

A note on continuity of grafting maps

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 糸 健太郎 (Kentaro Ito)
Graduate School of Mathematics,
Nagoya University

1 Abstract

曲面 S 上の射影構造空間 $P(S)$ において, 擬フックス群ホロノミーを持つ元から成る部分集合を $Q(S)$ は無限個の連結成分 $\{Q_\lambda\}_{\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbb{Z}}(S)}$ を持つ. ここではまず, 連結成分の閉包が互いに接している様子を説明する. 次に grafting map (接ぎ木写像) $\text{Gr}_\lambda: Q_0 \rightarrow Q_\lambda$ が Q_0 のある種の理想境界にまで連続に延びることや, 擬フックス群に関する Goldman's Grafting Theorem が任意の b -group においても成り立つことを示す.

2 Preliminaries

S を向き付けられた種数 2 以上の閉曲面とする. S 上の射影構造とは $(\text{PSL}_2(\mathbb{C}), \hat{\mathbb{C}})$ -構造, すなわち局所的に $\hat{\mathbb{C}}$ をモデルとし, その張り合わせ写像が Möbius 写像であるような極大局所座標系のことである. S 上の marking 込みの射影構造全体の空間 $P(S)$ は Teichmüller 空間 $T(S)$ の正則余接バンドル $T^*T(S)$ と同一視でき, 複素 $6g-6$ 次元多様体である.

$\Sigma \in P(S)$ に対して, Σ の普遍被覆 $\tilde{\Sigma}$ 上で developing map (展開写像) $f_\Sigma: \tilde{\Sigma} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ が定まり, この写像が誘導する準同型 $\rho_\Sigma: \pi_1(S) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ をホロノミー表現という. すなわち, $f_\Sigma \circ \gamma = \rho_\Sigma(\gamma) \circ f_\Sigma$ ($\forall \gamma \in \pi_1(S)$) が成り立つ. ここで

$$R(S) = \{[\rho] \mid \rho(\pi_1(S)) : \text{non-abelian}\} \subset \text{Hom}(\pi_1(S), \text{PSL}_2(\mathbb{C}))/\text{PSL}_2(\mathbb{C})$$

と定めると, $R(S)$ は複素 $6g-6$ 次元多様体となることが知られている. また $\forall \Sigma \in P(S)$ に対して $[\rho_\Sigma] \in R(S)$ であり, 対応 $\Sigma \mapsto [\rho_\Sigma]$ によりホロノミー写像

$$\text{hol}: P(S) \rightarrow R(S)$$

を定めると, これは局所同相な正則写像である (Hejhal).

$R(S)$ の部分集合

$$QF(S) = \{[\rho] \in R(S) \mid \rho : \text{faithful}, \rho(\pi_1(S)) : \text{quasi-fuchsian}\}$$

を quasi-fuchsian space という. $\overline{QF(S)} \subset AH(S) \subset R(S)$ である. また $QF(S)$ は Teichmüller space の直積 $T(S) \times T(S^*)$ と自然に同一視される. 以下では, 主に

$P(S)$ の部分集合 $Q(S) = \text{hol}^{-1}(QF(S))$ を考察する. $Q(S)$ の任意の連結成分 Q に対して $\text{hol}|_Q : Q \rightarrow QF(S)$ は双正則写像である. さらに Goldman's Grafting Theorem [Go] より, $Q(S)$ の連結成分全体は integral measured lamination の集合 $\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ と 1 対 1 対応がつくことがわかる. ここで

$$\mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S) = \{\lambda = \sum k_j C_j \mid k_j \in \mathbf{N}, \{C_j\} : \text{disjoint s.c.c.}\}.$$

$\Sigma \in Q(S)$ は f_{Σ} が単射であるとき standard, そうでないとき exotic という. いま $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対応する $Q(S)$ の連結成分を Q_{λ} と書くと, $Q(S)$ の連結成分分解

$$Q(S) = \bigsqcup_{\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)} Q_{\lambda}$$

を得る. ここで Q_0 は standard な射影構造より成る唯一の連結成分である. 双正則写像 $\text{Gr}_{\lambda} : Q_0 \rightarrow Q_{\lambda}$ で $\text{hol} \circ \text{Gr}_{\lambda} = \text{hol}$ を満たすものを λ に関する grafting map という. $\Sigma \in Q_0$ に対して $\Sigma_{\lambda} = \text{Gr}_{\lambda}(\Sigma)$ とかく.

