの類推から考えると、このようなポテンシャル井戸が準束縛状態を誘起し、このことが anomalous tunneling の起源になっているというわけだ。

しかしながら、この解釈は準束縛状態の根本的な概念と矛盾する。量子トンネル問題の一般的な理解では、準束縛状態は入射してきた波の波長とポテンシャル井戸の典型的なサイズが整

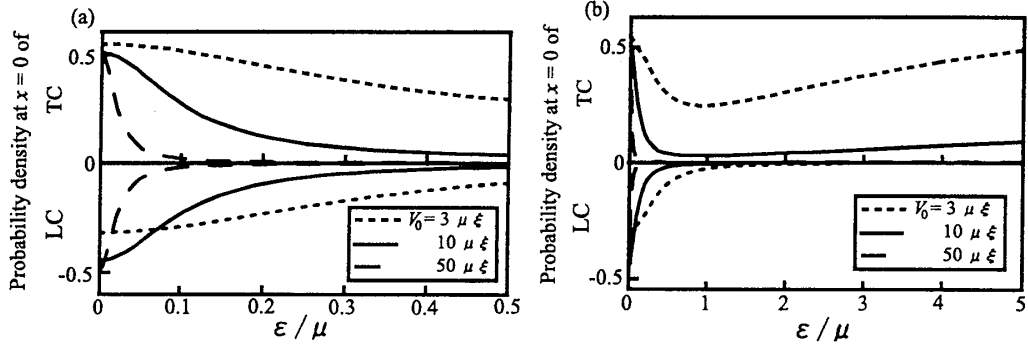


図 4: 透過成分 (TC) と局在成分 (LC) の原点 $x = 0$ における確率密度。 $V_0 = 3\mu\xi$ の場合を点線、 $V_0 = 10\mu\xi$ を実線、 $V_0 = 50\mu\xi$ を破線で表す。(a) 低エネルギー領域。(b) 比較的高エネルギー領域。

合したときに現れるとされる。凝縮体を作るポテンシャル井戸のサイズは緩和長と同程度なので、準束縛状態が現れる励起のエネルギーは化学ポテンシャルと同程度であるはずである。しかしながら、実際には共鳴が起こるエネルギーは化学ポテンシャルよりはるかに小さく、このことが *anomalous tunneling* の物理を準束縛状態の出現という観点から理解することを困難にしている。

ここで、*anomalous tunneling* の機構を、*anomalous tunneling* が起こるときに (31) 式のような虚数の運動量を持つ局在成分が突出するという事実から考察してみたい。そのために、左方投入解 ψ^l のそれぞれの成分の確率密度を計算しよう。(11) 式の規格化条件からそれぞれの成分の確率密度が次のように与えられることがわかる。入射成分に対しては $|u_1(x)|^2 - |v_1(x)|^2$ 、反射成分に対しては $|r|^2(|u_2(x)|^2 - |v_2(x)|^2)$ 、左局在成分に対しては $|b|^2(|u_3(x)|^2 - |v_3(x)|^2)$ 、透過成分に対しては $|t|^2(|u_1(x)|^2 - |v_1(x)|^2)$ 、右局在状態に対しては $|b|^2(|u_4(x)|^2 - |v_4(x)|^2)$ である。

図 4 に、透過成分 (TC) と局在成分 (LC) の原点 $x = 0$ における確率密度を示す。この図から、*anomalous tunneling* が起こるエネルギー領域、つまり $\varepsilon = 0$ 近傍でのみ局在成分が突出して現れることがわかる。この結果は、*anomalous tunneling* の物理を理解する上で局在成分が重要な要素であることを示唆している。注目すべきなのは、局在成分の確率密度が負の値をとることである。そのような性質のおかげで、 $\psi^l(x)$ の確率密度を全体として増加させることなく、障壁近傍においてさえ散乱成分の確率振幅の大きさを障壁遠方から保ったままでいられる。このように、局在成分はその確率密度が負であることから、散乱成分を障壁の両側に広げる役割を担う。このことが *anomalous tunneling* の起源のひとつである。

局在成分は Bogoliubov 方程式に特有の解なので、この解が密接に関係している *anomalous tunneling* を議論するうえで一粒子の問題との類推は妥当ではない。つまり、いまのところ *anomalous tunneling* に伴って準束縛状態が存在するかどうかは明らかではない。第 5 において、集団振動モードの周期の減少と関連付けて準束縛状態の存在について再び議論する。

4 Kronig-Penney ポテンシャル中の励起スペクトル

この章では、Kronig-Penney モデルを用いて、一次元周期ポテンシャル中における凝縮体の励起スペクトルのバンド構造を研究する。この章の構成は次のとおりである。第 4.1 節で、光学格子中におけるボース凝縮体の素励起に関する研究を紹介する。第 4.2 節では、Gross-Pitaevskii 方程式を解き、Kronig-Penney ポテンシャル中の凝縮体波動関数を求める。第 4.3 節では、Bogoliubov 方程式を解析的に解き、Kronig-Penney ポテンシャル中の励起スペクトルのバンド構造を調べる。低エネルギー励起が音波励起であることを証明し、音速とバンドギャップを計算する。

4.1 背景

光学格子はレーザービームの定常波によって作られ、原子にとって周期ポテンシャルとして作用する。近年、光学格子中のボース凝縮の素励起に関する実験が盛んに行われ、その性質が明らかにされてきている。例えば、一次元的な光学格子中のボース凝縮体において、格子の高さの増加に伴って集団励起の振動数が減少する様子が観測されている [17, 18]。この結果は、格子の影響を原子の有効質量の増加に繰り込むという Kramer らの理論とよく一致している [19]。さらに、格子の高さを振動させてその応答を観測することで、三次元的な光学格子中のボース凝縮体の励起スペクトルが調べられている [20, 21]。Kramer らは時間依存する Gross-Pitaevskii 方程式を用いてこの実験を数値的にシミュレーションし、超流動相で励起スペクトルが連続的に広がっているという実験結果が Bogoliubov 励起のパラメトリック共鳴によって引き起こされていることを示した [22]。彼らは、運動量分布を測定しパラメトリック共鳴によって励起されたモードを特定すれば、Bogoliubov 励起のバンド構造を実験的に決めることができると提案している。

この章では、Kronig-Penney モデルを用いて、一次元周期ポテンシャル中のボース凝縮体の素励起について研究する。これまで多くの理論家たちが、正弦関数型の周期ポテンシャル中でボース凝縮体の素励起を研究してきた [23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30]。Berg-Sørensen らは一次元の周期ポテンシャルに関して Bogoliubov 方程式を数値的に解き、励起スペクトルが低エネルギーで音波分散を持つことを示した [23]。彼らは Thomas-Fermi 近似が妥当であるくらい浅い格子の場合に音波分散の解析的表式をも求めている。よく知られているように、励起スペクトルの音波分散は系の超流動性と密接に関係している。大部分の研究者たちは励起スペクトルが音波分散であることを支持している。対照的に、Ichioka らは数値的に Bogoliubov 方程式をとき、格子が非常に深いときに励起のソフト化が起こると報告した [24]。励起スペクトルのソフト化とは有限の結晶運動量でありながらエネルギーが 0 になるような励起が存在するということであり、このことは超流動の不安定性を意味する。本研究の目的のひとつは Bogoliubov 方程式を Kronig-Penney モデルの範囲で解析的に解き、励起のソフト化の可能性を探ることである。後で詳述するように、Kronig-Penney モデルの場合、どんなに格子を深くしても励起のソフト化は起こらない。

正弦関数型の周期ポテンシャル中における励起スペクトルのバンド構造を解析的に求める方法は、いくつかの物理的極限に限られている。隣接するサイトの凝縮体波動関数の重なりが十

