

限定された観測データを用いた ARX モデルによる剛性・減衰同定法

正会員 ○前田朋宏* 同 吉富信太* 同 竹脇 出*

2. 構造—2. 振動

システム同定, 構造ヘルスマニタリング, ARX モデル

1. 序

地震時の応答や常時微動等を観測し, 建造物の固有モード特性や物理パラメータを同定するシステム同定技術が盛んに研究されている^{1,2)}. これらの研究は, 建物の構造ヘルスマニタリング技術に応用され, その需要がますます増大している.

本論文は中村, 竹脇らによる物理パラメータの同定手法^{3,4)}に基づき, その短所を克服したものである. この手法では, 建物応答の $\omega \rightarrow 0$ における特性を利用して剛性・減衰が同定される. しかしながら, 実際の計測データを適用した場合, 振動数 0 近傍では応答値のレベルが下がり, 同定精度が低下する. 本論文では, この困難点を克服するために時系列モデルである ARX モデル⁵⁾を有効に利用し, 建物の物理パラメータ (剛性・減衰) を ARX パラメータで表現する.

2. 地動入力時の応答を用いた剛性・減衰の同定法

本論文は文献 3) に基づくため, その内容を本節で簡潔に説明する. この手法では, 図 1 に示すような線形弾性剛性, 線形粘性減衰, 線形履歴減衰を有するせん断型構造物モデルに対して, 同定対象層の直上及び直下の層の水平変位 (あるいは加速度) のみから, 対象層の層剛性と層減衰係数が同定可能である. 本論文では便宜上, 同定関数を(1)式で定義する. M_j は最上層から第 j 層までの質量の和を示す. 同定関数の実部, 虚部及び虚部の勾配についてそれぞれ $\omega \rightarrow 0$ における極限値を計算することで, 層剛性 k_j , 履歴減衰定数 β_j 及び粘性減衰係数 c_j が同定される.

$$f_j(\omega) = -\frac{\omega^2 M_j}{\{U_{j+1}(\omega)/U_j(\omega)\} - 1} \quad (1)$$

$$k_j = \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re}\{f_j(\omega)\} \quad (2)$$

$$\beta_j = \frac{1}{2k_j} \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Im}\{f_j(\omega)\} \quad (3)$$

$$c_j = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d}{d\omega} \operatorname{Im}\{f_j(\omega)\} \quad (4)$$

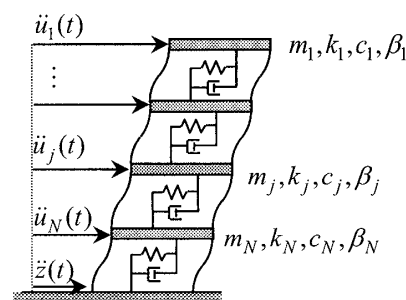


図 1 せん断型モデル

同定に際しては, (1)式の $U_{j+1}(\omega)/U_j(\omega)$ に観測データの離散フーリエ変換データを代入する. これは有限個のパラメータでは表現されない数値データであるため, 文献 3)の手法を以降ではノンパラメトリック法と呼ぶことにする. それに対して, 次節で提案する手法は, $U_{j+1}(\omega)/U_j(\omega)$ の部分に有限個の ARX パラメータ (ARX モデルを記述するパラメータ) で表現される伝達関数が代入されるパラメトリックな手法である. ノンパラメトリック法では, 振動数 0 近傍で同定関数の値が乱れるため, 近似関数を設定して極限値を評価する必要がある³⁾. この場合, 建物層数やノイズレベルに応じた適切な近似関数の設定が問題となる.