3 これまでの結果

Q_{λ} の $P(S)$ における閉包を $\overline{Q_{\lambda}}$ とかく. 次の定理は McMullen の結果 [Mc] を精密化したものである.

Theorem 3.1 ([It1]). 任意の $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S) - \{0\}$ に対して $\overline{Q_0} \cap \overline{Q_{\lambda}} \neq \emptyset$ が成り立つ. さらに $i(\cdot, \cdot)$ を幾何的交点数とすると, 任意の有限集合 $\{\lambda_i\}_{i=1}^m \subset \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S) - \{0\}$ で $i(\lambda_j, \lambda_k) = 0$ ($\forall j, k$) を満たすものに対して, 次が成り立つ:

$$\overline{Q_0} \cap \left(\bigcap_{i=1}^m \overline{Q_{\lambda_i}} \right) \neq \emptyset.$$

Theorem 3.2 ([It2]). $\lambda, \mu \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S) - \{0\}$ は平行成分を持たないとする. このとき, $(\lambda, \mu)_{\#}, (\lambda, \mu)_{\flat} \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ と, 射影構造の列 $\{\Sigma_n\}_{n \in \mathbf{Z}}, \{\Sigma'_n\}_{n \in \mathbf{Z}} \subset Q(S)$ が存在して次を満たす (図 1 参照):

- (1) $\{\Sigma_n\}_{|n| \gg 0} \subset Q_{\lambda}$ $\Sigma_n \rightarrow \Sigma \in \overline{Q_0} \cap \overline{Q_{\lambda}}$ as $|n| \rightarrow \infty$,
- (2) $\{\Sigma'_n\}_{n \gg 0} \subset Q_{(\lambda, \mu)_{\#}}, \{\Sigma'_n\}_{n \ll 0} \subset Q_{(\lambda, \mu)_{\flat}}$ かつ $\Sigma'_n \rightarrow \Sigma' \in \overline{Q_{\mu}}$ as $|n| \rightarrow \infty$,
- (3) $\text{hol}(\Sigma_n) = \text{hol}(\Sigma'_n)$ ($\forall |n| \gg 0$) かつ $\text{hol}(\Sigma) = \text{hol}(\Sigma')$.

Corollary 3.3 ([It2]). 任意の $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S) - \{0\}$ に対して Q_{λ} は self-bump する. すなわち, ある $\Sigma \in \overline{Q_0} \cap \overline{Q_{\lambda}}$ が存在して, Σ の十分小さな任意の近傍 U に対して $U \cap Q_{\lambda}$ は非連結である.

Theorem 3.4 ([It2]). 任意の $\lambda, \mu \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対して $\overline{Q_{\lambda}} \cap \overline{Q_{\mu}} \neq \emptyset$.

ここで $(\lambda, \mu)_{\#}, (\lambda, \mu)_{\flat} \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ は, まず λ と μ を重みの分だけ平行な曲線で実現し, 次に $\lambda \cup \mu$ をジグザグにたどっていくことで構成される. 図 2, 図 3 を参照. ここで $(\lambda, \mu)_{\#} \neq (\lambda, \mu)_{\flat} \Leftrightarrow i(\lambda, \mu) \neq 0$ である.