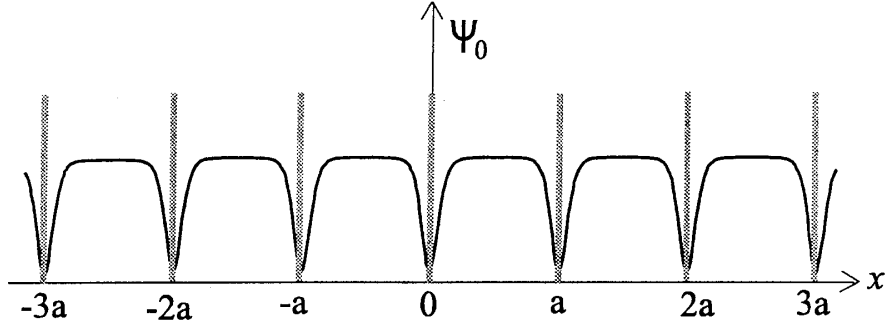


図 5: Kronig-Penney ポテンシャル中の凝縮体波動関数の模式図。

分小さくなるくらい格子が深い場合、強結合近似を用いて励起スペクトルの第一バンドを解析的に計算することができる [26, 27, 28, 29]。格子が浅い場合、格子ポテンシャルを摂動的に取り扱うことができ、第一バンドと第二バンドの一部を解析的に計算することができる [30]。Kronig-Penney モデルの利点として、あらゆる深さの格子に対して励起の全てのバンドを解析的に計算できることがあげられる。

Kronig-Penney モデルのもうひとつの利点は励起のバンド構造を、前章で議論した励起のトンネル現象と関連付けて議論できることである。実際、anomalous tunneling が低エネルギー励起の音波分散の起源になっていて、そのために励起のソフト化が起こらないということがわかる。

4.2 Kronig-Penney ポテンシャル中の凝縮体波動関数

一次元的周期ポテンシャル中の絶対零度のボース凝縮体を考える。前章で議論したように、凝縮体は実質的に一次元的であるとする。周期ポテンシャルとして Kronig-Penney ポテンシャル、

$$V(x) = V_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na), \quad (47)$$

を採用する。ここで、 a は格子定数である。 δ 関数型のポテンシャル障壁の強さ V_0 は格子の深さを表している。凝縮体は静止しているとする。前章と同様、Bogoliubov 理論に基づいて議論していく。

まず、(20) 式の Gross-Pitaevskii 方程式を解いて、Kronig-Penney ポテンシャル中の凝縮体波動関数を求めよう。一般的には、(20) 式の解は Jacobi の楕円関数、 $\text{sn}(b(x + x_0), k)$ を用いて表現される形となる。そこで、井戸の大きさが緩和長に比べて十分に大きいと仮定すると、凝縮体波動関数は各井戸の中央近傍において障壁からの影響を受けなくなる。つまり、各障壁の周りの凝縮体波動関数は (24) 式のように表される単一障壁問題の波動関数と同じ形になり、Gross-Pitaevskii 方程式の基底状態の解は

$$\Psi_0(x) = \sqrt{\frac{\mu}{g}} \tanh \left(\frac{|x - an| + x_0}{\xi} \right), \quad (48)$$

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)a < x < \left(n + \frac{1}{2}\right)a, \quad (49)$$

となる。ここで、定数 x_0 は $x = an$ における境界条件から求まり、

$$\tanh \frac{x_0}{\xi} = \frac{-V_0 + \sqrt{V_0^2 + 4(\mu\xi)^2}}{2\mu\xi}. \quad (50)$$

となる。この解は、 $\text{sn}(b(x+x_0), k)$ を用いて一般的に表された解の $k \rightarrow 1$ 極限をとったものに対応している。Kronig-Penney ポテンシャル中の凝縮体波動関数の模式図を図 5 に示す。

化学ポテンシャルは、凝縮体波動関数に対して課される規格化条件により各サイトあたりの凝縮原子数 N_0 と関係付けられる。規格化条件は次のように表される。

$$\int_{na}^{(n+1)a} dx |\Psi_0(x)|^2 = N_0. \quad (51)$$

この規格化条件に (48) 式の凝縮体波動関数を代入すると、化学ポテンシャルと N_0 の関係式が次のように導かれる。

$$\mu \left(1 - 2\frac{\xi}{a} + 2\frac{\xi}{a} \tanh \frac{x_0}{\xi}\right) = gn_0. \quad (52)$$

ここで、 $n_0 \equiv \frac{N_0}{a}$ は凝縮体の平均密度である。障壁が十分に強い ($V_0 \gg gn_0\xi_0$) 場合と十分に弱い ($V_0 \ll gn_0\xi_0$) 場合において、(86) 式の解が近似的に求まる。ただし、 $\xi_0 \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{mgn_0}}$ とおいた。障壁が十分に強い場合、(52) 式を $\frac{\xi_0}{a}$ と $\frac{gn_0\xi_0}{V_0}$ のべき級数に展開して、

$$\mu \simeq gn_0 \left(1 + \frac{2\xi_0}{a} + \frac{2\xi_0^2}{a^2} - \frac{2gn_0\xi_0^2}{aV_0} + \frac{\xi_0^3}{a^3} - \frac{6gn_0\xi_0^3}{a^2V_0}\right), \quad (53)$$

を得る。同じようにして、障壁が十分に弱い場合、(52) 式を $\frac{\xi_0}{a}$ と $\frac{V_0}{gn_0\xi_0}$ のべき級数に展開して、

$$\mu \simeq gn_0 \left(1 + \frac{V_0}{gn_0a} - \frac{V_0^2}{4a\xi_0(gn_0)^2}\right), \quad (54)$$

を得る。(53) 式と (54) 式では、微小パラメータの三次までの展開を表した。図 6 に、化学ポテンシャルを障壁の強さ V_0 の関数として表す。障壁の存在によりその近傍での密度が中央部分に押し込まれ斥力の効果がより顕著になるため、障壁が高くなるにつれて化学ポテンシャルは単調増加する。

4.3 励起スペクトル

この節では、(48) 式の凝縮体波動関数に対して Bogoliubov 方程式を解き、Kronig-Penney ポテンシャル中の凝縮体の励起スペクトルを計算する。

4.3.1 励起スペクトルのバンド構造

前章で求めた単一障壁問題の解 $\psi^{l,r}(x)$ を用いて、Kronig-Penney ポテンシャル中の凝縮体の励起スペクトルのバンド構造を解析的に求めることができる。Bogoliubov 方程式は線形の

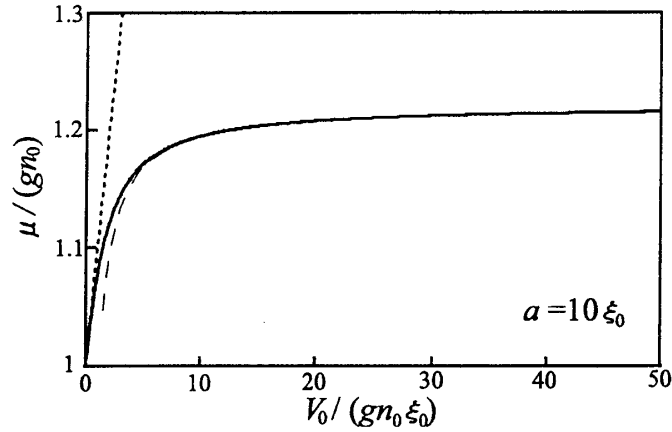


図 6: 格子定数 $a = 10\xi_0$ のときの化学ポテンシャル μ を実線で表す。破線、点線はそれぞれ $V_0 \gg gn_0\xi_0$ のとき、 $V_0 \ll gn_0\xi_0$ のときの近似値である。

微分方程式なので、その方程式の一般解は同じ固有エネルギーを持つ独立解の線形和で表すことができる。したがって、領域 $|x| < \frac{a}{2}$ での Bogoliubov 方程式の一般解は $\psi^l(x)$ と $\psi^r(x)$ の線形和で表される。

$$\psi(x) = \eta\psi^l(x) + \zeta\psi^r(x), \quad |x| < \frac{a}{2}. \quad (55)$$

次に、Bloch の定理を用いてこの $|x| < \frac{a}{2}$ の解を全ての x の領域に拡張しよう。Bloch の定理は $\psi(x)$ に次の境界条件を課す。

$$\psi(y+a) = e^{\frac{iqa}{\hbar}} \psi(y), \quad (56)$$

$$\left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=y+a} = e^{\frac{iqa}{\hbar}} \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=y}, \quad (57)$$