3. ARX モデルを用いた剛性・減衰同定法

3.1 伝達関数のテイラー展開と制約条件

$G_{j,j+1}(\omega)$ を同定対象層の直下 (第 $j+1$ 床: 上層から番号付け) の応答に対する同定対象層の直上の応答の伝達関数として(5)式のように表すと, (1)式の同定関数は(6)式のように書き換えられる

$$G_{j,j+1}(\omega) = \frac{U_j(\omega)}{U_{j+1}(\omega)}, f_j(\omega) = -\frac{\omega^2 M_j}{\{1/G_{j,j+1}(\omega)\} - 1} \quad (5, 6)$$

第 $j+1$ 床と第 j 床の応答をそれぞれ入力と出力とみなした ARX モデルを導入すれば, 伝達関数 $G_{j,j+1}(\omega)$ は

ARX パラメータ a_k, b_k ($k=1, \dots, n$) を用いて (7) 式で表現できる。尚、出力と入力のパラメータ数 n_a と n_b はいずれも n とする。本提案手法ではノンパラメトリック法と同様に $\omega \rightarrow 0$ の極限を扱うため ARX パラメータで表現された伝達関数の $\omega=0$ 周りのテイラー展開を考える。(7) 式のテイラー展開により (8) 式が得られる。

$$G_{j,j+1}(\omega) = \frac{b_1 e^{-i\omega T_0} + \dots + b_n e^{-ni\omega T_0}}{1 + a_1 e^{-i\omega T_0} + \dots + a_n e^{-ni\omega T_0}} \quad (7)$$

$$G_{j,j+1}(\omega) \approx A_0 + A_1 \omega + A_2 \omega^2 + \dots \quad (8)$$

$$A_0 = \sum_{k=1}^n b_k \left/ \left(1 + \sum_{k=1}^n a_k \right) \right. \quad (9)$$

$$A_i = i T_0 \frac{\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) b_k \left\{ 1 + \sum_{k=1}^n a_k \right\} - \sum_{k=1}^n b_k \left\{ n + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) a_k \right\}}{\left\{ 1 + \sum_{k=1}^n a_k \right\}^2} \quad (10)$$

(9), (10) 式のようにテイラー展開の係数を計算することにより、 ω の偶数次の係数は実数となり、 ω の奇数次の係数は純虚数となることがわかる。従って係数 A_j を実部の係数 A_j^R と虚部の係数 A_j^I に分けると、(8) 式は (11) 式のように書き換えられる。

$$G_{j,j+1}(\omega) \approx (A_0^R + A_2^R \omega^2 + \dots) + i(A_1^I \omega + A_3^I \omega^3 + \dots) \quad (11)$$

ここで文献 3) の式展開を用いると、せん断型モデルにおいて連続 2 層を入出力とした伝達関数は、次の (12), (13) 式を満たすことが理論的に証明できる。(12) 式は伝達関数実部が $\omega \rightarrow 0$ において 1 に収束することを表し、伝達関数のテイラー展開では (14) 式に対応する。同様に (13) 式は伝達関数虚部の勾配が $\omega \rightarrow 0$ において 0 に収束することを表し、(15) 式に対応する。

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} \{ G_{j,j+1}(\omega) \} = 1 \quad (12)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d}{d\omega} \operatorname{Im} \{ G_{j,j+1}(\omega) \} = 0 \quad (13)$$

$$A_0^R = 1, A_1^I = 0 \quad (14, 15)$$

さらに (9), (10) 式を (14), (15) 式に代入して ARX パラメータ間の関係式である (16), (17) 式が得られる。

$$\sum_{k=1}^n a_k + 1 = \sum_{k=1}^n b_k \quad (16)$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k) b_k \left\{ 1 + \sum_{k=1}^n a_k \right\} = \sum_{k=1}^n b_k \left\{ n + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) a_k \right\} \quad (17)$$

(16), (17) 式を制約条件として ARX パラメータの推定を行うことが本提案手法の特徴の一つである。

3.2 同定関数の極限値の ARX パラメータ表現

伝達関数のテイラー展開である (11) 式及び制約条件 (14), (15) 式を用いて (12) 式を計算すると、その実部の極限值から、層剛性同定値が (18) のように表現できる。また虚部の勾配の極限值から、粘性減衰係数の同定値が (19) 式のように表現できる。

$$k_j = \lim_{\omega \rightarrow 0} \operatorname{Re} \{ f_j(\omega) \} = \frac{M_j}{A_2^R} \quad (18)$$

$$c_j = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d}{d\omega} \operatorname{Im} \{ f_j(\omega) \} = -\frac{A_3^I M_j}{(A_2^R)^2} \quad (19)$$