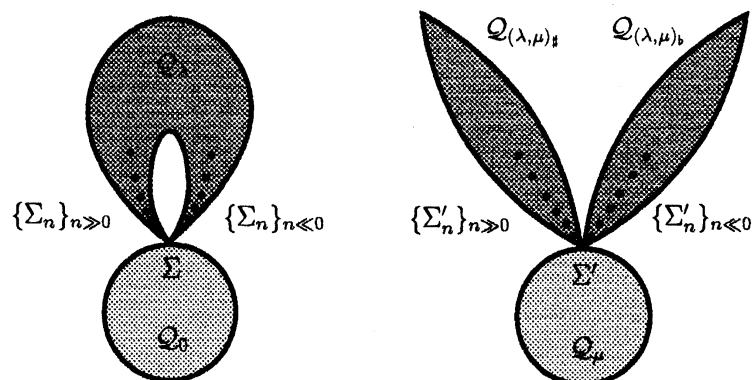


図 1: Theorem 3.2 の説明 ($i(\lambda, \mu) \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda, \mu)_\# \neq (\lambda, \mu)_b$ の場合)

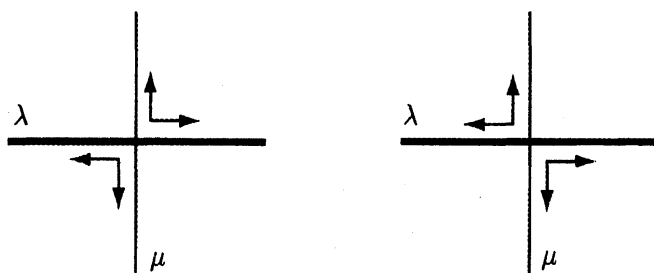


図 2: $(\lambda, \mu)_\#$ (左) と $(\lambda, \mu)_b$ (右)

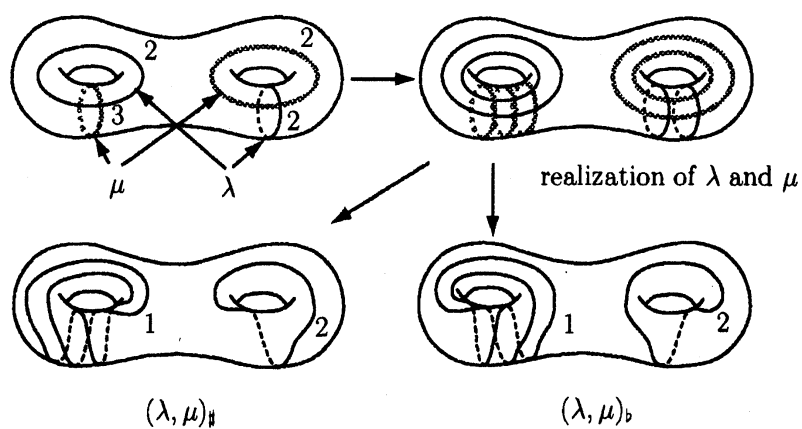


図 3: $(\lambda, \mu)_\#$ と $(\lambda, \mu)_b$ の例

4 今回の結果

4.1 $\hat{P}(S)$ の定義

ここで $P(S)$ を少し膨らました集合 $\hat{P}(S)$ を定義する. まず, 任意の $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対して $\widehat{Q}_\lambda(\supset Q_\lambda)$ を

$$\widehat{Q}_\lambda = \left\{ \{\Sigma_n\}_{n=1}^\infty \subset Q_\lambda \mid \exists \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{\Sigma_n} \in \overline{QF(S)} \right\} / \sim$$

と定める. ここで $\{\Sigma_n\}_{n=1}^\infty \sim \{\Sigma'_n\}_{n=1}^\infty \Leftrightarrow \lim \rho_{\Sigma_n} = \lim \rho_{\Sigma'_n}$ とする. 次に $\overline{\widehat{Q}_\lambda} \subset \widehat{Q}_\lambda$ を定義する. すなわち $\{\Sigma_n\}_{n=1}^\infty \in \widehat{Q}_\lambda$ が $\{\Sigma_n\}_{n=1}^\infty \in \overline{\widehat{Q}_\lambda}$ であるとは, 次の条件を満たすときをいう:

- (1) $\lim \Sigma_n \in P(S)$, または
- (2) $\lim \Sigma_n = \infty$ かつ
 - (a) $\exists K^* \subset T(S^*) : \text{compact s.t. } \{\rho_{\Sigma_n}\} \subset T(S) \times K^*$, または
 - (b) $\exists K \subset T(S) : \text{compact s.t. } \{\rho_{\Sigma_n}\} \subset K \times T(S^*)$.