ここで、 q は結晶運動量である。 $x = -\frac{a}{2}$ において、(56) 式と (57) 式の境界条件を課すと、励起エネルギー ε と結晶運動量 q を関係付ける方程式を得る。

$$\cos\left(\frac{qa}{\hbar}\right) = \frac{t^2 - r^2}{2t} e^{\frac{ipa}{\hbar}} + \frac{1}{2t} e^{-\frac{ipa}{\hbar}}. \quad (58)$$

ここで、格子定数が緩和長より十分大きいことを仮定しているので、障壁の周りに局在した成分は $|x| = \frac{a}{2}$ で指数関数的に減衰して消えていて、結果として (58) 式に局在成分の振幅、 b と c は現れない。

次のように定義されるロンスキアン $W(\psi^{j*}, \psi^i)$ を考えると、 r と t の間の関係式が得られ、その関係式を用いて (58) 式を簡略化できる。

$$W(\psi^{j*}, \psi^i) = u^{j*} \frac{d}{dx} u^i - u^i \frac{d}{dx} u^{j*} + v^{j*} \frac{d}{dx} v^i - v^i \frac{d}{dx} v^{j*} \quad (59)$$

簡単な証明から、 ψ^j と ψ^i が同じエネルギー固有値をもつ固有状態であるとき、ロンスキアンが位置 x に依存しないことがわかる。つまり、

$$\frac{d}{dx} W(\psi^{j*}, \psi^i), \quad (60)$$

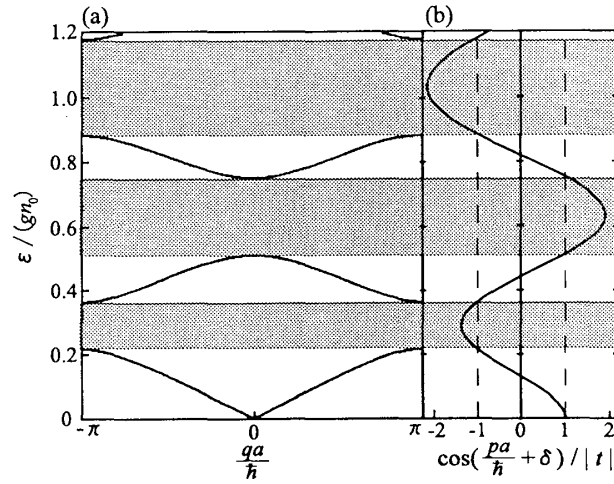


図 7: 格子間隔 $a = 10\xi_0$ 、障壁の強さ $V_0 = 5gn_0\xi_0$ のときの励起スペクトルのバンド構造。影のついた領域では、(63) 式の解がなく、バンドギャップを表している。(a) バンド構造。(b) 励起エネルギーの関数としての (63) 式の左辺。

である。 $W(\psi^{l*}, \psi^l)$ を (60) 式に代入して、

$$|t|^2 + |r|^2 = 1, \quad (61)$$

を得る。この式はエネルギー流束の保存則を表している [13]。また、 $W(\psi^{r*}, \psi^l)$ を (60) 式に代入して、

$$t = |t|e^{i\delta}, r = \pm i|r|e^{i\delta}. \quad (62)$$

を得る。(61) 式と (62) 式を (58) 式に代入すると、簡略化された励起エネルギーと結晶運動量の関係式が得られる。

$$\frac{\cos\left(\frac{pa}{\hbar} + \delta\right)}{|t|} = \cos\left(\frac{qa}{\hbar}\right). \quad (63)$$

この方程式は自由粒子の場合と正確に一致している。(63) 式から、単一障壁問題の透過係数が励起エネルギーと結晶運動量との関係、すなわちバンド構造を決定することが見てとれる。

(63) 式を励起エネルギー ε について解くと、図 7(a) に表されるような励起スペクトルのバンド構造が得られる。図 7(b) では (63) 式の左辺を励起エネルギーの関数として表している。(63) 式の右辺の値は 1 以下であるので、この左辺の値が 1 を超えるとき (63) 式は解を持たない。それゆえ、左辺の値が 1 を超えるような領域は励起が存在しない領域に対応しており、つまりそれがバンドギャップになっている。図 7 では、そのような領域に影をつけて表している。

障壁が強い極限では、全てのエネルギーバンドの幅は極限的に小さくなる。これは、凝縮体が完全に単一の井戸に分断されてしまい、エネルギーバンドが単一の井戸の離散的な固有エネルギーになってしまうからである。

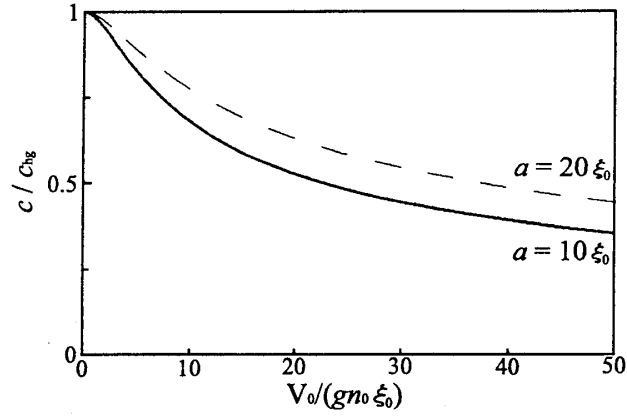


図 8: (65) 式で表される、Kronig-Penney ポテンシャル中の音速。格子定数として $a = 10\xi_0$ と $a = 20\xi_0$ をとる。

4.3.2 音波分散

図 7(a) から、励起スペクトルの第一バンドが低エネルギーで音波分散になっていることが見てとれる。このように低エネルギーで励起スペクトルが音波分散を持つことを、任意の障壁の強さに対して証明しよう。(63) 式を $\varepsilon = 0$ の周りで展開すると、低エネルギー極限 $\varepsilon \rightarrow 0$ の励起スペクトルが計算できる。低エネルギーでの表式 $p \simeq \sqrt{\frac{m}{\mu}}\varepsilon$ と (42) 式と (43) 式を (63) 式に代入すると、音波分散が次のように求まる。

$$\varepsilon \simeq cq. \quad (64)$$

ここで、音速 c は、

$$c = \sqrt{\frac{\mu a^2}{m((a + \beta\xi)^2 - 2\xi^2\alpha)}}. \quad (65)$$

で与えられる。 $V_0 \gg gn_0\xi_0$ の極限と $V_0 \ll gn_0\xi_0$ の極限では、

$$c \simeq c_0 \sqrt{\frac{gn_0a}{2V_0 + gn_0a}} \left(1 + \frac{5\xi_0}{2a}\right), \quad V_0 \gg gn_0\xi_0, \quad (66)$$

$$\simeq c_0 \left(1 - \frac{3V_0^2}{16a\xi_0(gn_0)^2}\right), \quad V_0 \ll gn_0\xi_0 \quad (67)$$

ここで、 $c_0 \equiv \sqrt{\frac{gn_0}{m}}$ は一様系の音速である。図 8 で、格子間隔 $a = 10\xi_0$ と $a = 20\xi_0$ のときの音速を V_0 の関数としてあらわす。障壁が強くなるにつれて、音速は単調に減少する。この傾向は正弦関数型の周期ポテンシャルの場合と定性的に一致している。

このように、(42) 式と (43) 式で表される anomalous tunneling という性質 (つまり低エネルギー励起の完全透過) から音波分散が導かれた。文献 [24] では、正弦関数型の格子が非常に深いとき長波長の励起がソフト化するという数値計算結果が得られていて、この励起のソフト化は超流動の不安定性を表していると主張されている。それとは対照的に、この研究で用いた

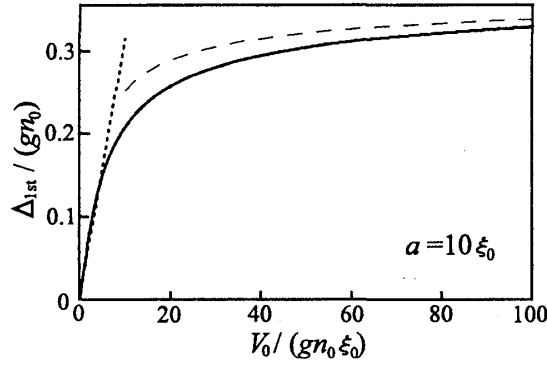


図 9: 第一バンドと第二バンドの間のバンドギャップを障壁の強さ V_0 の関数として示す。格子間隔は $a = 10\xi_0$ としている。破線、点線はそれぞれ $V_0 \gg gn_0\xi_0$ のとき、 $V_0 \ll gn_0\xi_0$ のときの近似値である。