ここで A_2^R, A_3^I は ARX パラメータを用いて表されるため、(18), (19) 式を用いれば物理パラメータ同定問題は ARX パラメータの推定問題に帰着される。すなわち本提案手法では、ノンパラメトリック法で困難であった近似関数の設定を回避した同定が可能となる。

3.3 制約条件付きの ARX パラメータ推定法

本手法では制約条件 (16), (17) 式を満足する ARX パラメータを推定する必要がある。(16) 式の制約条件は ARX パラメータについて線形であり、(17) 式の制約条件は非線形である。制約のない ARX パラメータ推定問題は一括最小二乗法を用いることで連立方程式を解くことに帰着される⁵⁾。ラグランジュの未定乗数法を適用すれば、線形の制約条件については一括最小二乗法に容易に組み込むことができる。この伝達関数実部の制約のみを考慮した推定法を手法(I)とする。また伝達関数の実部虚部両方の制約条件を考慮する場合を手法(II)とし、数値的な探索法(逐次 2 次計画法)を用いてパラメータを推定する。

手法(I)は伝達関数実部を安定して同定可能であるが、虚部は制約条件がないため誤差を生じる。一方、手法(II)は伝達関数の実部と虚部両方を精度良く表現できるが、最適化問題を解くため計算負荷が大きく、また局所解に陥る可能性もある。ここで (18) 式の剛性同定値は伝達関数実部のテイラー展開係数のみで表されるので、剛性同定については手法(I)を用いるのが望ましい。また (19) 式の粘性減衰係数同定値は伝達関数虚部のテイラー展開係数も含むため、手法(II)を用いる必要がある。

4. 数値シミュレーション

3 節で示した同定手法の妥当性を数値シミュレーションにより検証する。図 2 に示す 4 層せん断型構造物

模型と対応するシミュレーションモデルを設定した。バンドリミテッドホワイトノイズを地動入力加速度として与えて、時刻歴応答解析を行い、得られた各層の加速度応答を提案手法に適用する。尚、モデル次数は下層から 300, 300, 260, 200 とした。

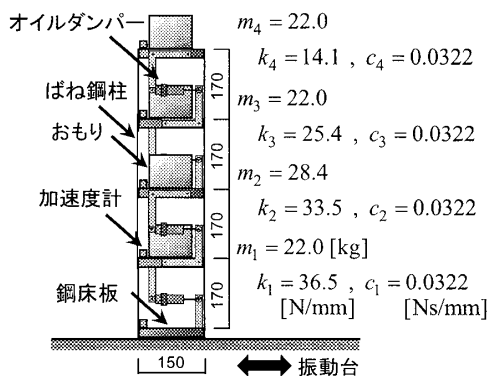


図2 4層せん断型構造物模型

4.1 剛性の同定

本手法では、ARX パラメーターが推定されれば物理パラメーターが直接同定されるため、同定関数に近似関数を設定する必要はない。しかし、ここではノンパラメトリック法との比較により精度を検証するために同定関数を示す。本手法により近似関数を設定することなく、同定関数実部の $\omega \rightarrow 0$ における極限值が求められることが図3から理解される。本手法を適用して同定関数の実部の $\omega \rightarrow 0$ における極限值、すなわち剛性の同定値を求めると第1層で 37.6(0.2%)、第2層で 33.5(2.1%)、第3層で 25.0(0.2%)、第4層で 15.6(1.1%) となる (単位 N/mm, 括弧内の数値は誤差)。本手法により概ね精度良く剛性が同定されているといえる。