(1) より $\overline{\widehat{Q}_\lambda} \subset \overline{\widehat{Q}_\lambda}$ であり, (2-a) より $\rho = \lim \rho_{\Sigma_n} \in \partial^+ QF(S)$, (2-b) より $\rho = \lim \rho_{\Sigma_n} \in \partial^- QF(S)$ である. $\Sigma = \{\Sigma_n\}_{n=1}^\infty \in \overline{\widehat{Q}_\lambda}$ に対して $\rho_\Sigma = \lim \rho_{\Sigma_n}$ と定める. これにより $\text{hol} : \widehat{Q}_\lambda \rightarrow R(S)$ は $\text{hol} : \overline{\widehat{Q}_\lambda} \rightarrow R(S)$ に拡張される. $\overline{\widehat{Q}_\lambda}$ には $R(S)$ の位相を $\text{hol} : \overline{\widehat{Q}_\lambda} \rightarrow R(S)$ によって引き戻した位相を入れる. さて, $P(S)$ と $\left\{ \overline{\widehat{Q}_\lambda} \right\}_{\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)}$ の disjoint union から $\hat{P}(S)$ を次のように定める:

$$\hat{P}(S) = P(S) \sqcup \left(\bigsqcup_{\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)} \overline{\widehat{Q}_\lambda} \right) / \sim,$$

ここで $\sim$ は $\overline{\widehat{Q}_\lambda} \subset P(S)$ と $\overline{\widehat{Q}_\lambda} \subset \overline{\widehat{Q}_\lambda}$ を同一視することを意味する. すると $\text{hol} : P(S) \rightarrow R(S)$ は $\hat{P}(S)$ にまで連続拡張でき, これも $\text{hol} : \hat{P}(S) \rightarrow R(S)$ とかく. また, 以下では次の記号を用いる:

$$\begin{aligned} \partial Q_\lambda &= \overline{\widehat{Q}_\lambda} - Q_\lambda, \\ \partial^+ Q_\lambda &= \{\Sigma \in \partial Q_\lambda \mid \rho_\Sigma \in \partial^+ QF(S)\}, \\ \partial^- Q_\lambda &= \{\Sigma \in \partial Q_\lambda \mid \rho_\Sigma \in \partial^- QF(S)\}. \end{aligned}$$

4.2 Discrete property

以下の Theorem 4.2 (Discrete property) の証明において, 次の補題が本質的である.

Lemma 4.1. R を完備双曲曲面で $\text{Area}(R) < \infty$ とする. 円環 $A \subset R$ の core curve の homotopy class を α , その双曲的長さを $l_R(\alpha)$ と書く. このとき

$$\text{Mod}(A) l_R(\alpha) \leq \sqrt{\text{Area}(R) \text{Mod}(A)}$$

が成り立つ.

Remark. 以下で必要な事実は「 $\text{Mod}(A) \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Mod}(A) l_R(\alpha) \rightarrow 0$ 」である. 当初用いていた評価式はより複雑であり, 上の評価式は松崎氏に教えて頂いた.