Kronig-Penney ポテンシャルでは励起のソフト化は起こらず、anomalous tunneling のおかげであらゆる深さの格子に対して低エネルギー励起は音波分散である。励起スペクトルが音波分散であることは超流動が安定であることを意味するので、この意味で、anomalous tunneling が Kronig-Penney ポテンシャル中での超流動の安定性と密接に関係しているといえる。

4.3.3 バンドギャップ

第 j 番目のバンドギャップの大きさは、(63) 式を $q = \pm \frac{\hbar\pi}{a}$ で解くことによって求まる。図 9 で、一つ目のバンドギャップ、 Δ_{1st} を示す。 $V_0 \gg gn_0a$ の極限と $V_0 \ll gn_0\xi_0$ の極限で、次のように近似的にバンドギャップを求めることができる。

$$\Delta_{1st} \simeq \frac{\pi gn_0\xi_0}{a} \left(1 + \frac{2\xi_0}{a}\right) - gn_0 \sqrt{\frac{gn_0\xi_0^2}{V_0 a}} \left(1 + \frac{5\xi_0}{2a}\right), \quad V_0 \gg gn_0a, \quad (68)$$

$$\simeq \frac{\pi\xi_0 V_0}{a^2}, \quad V_0 \ll gn_0\xi_0. \quad (69)$$

(68) 式と (69) 式と図 9 から、初めバンドギャップは障壁の強さに対して線形に立ち上がり、 $V_0 \rightarrow \infty$ の極限で単一の井戸における凝縮体の最低励起エネルギーに一致する。

4.3.4 強結合極限

関係式 $V_0 \gg gn_0a$ を満たすくらい障壁が強い場合、(63) 式を近似的に解き、次のように励起スペクトルの第一バンドを求めることができる。

$$\varepsilon \simeq gn_0 \sqrt{\frac{2gn_0\xi_0^2}{aV_0}} \left(1 + \frac{5\xi_0}{2a}\right) \left| \sin\left(\frac{qa}{2\hbar}\right) \right|. \quad (70)$$

一方、他の多くの理論家達が、強結合近似を用いて励起スペクトルの第一バンドを計算している [26, 27, 28, 29]。格子が非常に深い場合、励起スペクトルの第一バンドは次のような形をとる。

$$\varepsilon \simeq \sqrt{\frac{2\eta}{\kappa}} \left| \sin \left(\frac{qa}{2\hbar} \right) \right|, \quad (71)$$

ここで、 κ は圧縮率で、 η は凝縮体自身が定常流を持つ状態が作る最低エネルギーバンドの幅である。圧縮率 κ は、

$$\frac{1}{\kappa} = N_0 \frac{\partial \mu}{\partial N_0}, \quad (72)$$

という熱力学関係式で定義される。バンド幅 η は、

$$\eta = \frac{2\hbar^2}{m^* a^2}. \quad (73)$$

という関係式で有効質量 m^* と結びついている。ここで、有効質量の定義は、

$$\frac{1}{m^*} = \frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}}{\partial k^2} \Big|_{k=0} \quad (74)$$

である。ここで、 k は (励起ではなく) 凝縮体自身が持つ結晶運動量であり、 $\tilde{\varepsilon}$ は凝縮原子一つあたりのエネルギーである。この章での主要な興味である励起のエネルギー $\varepsilon(q)$ と凝縮原子一つあたりのエネルギー $\tilde{\varepsilon}(k)$ を混同しないよう注意しなければならない。

(72) 式と (73) 式を用いて、

$$\frac{1}{\kappa} \simeq gn_0 \left(1 + \frac{\xi_0}{a} \right), \quad (75)$$

$$\eta \simeq \frac{(gn_0\xi_0)^2}{aV_0} \left(1 + \frac{4\xi_0}{a} \right). \quad (76)$$

を得る。ここで、圧縮率の計算には、(53) 式を用いた。(75) 式と (76) 式を (71) 式に代入すると、ここで十分に強い障壁に対して求めた (70) 式が強結合近似の結果と一致することがわかる。

5 二重井戸型ポテンシャル中の凝縮体の集団励起

原子気体のボース凝縮系の Josephson 効果が実験的に観測されたことを動機として、この章では、二重井戸型ポテンシャル中の凝縮体の集団励起を調べる。第 5.1 節で、二重井戸型ポテンシャル中の凝縮体に関するこれまでの研究を紹介する。第 5.2 節では、Gross-Pitaevskii 方程式を解き、箱型の二重井戸型ポテンシャル中の凝縮体波動関数を解析的に求める。さらに、求めた凝縮体波動関数から Josephson plasma エネルギーを計算する。第 5.3 節では、Bogoliubov 方程式を解析的に解き、二重井戸型ポテンシャル中の励起スペクトルを求める。第 5.4 節では、最低エネルギー励起に注目し、二重極モードから Josephson plasma モードへのクロスオーバーについて議論する。

5.1 背景

ボース凝縮した系においては、秩序変数が持つ巨視的量子位相のコヒーレンスが興味深い特徴のひとつとして挙げられる。巨視的な数の原子が最低一粒子状態を占有するようになってくると、凝縮している原子の独立性は失われ、結果として、凝縮体は全体として巨視的量子位相を持った量子力学的な波として振る舞う。巨視的量子位相の存在は、物質波の干渉を実験で観測することによって初めて実証された [6]。その実験では、二重井戸型ポテンシャルに閉じ込められた 2 つの凝縮体を用意し、それらをトラップから放し、空間的に重ね合わせた。すると、原子の密度の空間分布に明らかな物質波の干渉パターンが観測され、干渉パターンのピーク的位置から 2 つの凝縮体間の位相差が測定された。

よく知られているように、Josephson 効果は超伝導のトンネル接合系に対して初めて予言された [34]。Josephson 効果は両側の秩序変数間の位相差と粒子数差によって記述されるダイナミクスとして解釈でき、それは系のコヒーレンスを直接的に実証する。二重井戸型ポテンシャル中の凝縮体の Josephson 効果を記述する方法としては、二状態近似が便利で、多くの理論家たちが二状態近似を用いて様々な Josephson 的なダイナミクスを研究している [3, 4, 7, 8]。二状態近似では、粒子数差を振りの角運動量に、位相差を振りの傾斜角に対応させることによって振りとアナロジーに基づいて、運動を考察することができる。例えば、Josephson plasma 振動は振りの微小振動に対応し、self-trapping は振りの回転に対応している。

最近、Albiez らによって Josephson plasma 振動と self-trapping は実験で観測された [9]。彼らは、トラップをはずす直前の凝縮体の密度分布とトラップをはずした後の干渉パターンを測定することで、これらの Josephson ダイナミクスを観測することに成功した。さらに、MIT のグループがレーザーとの散乱を利用することで凝縮体をトラップからはずすことなく位相差を測定することに成功したが [35]、この位相差の測定法がより精巧な Josephson ダイナミクスの観測を可能にすると考えられる。

一方、Josephson plasma 振動は凝縮体の静的平衡からの微小振動なので、Bogoliubov 励起として取り扱うことができる。Salasnich らは、調和ポテンシャルによる閉じ込めと Gaussian のポテンシャル障壁がある二重井戸型ポテンシャルを採用して Bogoliubov 方程式を数值的に解き、励起エネルギーを求めた [36]。彼らは、障壁の高さを上げていくにつれて、最低励起エネルギー（障壁がないときには二重極モードのエネルギーである）が減少することを見出した。彼らは最低励起と Josephson plasma モードとの関係について言及していないが、この最低励起エネルギーの減少は二重極モードから Josephson plasma モードへのクロスオーバーであると解釈できる。この章では、箱型の二重井戸型ポテンシャルを採用して Bogoliubov 方程式を解析的に解き、二重極モードから Josephson plasma モードへのクロスオーバーを、anomalous tunneling の観点を交えて議論する。