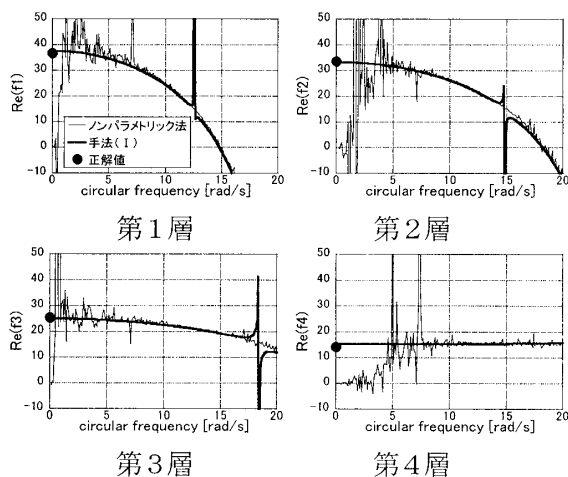


図3 ARX パラメーターで表現された同定関数実部

4.2 減衰係数の同定

手法(II)を用いて求めた同定関数の虚部を図4に示す。同定関数の虚部では低振動数領域で値が大きく乱れている。図中の「設定値による解析」とは、図4の設定値を用いた運動方程式を振動数領域で解いたものであり、正解値を表す。図4は手法(II)により同定関数が表現できることを定性的に示している。定量的には第1層で 49.4%、第2層で 15.0%、第3層で 4.9%、第4層ではほぼ 0%の誤差がある。本手法における伝達関数は、連続2層の下層応答を入力、上層応答を出力として定義されており、最上層の伝達関数は上層からの影響を受けない単純な伝達特性を有するのに対し、最下層の伝達関数は建物層数分の固有モードが影響する複雑な伝達特性を有する。このことが上層ほど精度が高い原因であると考えられる。

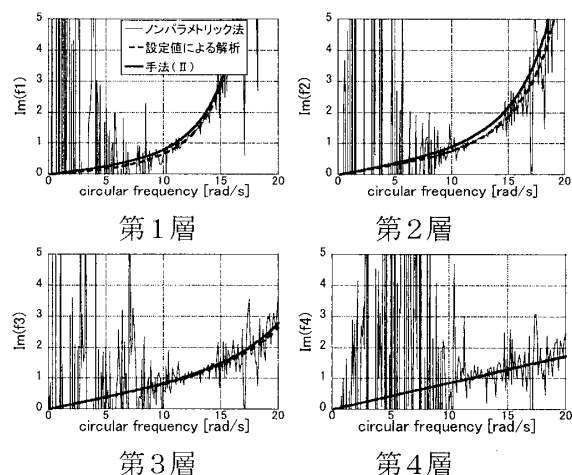


図4 ARX パラメーターで表現された同定関数虚部

5. 4層模型実測データへの適用

手法(I)を、図2に示すようなオイルダンパー付き4層せん断型構造物模型の実測データに適用する。模型の剛性及び減衰係数は予め別の手法により求めてある。模型を振動台に固定し、最大変位が 5[mm]であるようなランダム波を入力として与えて模型床板上の加速度応答と振動台上の加速度応答を収録した。データ収録は 500[Hz]で約 10[s]実施した。模型実験により計測されたデータを用いて図3と同様の同定関数実部をプロットしたものが図5である。

さらに本手法を適用して同定関数実部の $\omega \rightarrow 0$ における極限值である剛性の同定値を求めると第1層で 36.7(0.6%)、第2層で 31.6(5.6%)、第3層で 24.4(3.9%)、第4層で 13.3(5.5%)となった。