Proof. $E_R(\alpha)$ を R における α の extremal length とすると, 次の 2 式

$$E_R(\alpha) = \sup_{\rho} \frac{(\inf_{\alpha'} \int_{\alpha'} \rho(z) |dz|)^2}{\int \int \rho(z)^2 |dz|^2} \geq \frac{(l_R(\alpha))^2}{\text{Area}(R)},$$

$$E_R(\alpha) = \frac{1}{\sup_{A' \subset R} \text{Mod}(A')} \leq \frac{1}{\text{Mod}(A)}$$

が成り立つので

$$\text{Mod}(A) (l_R(\alpha))^2 \leq \text{Area}(R) \Leftrightarrow \text{Mod}(A) l_R(\alpha) \leq \sqrt{\text{Area}(R) \text{Mod}(A)}.$$

□

Theorem 4.2 (Discrete property). $\rho \in \partial^{\pm} QF(S)$ に対して $\Sigma \in \partial^{\pm} \mathcal{Q}_0$ s.t. $\rho_{\Sigma} = \rho$ をとる. いま, 任意の収束列 $\mathcal{Q}_0 \ni \Sigma_n \rightarrow \Sigma \in \partial^{\pm} \mathcal{Q}_0$ と, 異なる元からなる任意の無限列 $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{ML}_{\mathbf{Z}}(S)$ に対して, $\{\text{Gr}_{\lambda_n}(\Sigma_n)\}$ は $P(S)$ に集積点を持たない.

Proof. $(\Sigma_n)_{\lambda_n} = \text{Gr}_{\lambda_n}(\Sigma_n)$ と書き, 射影 $\pi : P(S) \rightarrow T(S)$ による像を $X_n = \pi((\Sigma_n)_{\lambda_n})$ と書く. このとき $T(S)$ において $X_n \rightarrow \infty$ を示す. λ_n が重さ 1 の単純閉曲線の場合のみを考えればよいことは容易に分かる. このとき $\lambda_n = \alpha_n$ と書く.

$QF(S) = T(S) \times T(S^*)$ において, $B_X = \{X\} \times T(S^*)$, $B_Y^* = T(S) \times \{Y\}$ などと表す. $B_X \ni \rho_n \rightarrow \rho \in \partial B_X$ または $B_Y^* \ni \rho_n \rightarrow \rho \in \partial B_Y^*$ と仮定してよい. いま, $B_X \ni \rho_n \rightarrow \rho \in \partial B_X$ の場合を考える. Fuchsian 表現 $\rho_0 \in B_X$ を 1 つとり, 対応する $\Sigma_0 \in \mathcal{Q}_0$ s.t. $\rho_{\Sigma_0} = \rho_0$ をとる. このとき $X = \pi(\Sigma_0)$ である. ρ_n は ρ_0 の下半平面 $\mathbf{H}^*$ のみの qc-変形 で得られる. それに対応して, Σ_n も Σ_0 の qc-変形 であり, $(\Sigma_n)_{\alpha_n}$ も $(\Sigma_0)_{\alpha_n}$ の qc-変形 である. ここで $(\Sigma_0)_{\alpha_n}$ は Σ_0 に, 底円の長さ $l_{X_0}(\alpha_n)$, 高さ 2π のユークリッド円環を挟み込んだものであり, その中で, $\mathbf{H}$ の引き戻しに対応する底円の長さ $l_{X_0}(\alpha_n)$, 高さ $\pi/2$ の 2 つの円環 (そのうちの 1 つを A_n と書く) は, qc-変形 $(\Sigma_0)_{\alpha_n} \rightarrow (\Sigma_n)_{\alpha_n}$ において等角に保たれる. 従って, 円環 A_n は $X_n = \pi((\Sigma_n)_{\alpha_n})$ に等角に埋め込まれている. いま $\text{Mod}(A_n) = \pi/2l_X(\alpha_n)$ なので, $n \rightarrow \infty$ とすると $l_X(\alpha_n) \rightarrow \infty$ より $\text{Mod}(A_n) \rightarrow 0$ となり, このとき Lemma 4.1 より $\text{Mod}(A_n) l_{X_n}(\alpha_n) = \frac{\pi l_{X_n}(\alpha_n)}{2l_X(\alpha_n)} \rightarrow 0$ である. 従って $d_{T(S)}(X, X_n) \rightarrow \infty$ がいえる.