5.2 凝縮体波動関数と Josephson plasma エネルギー

ボース凝縮体が絶対零度で箱型の二重井戸型ポテンシャル中に閉じ込められているような状況を考える。凝縮体を分断している障壁ポテンシャルに対して垂直な方向を軸方向、平行な方

向を動径方向と呼ぶ。前章までと同様に、動径方向の閉じ込めが十分強いと仮定し、問題を 1 次元的に取り扱う。箱型の二重井戸型ポテンシャルは、

$$V(x) = \begin{cases} V_0 \delta(x), & |x| < a, \\ \infty, & |x| \geq a, \end{cases} \quad (77)$$

と表される。ここで、 a は井戸の大きさを表す。障壁ポテンシャルとして δ 関数型の障壁を採用しているのは、問題を解析的に取り扱うためである。第二章で導入した Bogoliubov 理論に基づいて議論を展開する。

まず初めに、(20) 式を解き、(77) 式で表される二重井戸型ポテンシャル中の凝縮体波動関数を求めよう。一般的には、(20) 式の解は Jacobi の楕円関数、 $\text{sn}(b(x+x_0), k)$ を用いて表現される形となる [37]。そこで、井戸の大きさが緩和長に比べて十分に大きいと仮定すると、凝縮体波動関数は各井戸の中央近傍において障壁と剛体壁からの影響を受けなくなる。そのとき、(20) 式の最低エネルギーを持つ対称解 (Ψ_0^{sm}) と反対称解 (Ψ_0^{an}) は次のように近似的に与えられる。

$$\Psi_0^{\text{sm}}(x) = \sqrt{\frac{\mu_{\text{sm}}}{g}} \times \begin{cases} \tanh\left(\frac{|x|+x_0}{\xi_{\text{sm}}}\right), & |x| < \frac{a}{2}, \\ \tanh\left(\frac{-|x|+a}{\xi_{\text{sm}}}\right), & \frac{a}{2} \leq |x| < a, \end{cases} \quad (78)$$

$$\Psi_0^{\text{an}}(x) = \sqrt{\frac{\mu_{\text{an}}}{g}} \times \begin{cases} \tanh\left(\frac{x}{\xi_{\text{an}}}\right), & |x| < \frac{a}{2}, \\ \text{sgn}(x) \tanh\left(\frac{-|x|+a}{\xi_{\text{an}}}\right), & \frac{a}{2} \leq |x| < a, \end{cases} \quad (79)$$

ここで、 $\mu_{\text{sm}(\text{an})}$ は対称的な (反対称的な) 状態の化学ポテンシャルである。定数 x_0 は $x=0$ における境界条件

$$\Psi_0(-0) = \Psi_0(+0), \quad (80)$$

$$\left. \frac{d\Psi_0}{dx} \right|_{x=-0} = \left. \frac{d\Psi_0}{dx} \right|_{x=+0} - \frac{2mV_0}{\hbar^2} \Psi_0(0), \quad (81)$$

によって決まり、

$$\tanh \frac{x_0}{\xi} = \frac{-V_0 + \sqrt{V_0^2 + 4(\mu\xi)^2}}{2\mu\xi}. \quad (82)$$

と表される。これらの解は、 $\text{sn}(b(x+x_0), k)$ を用いて一般的に表された解の $k \rightarrow 1$ 極限をとったものに対応している [37]。

続いて、求めた凝縮体波動関数から Josephson plasma エネルギー、 $\varepsilon_{\text{JP}} = \sqrt{E_J E_C}$ を計算する。ここで、 E_J と E_C はそれぞれ Josephson 結合エネルギーと容量エネルギーである。これらは次のように定義される。

$$E_J = \frac{E_{\text{an}} - E_{\text{sm}}}{2}, \quad (83)$$

$$E_C = 4 \frac{d\mu_{\text{sm}}}{dN_0}. \quad (84)$$

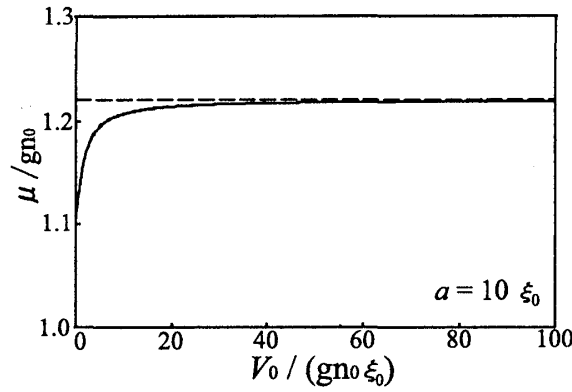


図 10: 障壁の強さ V_0 の関数としての化学ポテンシャル μ_{sm} (実線) と μ_{an} (破線)

ここで、 $E_{sm(an)}$ は対称解 (反対称解) の平均場エネルギーである。上の (83) 式と (84) 式からわかるように、Josephson plasma エネルギーを計算するためには化学ポテンシャルと平均場エネルギーを求める必要がある。

化学ポテンシャルは、凝縮体波動関数に対して課される規格化条件により凝縮原子数 N_0 と関係付けられる。規格化条件は次のように表される。

$$\int_{-a}^a dx |\Psi_0(x)|^2 = N_0. \quad (85)$$

この規格化条件に (78) 式と (79) 式の凝縮体波動関数を代入すると、化学ポテンシャルと N_0 の関係式が次のように導かれる。

$$\frac{\mu_{sm}}{gn_0} \left(1 - 2\frac{\xi_{sm}}{a} + \frac{\xi_{sm}}{a} \tanh \frac{x_0}{\xi_{sm}} \right) = 1, \quad (86)$$

$$\frac{\mu_{an}}{gn_0} \left(1 - 2\frac{\xi_{an}}{a} \right) = 1, \quad (87)$$

ここで、 $n_0 \equiv \frac{N_0}{2a}$ は凝縮体の平均密度である。障壁が十分に強い ($V_0 \gg gn_0\xi_0$) 場合と十分に弱い ($V_0 \ll gn_0\xi_0$) 場合において、(86) 式の解が近似的に求まる。ただし、 $\xi_0 \equiv \frac{\hbar}{\sqrt{mgn_0}}$ とおいた。障壁が十分に強い場合、(86) 式を $\frac{\xi_0}{a}$ と $\frac{gn_0\xi_0}{V_0}$ のべき級数に展開して、

$$\frac{\mu_{sm}}{gn_0} \simeq 1 + \frac{2\xi_0}{a} + \frac{2\xi_0^2}{a^2} - \frac{gn_0\xi_0^2}{aV_0} + \frac{\xi_0^3}{a^3} - \frac{3gn_0\xi_0^3}{a^2V_0}, \quad (88)$$

を得る。同じようにして、障壁が十分に弱い場合、(86) 式を $\frac{\xi_0}{a}$ と $\frac{V_0}{gn_0\xi_0}$ のべき級数に展開して、

$$\frac{\mu_{sm}}{gn_0} \simeq 1 + \frac{\xi_0}{a} + \frac{\xi_0^2}{2a^2} + \frac{V_0}{2agn_0} + \frac{\xi_0^3}{8a^3} + \frac{\xi_0 V_0}{4a^2 gn_0} - \frac{V_0^2}{8a\xi_0(gn_0)^2}, \quad (89)$$

を得る。一方、(87) 式の解は

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{an}}{gn_0} &= 1 + \frac{2\xi_0^2}{a^2} + 2\frac{\xi_0}{a} \sqrt{1 + \frac{\xi_0^2}{a^2}}, \\ &\simeq 1 + \frac{2\xi_0}{a} + \frac{2\xi_0^2}{a^2} + \frac{\xi_0^3}{a^3}, \end{aligned} \quad (90)$$