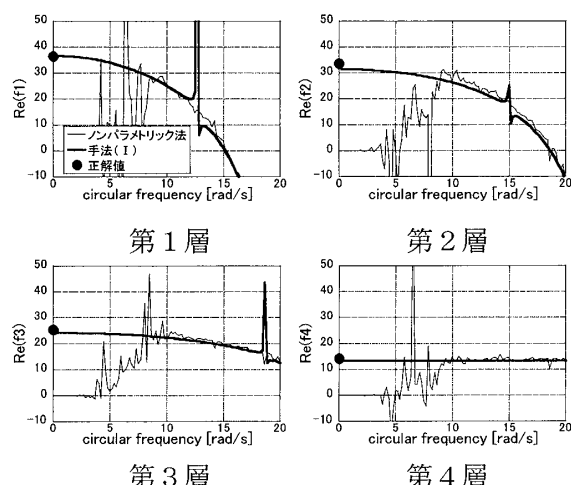


図5 ARX パラメータで表現された同定関数実部

6. 実建物における地震観測記録への適用

3 節の手法を、免震建物における地震観測結果に対して適用する。地震観測を行った建物は京都大学構内に位置する免震建物で、地下1階と耐圧版の間に免震層を有する地上3階地下1階の RC 造建物である³⁾。本節の検討においては耐圧版と地下1階の間の免震層を同定対象とする。

提案手法を観測データに適用した場合の同定関数を図6, 7に示す。ここではモデル次数は42とした。剛性については既同定値と対応しており、同定精度は比較的高いといえる。一方減衰係数については観測した建物が履歴減衰を有しており適切に同定できていない。既往の同定法では(3)式に示すように履歴減衰定数の同定が可能である。しかし、提案手法においては、ARX モデルに基づく伝達関数を用いて同定関数を算出しており、同定関数虚部の $\omega \rightarrow 0$ における極限值は 0 となる特徴を有している。このことから、同定関数虚部勾配の極限值が適切に算定されず、減衰係数が適切に同定できていないと考えられる。履歴減衰を考慮した取り扱いについては今後の課題としたい。

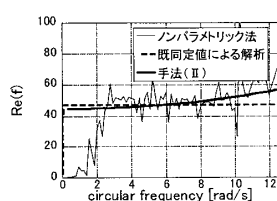


図6 同定関数実部

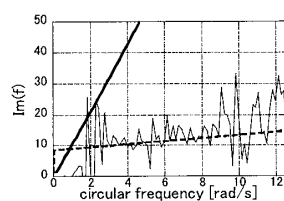


図7 同定関数虚部

7. 結論

- (1) 同定対象層の上下層における地震時応答観測結果のみから層の物理パラメータを同定する問題に対して、既往の同定法³⁾の課題であった低振動数域データのノイズの影響を考慮した手法を提案した。
- (2) ARX モデルを記述するパラメータを用いて伝達関数を表現し、伝達関数をテイラー展開することにより、建物の物理パラメータを ARX パラメータで表現することを可能とした。
- (3) せん断型モデルの伝達関数の $\omega \rightarrow 0$ における極限值が満たすべき条件として、実部が 1 に収束すること及び虚部の勾配が 0 に収束することの2つを導き、剛性と粘性減衰係数の同定値を ARX パラメータで表現した。
- (4) 数値例題を通じて本手法の妥当性を示した。また、模型実験の実測データ及び実建物における観測記録を用いた検証により、その精度を明らかにした。本手法は実測データに含まれるノイズの影響を考慮した同定が可能であり、実用性の高い手法である。

本手法では、剛性と粘性減衰を同定することが可能である。しかしながら、剛性の同定精度に比べて減衰の同定精度はモデルにより異なり安定していない。履歴減衰を考慮した同定手法については今後の課題としたい。

参考文献

- 1) G.Housner, et al. Special issue: Structural control: past, present, and future. *J. Engng. Mech.*, ASCE; 123(9), pp.897-971, 1997.9.
- 2) Proc. of the Fifth World Conference on Structural Control and Monitoring (5WCSCM), Tokyo, 2010.7.
- 3) 中村 充, 竹脇 出, 安井 譲, 上谷宏二: 限定された地震観測記録を用いた建築物の剛性と減衰の同時同定, 日本建築学会構造系論文集, No.528, pp.75-82, 2000.2.
- 4) I.Takewaki and M.Nakamura: Stiffness-damping simultaneous identification under limited observation, *J. Engng. Mech.*, ASCE; 131 (10), pp.1027-1035, 2005.10.
- 5) 足立修一: システム同定の基礎, 東京電機大学出版局, 2009.9