同様に $B_Y^* \ni \rho_n \rightarrow \rho \in \partial B_Y^*$ の場合も, X_n に円環 A_n s.t. $\text{Mod}(A_n) = \pi/l_X(\alpha_n)$ が等角に埋め込まれていることがわかり, $X_n \rightarrow \infty$ が分かる. □

4.3 Continuous extension

$\Sigma \in \partial Q_0$, $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbb{Z}}(S)$ の組 (Σ, λ) が graftable であるとは、次を満たすときをいう：

- (1) $\forall \gamma \subset \text{supp } \lambda$ に対して $\rho_{\Sigma}(\gamma)$ は loxodromic,
- (2) $\Sigma \in \partial^- Q_0$ のとき, $\text{supp } \lambda$ は parabolic locus $p^+(\rho_{\Sigma})$ の任意の連結成分と交わる.

(Σ, λ) が graftable であるとき, 具体的に $\Sigma_{\lambda} = \text{Gr}_{\lambda}(\Sigma) \in P(S)$ s.t. $\text{hol}(\Sigma_{\lambda}) = \text{hol}(\Sigma)$ を構成することが出来る. 特に $\Sigma \in \partial^- Q_0$ の場合の構成は Bromberg [Br] による. しかし $\Sigma \in \partial Q_0$ に対して, (Σ, λ) が graftable である場合でも, Gr_{λ} の Σ における連続性は自明ではない. すなわち, 任意の収束列 $Q_0 \ni \Sigma_n \rightarrow \Sigma \in \partial Q_0$ に対して $(\Sigma_n)_{\lambda} \rightarrow \Sigma_{\lambda}$ が成り立つかどうかを考えたい.

Theorem 4.3 (Continuity). 任意の $\lambda \in \mathcal{ML}_{\mathbb{Z}}(S)$ に対して, $\text{Gr}_{\lambda} : Q_0 \rightarrow P(S)$ は, $\text{Gr}_{\lambda} : \overline{Q_0} \rightarrow \hat{P}(S)$ に連続拡張される.

Proof. $\Sigma \in \partial^{\pm} Q_0$ に対して, 任意の収束列 $Q_0 \ni \Sigma_n \rightarrow \Sigma$ を考える. $\rho_n = \rho_{\Sigma_n}$, $\rho = \rho_{\Sigma}$ とかくと $\rho_n \rightarrow \rho$ である.

まず (Σ, λ) が graftable の場合に $(\Sigma_n)_{\lambda} \rightarrow \Sigma_{\lambda} \in P(S)$ を示す. いま Σ の近傍 U から Σ_{λ} の近傍 V への同相写像 $\Phi_{\lambda} : U \rightarrow V$ で $\text{hol} \circ \Phi_{\lambda} = \text{hol}$ を満たすものが存在する. $\Phi_{\lambda}(\Sigma_n) \rightarrow \Sigma_{\lambda}$ であるから, $\Phi_{\lambda}(\Sigma_n) = (\Sigma_n)_{\lambda}$ がいえると良い. そのためには $\Phi_{\lambda}(\Sigma_n) \in Q_{\lambda}$ をいえば十分である. ここで $\Phi_{\lambda}(\Sigma_n) \in Q_{\lambda_n}$ ($\lambda_n \in \mathcal{ML}_{\mathbb{Z}}(S)$) であるとする. すると discrete property より $\lambda_n \in \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ ($n \gg 0$) となる.