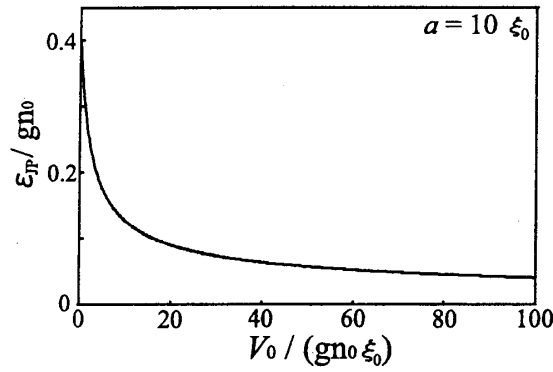


図 11: 障壁の強さ V_0 の関数としての Josephson plasma エネルギー ε_{JP}

であり、障壁の強さに依存しない。図 10 に、障壁の強さ V_0 の変化に対する化学ポテンシャル μ_{sm} 、 μ_{an} の変化の様子を示す。障壁の強さが大きくなるにつれて、 μ_{sm} は単調増加し、 μ_{an} の値に漸近していく。このことは、 $V_0 \rightarrow \infty$ の極限で対称な状態と反対称な状態が縮退することを意味する。

平均場エネルギー E は次のような表式を用いて計算することができる。

$$E = \int_{-a}^a dx \Psi_0^*(x) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) + \frac{g}{2} |\Psi_0(x)|^2 \right] \Psi_0(x). \quad (91)$$

障壁が十分強い ($V_0 \gg gn_0 \xi_0$) ととき、

$$\frac{E_{sm}}{N_0 gn_0} \simeq 1 + \frac{4\xi_0}{3a} + \frac{2\xi_0^2}{a^2} - \frac{gn_0 \xi_0^2}{2aV_0} + \frac{2\xi_0^3}{a^3} - \frac{2gn_0 \xi_0^3}{a^2 V_0}, \quad (92)$$

$$\frac{E_{an}}{N_0 gn_0} \simeq 1 + \frac{4\xi_0}{3a} + \frac{2\xi_0^2}{a^2} + \frac{2\xi_0^3}{a^3}, \quad (93)$$

を得る。ここで、 $E_{sm(an)}$ は対称な (反対称な) 状態の平均場エネルギーである。

上で求めた、化学ポテンシャルの表式の (88) 式を (84) 式に、平均場エネルギーの表式の (92) 式と (93) 式を (83) 式に代入すると、障壁が強い ($V_0 \gg gn_0 \xi_0$) とときの E_J と E_C の表式を次のように得る。

$$\frac{E_J}{gn_0} \simeq \frac{N_0 gn_0 \xi_0^2}{4V_0 a} \left(1 + \frac{4\xi_0}{a} \right), \quad (94)$$

$$\frac{E_C}{gn_0} \simeq \frac{4}{N_0} \left(1 + \frac{\xi_0}{a} \right). \quad (95)$$

これらの関係式から、Josephson plasma エネルギーは

$$\frac{\varepsilon_{JP}}{gn_0} \simeq \sqrt{\frac{gn_0 \xi_0^2}{V_0 a}} \left(1 + \frac{5\xi_0}{2a} \right), \quad V_0 \gg gn_0 \xi_0, \quad (96)$$

となる。図 11 に、障壁の強さ V_0 の変化に対する Josephson plasma エネルギー ε_{JP} の変化の様子を示す。第 5.4 節で、障壁が十分に高いとき最低励起エネルギーがこの Josephson plasma エネルギーに一致することを確認する。

5.3 励起スペクトル

この節では、二重井戸型ポテンシャル中の凝縮体の励起スペクトルを計算する。問題を Bogoliubov 励起のトンネル問題に関する性質と関連付けて取り扱うために、考えている系を、 $-a < x \leq -\frac{a}{2}$ 、 $|x| < \frac{a}{2}$ 、 $\frac{a}{2} \leq x < a$ の3つの領域に分割する。分割したそれぞれの領域で Bogoliubov 方程式を解析的に解き、それぞれの解を滑らかに接続することによって、励起スペクトルを決定するための方程式を導出する。

まず、中央の領域 ($|x| < \frac{a}{2}$) において Bogoliubov 方程式を解こう。第3章でもとめた単一障壁問題に対する解析解 ($\psi^l(x)$ と $\psi^r(x)$) を用いて、中央の領域における Bogoliubov 方程式の一般解は次のようにあらわされる。

$$\psi(x) = \eta\psi^l(x) + \zeta\psi^r(x), \quad |x| < \frac{a}{2}. \quad (97)$$

左側 ($-a < x \leq -\frac{a}{2}$) と右側 ($\frac{a}{2} \leq x < a$) の領域においても、Bogoliubov 方程式の解析解を次のように得ることができる。

$$u^{\text{side}} = \sqrt{\frac{2\mu_{\text{sm}}}{\varepsilon}} \left[\left(1 + \frac{(p\xi_{\text{sm}})^2 \mu_{\text{sm}}}{2\hbar^2 \varepsilon} \right) \tanh\left(\frac{|x| - a}{\xi_{\text{sm}}}\right) \cos\left(\frac{p(|x| - a)}{\hbar}\right) + \frac{p\xi_{\text{sm}} \mu_{\text{sm}}}{2\hbar \varepsilon} \left(\frac{(p\xi_{\text{sm}})^2}{2\hbar^2} + 1 - \tanh^2\left(\frac{|x| - a}{\xi_{\text{sm}}}\right) + \frac{\varepsilon}{\mu_{\text{sm}}} \right) \sin\left(\frac{p(|x| - a)}{\hbar}\right) \right], \quad (98)$$

$$v^{\text{side}} = \sqrt{\frac{2\mu_{\text{sm}}}{\varepsilon}} \left[\left(1 - \frac{(p\xi_{\text{sm}})^2 \mu_{\text{sm}}}{2\hbar^2 \varepsilon} \right) \tanh\left(\frac{|x| - a}{\xi_{\text{sm}}}\right) \cos\left(\frac{p(|x| - a)}{\hbar}\right) - \frac{p\xi_{\text{sm}} \mu_{\text{sm}}}{2\hbar \varepsilon} \left(\frac{(p\xi_{\text{sm}})^2}{2\hbar^2} + 1 - \tanh^2\left(\frac{|x| - a}{\xi_{\text{sm}}}\right) - \frac{\varepsilon}{\mu_{\text{sm}}} \right) \sin\left(\frac{p(|x| - a)}{\hbar}\right) \right]. \quad (99)$$

二重井戸の端から離れたところでは、励起の波動関数である $\psi^{\text{side}} = (u^{\text{side}}, v^{\text{side}})^t$ は $\cos\left(\frac{p}{\hbar}(|x| - a)\right)$ に比例する。この形は、 $\sin\left(\frac{p}{\hbar}(|x| - a)\right)$ に比例している自由粒子の波動関数の形とは著しく異なる。

上で求めた解を用いて、全領域での解は次のように表される。

$$\psi(x) = \begin{cases} F\psi^{\text{side}}(x) & -a < x \leq -\frac{a}{2}, \\ \eta\psi^l(x) + \zeta\psi^r(x) & |x| < \frac{a}{2}, \\ G\psi^{\text{side}}(x) & \frac{a}{2} \leq x < a. \end{cases} \quad (100)$$

ここで、偶パリティの集団励起は $\eta = \zeta$ と $F = G$ を満たし、奇パリティの集団励起は $\eta = -\zeta$ and $F = -G$ を満たす。 $|x| = \frac{a}{2}$ において境界条件を課すことによって、解を滑らかに接続することができる。結果として、次のような励起スペクトルを決定する方程式を得る。

$$(r \pm t) \exp\left(i\left(\frac{2pa}{\hbar} + \gamma\right)\right) = 1. \quad (101)$$

ここで、

$$\gamma \equiv \tan^{-1}\left(\frac{-\hbar p \xi_{\text{sm}}}{\hbar^2 - \frac{1}{4}(p\xi_{\text{sm}})^2}\right), \quad (102)$$

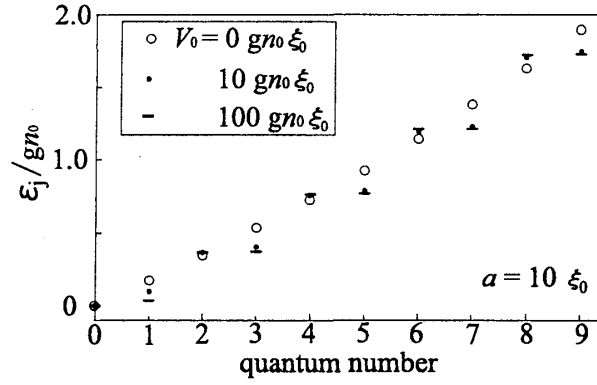


図 12: 二重井戸型ポテンシャル中の凝縮体の励起スペクトル。井戸のサイズを $a = 10\xi_0$ としている。白丸、黒丸、横棒がそれぞれ $V_0 = 0$ 、 $V_0 = 10$ 、 $V_0 = 100$ に対応している。

である。(101) 式において、正符号は偶パリティの励起を表し、負符号は奇パリティの励起を表す。(101) 式から、Bogoliubov 励起のトンネル問題に関する性質、つまり透過振幅 t と反射振幅 r が明らかに励起スペクトルに影響していることが見て取れる。透過振幅と反射振幅が (61) 式と (62) 式で与えられる関係を持つことから、次の関係が簡単にもとまる。

$$|r \pm t| = 1. \quad (103)$$

(103) 式を用いて、(101) 式を変形すると、

$$\frac{2pa}{\hbar} + \gamma + \phi_{\pm} = 2\pi n, \quad (104)$$

を得る。ここで、 $\phi_{\pm}$ は $r \pm t$ の位相である。また、 n が量子数を与える整数であることから、励起スペクトルが離散的になっていることがわかる。

(104) 式を励起エネルギー ϵ に関して解くと、図 12 のように励起スペクトルが得られる。偶数の量子数は偶パリティの励起に対応し、奇数の量子数は奇パリティの励起に対応する。障壁が強い極限、 $V_0 \rightarrow \infty$ では、系は完全に 2 つの独立な単一井戸になってしまうので、 $2l$ の量子数を持つ偶パリティの励起と $2l+1$ の量子数を持つ奇パリティの励起は縮退するようになる。このため、障壁が大きくなるにつれて、 $2l$ と $2l+1$ の量子数の励起が近づいていくように、偶パリティの励起エネルギーは増加し、奇パリティの励起エネルギーは減少する。また、障壁の強さが大きくなるとき、偶パリティの励起の変化よりも奇パリティの励起の変化のほうが目立っている。このような傾向は調和振動子的な閉じ込めを持つ二重井戸型ポテンシャルの場合における結果と定性的に同様である [36]。また、励起エネルギーが小さいほど、障壁の強さの増加に伴う変化が緩やかになっていることも見て取れる。このことは、低エネルギー励起に対して現れる anomalous tunneling という性質が障壁の影響を和らげていることを示唆している。次の節で、最低エネルギー励起に対する anomalous tunneling の影響について考察する。

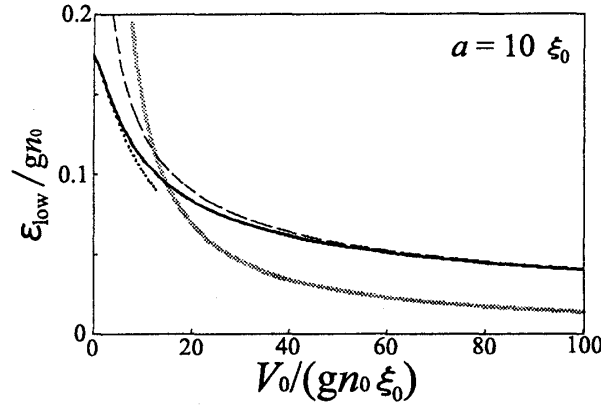


図 13: 実線は $a = 10\xi_0$ に対する最低励起エネルギーを V_0 の関数として表す。点線は (105) 式の補正された二重極モードのエネルギーを表し、破線は図 11 に表されている Josephson plasma エネルギーである。灰色の実線はトンネル確率 $|t|^2$ のピークの半値幅を表す。

5.4 最低エネルギー励起

奇パリティを仮定し、 $n = 0$ を代入して (104) 式を励起エネルギーについて解くと、最低励起エネルギー ε_{low} が求まる。図 13 の実線で、最低励起エネルギーを障壁の強さの関数として表す。最低エネルギー励起に対する anomalous tunneling の影響を明らかにするために、最低励起エネルギーを二つの極限で解析的に表記しよう。

関係式 $\frac{gn_0\xi_0}{V_0} \gg \frac{\xi_0}{a}$ が成立するほど障壁が十分弱いとき、透過係数の低エネルギー展開式、(42) 式と (43) 式を代入して、

$$\frac{\varepsilon_{\text{low}}}{gn_0} \simeq \frac{\pi\xi_0}{2a} \left(1 + \frac{\xi_0}{a} \left(\frac{3}{2} - \frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{V_0^2 + 4(gn_0\xi_0)^2} - V_0}{4gn_0\xi_0}} \right) \right), \quad (105)$$

を得る。これは、図 13 の点線で表される。(105) 式で最低エネルギー励起に対する補正が $O(\frac{\xi_0}{a})$ の微小項の中に繰り込まれていることから、障壁ポテンシャルの最低エネルギー励起に対する影響は比較的小さいことがわかる。一方、関係式 $\frac{gn_0\xi_0}{V_0} \ll \frac{\xi_0}{a}$ が成立するほど障壁が十分強いとき、反射係数と透過係数の近似的な表式、(38) 式と (40) 式を使って、

$$\frac{\varepsilon_{\text{low}}}{gn_0} \simeq \sqrt{\frac{gn_0\xi_0^2}{V_0a}} \left(1 + \frac{5\xi_0}{2a} \right), \quad (106)$$

を得る。このエネルギーは、第 5.2 節で求めた Josephson plasma エネルギーと一致する。この結果から、明らかに障壁が十分に強いときに二状態近似を用いた Josephson plasma 振動の取り扱いが妥当だといえる。図 13 の破線が Josephson plasma エネルギーを表していて、二重極モードから Josephson plasma モードへのクロスオーバーが起こっていることが明確に見て取れる。

最低エネルギー励起が二重極モードであるか Josephson plasma モードであるかを決定しているのは、 $\frac{gn_0\xi_0}{a}$ と $\frac{(gn_0)^2\xi_0}{V_0}$ という二つのエネルギースケールである。前者は二重極モードのエネ

ルギーと同程度の大きさである。後者は anomalous tunneling の半値幅と同程度の大きさであり、換言すると、 $\frac{(gn_0)^2\xi_0}{V_0}$ よりも小さいエネルギーの励起によってポテンシャル障壁はほとんど透明である。クロスオーバーは、最低エネルギー励起によって anomalous tunneling が効いているかいないかによって決まる。関係式 $\frac{\xi_0}{a} \ll \frac{gn_0\xi_0}{V_0}$ が成り立つとき、anomalous tunneling が効いているため最低エネルギー励起は障壁をほとんど感じる事がなく、二重極モードからほとんど変化を受けない。対照的に、関係式 $\frac{\xi_0}{a} \gg \frac{gn_0\xi_0}{V_0}$ が成り立つとき、anomalous tunneling からの寄与はなくなってしまうので、最低エネルギー励起は障壁の影響を著しく感じるようになり、結果として Josephson plasma モードになる。図 13 で、トンネル確率のピークの半値幅を表している灰色の実線が明らかに最低エネルギー励起が二重極モードである領域と Josephson plasma モードである領域を分断していて、この結果が上述のクロスオーバーの解釈を支持している。

関係式 $\frac{\xi_0}{a} \ll \frac{gn_0\xi_0}{V_0} \ll 1$ を満たすような障壁の高さの場合を考えよう。このとき、最低エネルギー励起は (105) 式で表されるような二重極モードであり、トンネル確率のピークは $\frac{gn_0\xi_0}{V_0}$ 程度の半値幅 $\Delta\varepsilon$ を持つ。最低エネルギー励起の周期 $\tau_{\text{low}} = \frac{2\pi\hbar}{\varepsilon_{\text{low}}}$ は、

$$\begin{aligned}\tau_{\text{low}} &\simeq \frac{\hbar}{gn_0} \left(\frac{4a}{\xi_0} + \frac{4V_0}{gn_0\xi_0} \right) \\ &\simeq \tau_{\text{dipole}} + \tau_{\text{corr}},\end{aligned}\tag{107}$$