いま $\Gamma_n = \text{Im } \rho_n$, $\Gamma = \text{Im } \rho$ とすると, (部分列を取れば) Γ_n は $\exists \hat{\Gamma} (\supset \Gamma)$ に幾何的収束し, その limit set $\Lambda(\Gamma_n)$ は $\Lambda(\hat{\Gamma})$ に Hausdorff 収束する. また $\Lambda(\Gamma_n)$ の引き戻し $\Lambda(\Phi_{\lambda}(\Sigma_n)) \subset \Phi_{\lambda}(\Sigma_n)$ は $\Lambda(\hat{\Gamma})$ の引き戻し $\hat{\Lambda}(\Sigma_{\lambda}) \subset \Sigma_{\lambda}$ に Hausdorff 収束する. ここで, その構成法から $\Lambda(\Gamma)$ の引き戻し $\Lambda(\Sigma_{\lambda}) \subset \Sigma_{\lambda}$ はよく分かり, [ACCS] の補題を持ちいれば $\hat{\Lambda}(\Sigma_{\lambda}) - \Lambda(\Sigma_{\lambda})$ の成分の可能性も制限できて, これより $\Lambda(\Phi_{\lambda}(\Sigma_n)) \subset \Phi_{\lambda}(\Sigma_n)$ の情報を得て, $\Phi_{\lambda}(\Sigma_n) \in Q_{\lambda}$ が分かる. この議論で, 有限性 $\lambda_n \in \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ ($n \gg 0$) が効いている.

次に (Σ, λ) が graftable でない場合を考える. まず $\Sigma_n \rightarrow \Sigma$ が強収束であれば $(\Sigma_n)_{\lambda} \rightarrow \exists \Sigma' \in \overline{Q_{\lambda}} - Q_{\lambda}$ となる. このとき, graftable の場合と同様の議論により, 任意の収束列 $Q_0 \ni \Sigma_n \rightarrow \Sigma$ に対して $(\Sigma_n)_{\lambda} \rightarrow \Sigma'$ を示すことができる. ここで $\Sigma_{\lambda} = \text{Gr}_{\lambda}(\Sigma) = \Sigma'$ と定める. $\square$

4.4 Grafting Theorem

以下で, ホロノミー写像は拡張したものの $\text{hol} : \hat{P}(S) \rightarrow R(S)$ とする.

Theorem 4.4 (Goldman's Grafting Theorem [Go]). 任意の $\rho \in QF(S)$ に対して $\Sigma \in \mathcal{Q}_0$ s.t. $\rho_\Sigma = \rho$ をとると, 次が成り立つ:

$$\text{hol}^{-1}(\rho) = \{\Sigma' \in \hat{P}(S) \mid \rho_{\Sigma'} = \rho\} = \{\text{Gr}_\lambda(\Sigma) \mid \lambda \in \mathcal{ML}_Z(S)\}.$$

特に $\text{hol}^{-1}(\rho) \subset P(S)$ である.

Theorem 4.5 (Grafting theorem for b -group). 任意の $\rho \in \partial^\pm QF(S)$ に対して $\Sigma \in \partial^\pm \mathcal{Q}_0$ s.t. $\rho_\Sigma = \rho$ をとると, 次が成り立つ:

$$\text{hol}^{-1}(\rho) = \{\Sigma' \in \hat{P}(S) \mid \rho_{\Sigma'} = \rho\} = \{\text{Gr}_\lambda(\Sigma) \mid \lambda \in \mathcal{ML}_Z(S)\}.$$

特に $\text{hol}^{-1}(\rho) \cap P(S)$ に関しては次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \text{hol}^{-1}(\rho) \cap P(S) &= \{\Sigma' \in P(S) \mid \rho_{\Sigma'} = \rho\} \\ &= \{\text{Gr}_\lambda(\Sigma) \mid (\Sigma, \lambda) : \text{graftable}\}. \end{aligned}$$

Remark. この結果は Bromberg's Conjecture [Br] の肯定的解決を含む.

Proof. $\rho \in \partial^\pm QF(S)$ を固定する. 任意の $\Sigma' \in \hat{P}(S)$ s.t. $\text{hol}(\Sigma') = \rho$ に対して, ある $\lambda \in \mathcal{ML}_Z(S)$ が存在して $\Sigma' = \Sigma_\lambda$ となることを示す.