と表される。ここで、 τ_{dipole} は二重極モードの周期であり、 τ_{corr} は障壁による補正である。一種の共鳴トンネルである anomalous tunneling に伴って寿命 $\tau_{\text{qb}} \sim \frac{\hbar}{\Delta\varepsilon}$ を持つ準束縛状態が存在すると想定すると、 τ_{corr} はその準束縛状態の寿命と同程度の時間スケールである。つまり、最低エネルギー励起の周期の遅れが準束縛状態の存在に起因するという解釈が可能である。この意味で、最低励起エネルギーの減少は、Kagan らが主張している anomalous tunneling に伴う準束縛状態の存在を示唆している。

6 総括と展望

本論文では、1) 一次元周期ポテンシャル中で、2) 二重井戸型ポテンシャル中で、anomalous tunneling と関連付けながらボース凝縮体の素励起について研究してきた。

1) においては、Kronig-Penney ポテンシャル中における励起スペクトルのバンド構造を調べた。単一障壁問題で得られた Bogoliubov 方程式の解析解を Bloch の定理を使って接続し、Kronig-Penney ポテンシャル中の Bogoliubov 方程式を解析的に解いた。結果として、励起エネルギーと結晶運動量を関係付ける方程式を得て、その方程式を解き、励起スペクトルのバンド構造を求めた。あらゆる深さの格子に対して低エネルギーの励起が音波分散になる原因が anomalous tunneling にあることを明らかにした。

本論文での計算では、凝縮体に超流動流がない場合のみを扱ったが、周期ポテンシャル中を大きな速度で流れているボース凝縮体が不安定性を示して崩壊してしまうことがこれまでの実験理論両方の研究で明らかにされている [25, 27, 38, 39]。この不安定性は、素励起のエネルギーが正であるか負であるか (Landau 不安定性)、もしくは実数であるか虚数であるか (動的不安定

性)を調べることで議論できるので、Kronig-Penney モデルを用いて解析すれば、anomalous tunneling という観点から超流動の崩壊を議論できるかもしれない。そのようなことを念頭に、今後はこれまでの研究を凝縮体が流れを持つ場合に拡張していくつもりである。

2) においては、箱型の二重井戸型ポテンシャル中における凝縮体の集団励起を解析的に調べた。Gross-Pitaevskii 方程式を解いて Josephson plasma エネルギーを求め、Bogoliubov 方程式を解いて励起スペクトルを解析した。凝縮体を分断している障壁ポテンシャルが強くなるにつれて、最低エネルギー励起が二重極モードから Josephson plasma モードにクロスオーバーすることがわかった。このクロスオーバーの物理的解釈を anomalous tunneling の観点から調べ、anomalous tunneling が効いているかいないかがクロスオーバーが起こる障壁の高さを決めていることを明らかにした。

本論文の計算では、絶対零度の場合のみを取り扱ったが、有限温度では熱的に励起された成分が凝縮体の集団運動の摩擦として作用するために、Josephson plasma 振動の減衰などの散逸的な振る舞いが起こることが予言されている [8]。今後は、これまでの計算を有限温度に拡張し、集団励起の減衰と anomalous tunneling の関係を議論していくつもりである。

謝辞

指導教官である栗原教授には卒業研究から 3 年間に渡って御指導していただきました。日常的な議論の中で私の物理的なものの見方と低温物理学に対する興味を深めてくれたことに、心から感謝します。

栗原研究室のメンバーの皆様には、研究に関することも含めて日頃から挙げたらきりがなくらいお世話になっています。彼らのおかげで、不必要なストレスを感じずに修論研究に打ち込めたことを感謝します。特に、土屋俊二さんと余越伸彦さんとの共同研究を通しての議論の中でこの修論が完成に至りました。いつも気軽に議論に応じてくれてありがとうございます。

木村敬さんと二国徹郎さんには、研究が行き詰ったときに貴重なアドバイスを頂きました。この場を借りてお礼申し上げます。

参考文献

- [1] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Science* **269**, 198 (1995).
- [2] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969 (1995).
- [3] L. P. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Oxford University Press, Oxford, 2003).
- [4] A. J. Leggett, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 307 (2001).

- [5] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).
- [6] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn and W. Ketterle, *Science* **275**, 637 (1997).
- [7] A. Smerzi, S. Fantoni, S. Giovanazzi, and S. R. Shenoy, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4950 (1997).
- [8] F. Meier and W. Zwerger, *Phys. Rev. A* **64**, 033610 (2001).
- [9] M. Albiez, R. Gati, J. Fölling, S. Hunsmann, M. Cristiani, and M. K. Oberthaler, *cond-mat/0411757* (2004).
- [10] D. S. Jin, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 420 (1996).
- [11] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee, C. G. Townsend, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 988 (1996).
- [12] J. Steinhauer, R. Ozeri, N. Katz, and N. Davidson, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 120407 (2002);
- [13] Yu. Kagan, D. L. Kovrizhin, and L. A. Maksimov, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 130402 (2003).
- [14] P. A. Ruprecht, M. Edwards, K. Burnett, and C. W. Clark, *Phys. Rev. A* **54**, 4178 (1996).
- [15] A. Griffin, *cond-mat/9901172* (1999).
- [16] A. L. Fetter, *Ann. Phys. (N. Y.)* **70**, 67 (1972).
- [17] F. S. Cataliotti, S. Burger, C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi, A. Trombettoni, A. Smerzi, and M. Inguscio, *Science* **293**, 843 (2001).
- [18] C. Fort, F. S. Cataliotti, L. Fallani, F. Ferlaino, P. Maddaloni, and M. Inguscio, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 140405 (2003).
- [19] M. Krämer, L. Pitaevskii, and S. Stringari, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 180404 (2002).
- [20] T. Stöferle, H. Moritz, C. Schori, M. Köhn, and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 130403 (2004).
- [21] C. Schori, T. Stöferle, H. Moritz, M. Köhn, and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 240402 (2004).
- [22] M. Krämer, C. Tozzo, and F. Dalfovo, *cond-mat/0410122* (2004).
- [23] K. Berg-Sørensen and K. Mølmer, *Phys. Rev. A* **58**, 1480 (1998).
- [24] M. Ichioka and K. Machida, *J. Phys. Soc. Jpn.* **72**, 2137 (2003).

- [25] B. Wu and Q. Niu, Phys. Rev. A **64**, 061603 (2001).
- [26] J. Javanainen, Phys. Rev. A **60**, 4902 (1999).
- [27] A. Smerzi and A. Trombettoni, Phys. Rev. A **68**, 023613 (2003).
- [28] M. Krämer, C. Menotti, L. Pitaevskii, and S. Stringari, Eur. Phys. J. D **27**, 247 (2003).
- [29] S. Tsuchiya and A. Griffin, Phys. Rev. A **70**, 023611 (2004)
- [30] E. Taylor and E. Zaremba, Phys. Rev. A **68**, 053611 (2003).
- [31] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics* (Harcourt, Fort Worth, 1976), pg. 146.
- [32] W.-D. Li and A. Smerzi, Phys. Rev. E **70**, 016605 (2004).
- [33] B. T. Seaman, L. D. Carr, and M. J. Holland, cond-mat/0410347 (2004).
- [34] B. D. Josephson, Phys. Lett. **1**, 251 (1962).
- [35] M. Saba, T. A. Pasquini, C. Sanner, Y. Shin, W. Ketterle, and D. E. Pritchard, Science **307**, 1945 (2005).
- [36] L. Salasnich, A. Parola, and L. Reatto, Phys. Rev. A **60**, 4171 (1999).
- [37] B.T. Seaman, L. D. Carr, and M. J. Holland, Phys. Rev. A **71**, 033609 (2005).
- [38] S. Burger, F. S. Cataliotti, C. Fort, F. Minardi, M. Inguscio, M. L. Chiofalo, and M. P. Tosi, Phys. Rev. Lett. **86**, 4447 (2001).
- [39] L. Fallani, L. De Sarlo, J.E. Lye, M. Modugno, R. Saers, C. Fort, and M. Inguscio, Phys. Rev. Lett. **93**, 140406 (2004).