もし $\Sigma' \in \hat{P}(S) - P(S)$ ならば, ある $\lambda \in \mathcal{ML}_Z(S)$ が存在して $\Sigma' \in \overline{\mathcal{Q}_\lambda} - \mathcal{Q}_\lambda$ である. このとき, 定義より収束列 $\{\Sigma'_n\} \subset \mathcal{Q}_\lambda$, $\Sigma'_n \rightarrow \Sigma'$ が存在して, $\{\rho_n = \rho_{\Sigma'_n}\} \subset (T(S) \times K^*) \cup (K \times T(S^*))$ かつ $\rho_n \rightarrow \rho$ が成り立つ. 一方で $\mathcal{Q}_0$ 中の収束列 $\mathcal{Q}_0 \ni \Sigma_n \rightarrow \Sigma \in \partial^\pm \mathcal{Q}_0$ s.t. $\rho_{\Sigma_n} = \rho_n$ を取る. このとき $\Sigma'_n = (\Sigma_n)_\lambda$ が成り立つので, 連続性から $\Sigma' = \Sigma_\lambda$ がいえる.

次に $\Sigma' \in P(S)$ とする. まず $\rho_n \rightarrow \rho$ となる $\{\rho_n\}$ を $(T(S) \times K^*) \cup (K \times T(S^*))$ の中にとる. hol の局所同相性より $\mathcal{Q}_0 \ni \exists \Sigma_n \rightarrow \exists \Sigma \in \partial^\pm \mathcal{Q}_0$ s.t. $\text{hol}(\Sigma_n) = \rho_n$ かつ $\exists \Sigma'_n \rightarrow \Sigma'$ s.t. $\text{hol}(\Sigma'_n) = \rho_n$. いま $\Sigma'_n \in \mathcal{Q}_{\lambda_n}$ とすると discrete property より $\lambda_n \in \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$ ($n \gg 0$) となる. 部分列を取って $\lambda_n \equiv \mu$ としてよい. このとき $\Sigma'_n = (\Sigma_n)_\mu$ で, $\Sigma'_n \rightarrow \Sigma'$ と $(\Sigma_n)_\mu \rightarrow \Sigma_\mu$ (連続性) より $\Sigma' = \Sigma_\mu$ がいえる. $\square$

4.5 An additional observation

$R(S)$ は多様体であり, その普遍被覆を $\tilde{R}(S)$ とかく. このとき $\text{hol} : P(S) \rightarrow R(S)$ の持ち上げ $\tilde{\text{hol}} : P(S) \rightarrow \tilde{R}(S)$ が存在する. 明らかに $\tilde{\text{hol}}$ は immersion である.

Proposition 4.6. $\tilde{\text{hol}} : P(S) \rightarrow \tilde{R}(S)$ は embedding ではない.

このことは Theorem 3.2 より分かる. 従って $QF(S)$ の自分自身への巻き付き (self-bumping) は, $\tilde{R}(S)$ に持ち上げるより $P(S)$ に持ち上げた方が, より「ほどけている」ことが分かる.

参考文献

- [AC] J. W. Anderson and R. D. Canary, *Algebraic limits of Kleinian groups which rearrange the pages of a book*, Invent. Math. **126** (1996), 205–214.
- [ACCS] J. W. Anderson, R. D. Canary, M. Culler and P.B. Shalen, *Free Kleinian groups and volumes of hyperbolic 3-manifolds*, J. Diff. Geom. **44** (1996), 738–782.
- [Br] K. Bromberg, *Projective structures with degenerate holonomy and the Bers' density conjecture*, preprint 2002.
- [Go] W. M. Goldman, *Projective structures with Fuchsian holonomy*, J. Diff. Geom. **25** (1987), 297–326.
- [It1] K. Ito, *Exotic projective structures and quasi-Fuchsian space*, Duke Math. J. **105** (2000), 185–209.
- [It2] K. Ito, *Exotic projective structures and quasi-fuchsian spaces II*, preprint 2003. <http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~itoken/index.html>
- [It3] K. Ito, *On continuous extension of grafting maps*, in preparation.
- [Mc] C. T. McMullen, *Complex earthquakes and Teichmüller theory*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), 283–320.