

Barnes 2重ゼータ関数および Hurwitz 多重ゼータ関数の平均値

名古屋大学大学院多元数理科学研究科 宮川 貴史 (Takashi Miyagawa)
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

Abstract

Riemann ゼータ関数の平均値オーダーの考察は, Lindelöf 予想を解明するための一つのアプローチとして重要な研究テーマとされている. 近年では, この平均値オーダーを多重ゼータ関数を対象として考察されるようになり, Euler-Zagier 型や Mordell-Tornheim 型の 2 重ゼータ関数に対する 2 乗平均値の結果が, Riemann ゼータ関数の場合と同様に得られている. 今回, 筆者は Barnes 2 重ゼータ関数 $\zeta_2(s, \alpha; v, w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha + vm + wn)^{-s}$ や Hurwitz 多重ゼータ関数 $\zeta_r(s, \alpha) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} (\alpha + m_1 + \cdots + m_r)^{-s}$ に着目し, $\text{Im}(s)$ に対する 2 乗平均値の結果が得られたので, その結果と証明の概略を合わせて紹介する.

1 背景と導入

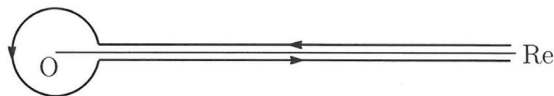
$s = \sigma + it$ ($\sigma, t \in \mathbb{R}$) を複素変数とする. Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ は $\sigma > 1$ において

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots \quad (1.1)$$

で定義される複素関数であり, Gamma 関数を含んだ contour 積分表示

$$\zeta(s) = \frac{1}{(e^{2\pi i s} - 1)\Gamma(s)} \int_C \frac{z^{s-1}}{e^z - 1} dz \quad (1.2)$$

を通して, $\mathbb{C}$ 全体へ有理型に解析接続されることが知られている. ただし, C は以下の図のような積分路である:



$\zeta(s)$ は素数と深い関わりをもち, 数論における重要な関数として応用されているが, $\zeta(s)$ 自身も解析的に非常に重要な性質があり, $s = 1/2$ を対称軸とした関数等式

$$\pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s).^*$$
(1.3)

を持つことや、素数定理

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \quad (x \rightarrow \infty), \quad (1.4)$$

が $\zeta(s)$ の解析的性質から導かれることなど、非常に興味深い関数である。 $\zeta(s)$ の解析的性質をさらに深く研究するためには、関数の挙動、すなわち $|\zeta(\sigma + it)|$ のオーダーを調べることが必要となってくる。特に、 $\zeta(\sigma + it)$ の t に着目したオーダーは古くから研究対象とされており、中でも critical line $s = 1/2$ 上における $\zeta(1/2 + it)$ のオーダーはとりわけ重要視され Hardy-Littlewood の $\zeta(1/2 + it) = O(|t|^{1/6+\varepsilon})$ 等の評価を始めとして、盛んに改良研究が進められてきた。現段階での最良の結果としては、2017 年の Bourgain [2] による

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(|t|^{13/84+\varepsilon})$$

が知られている。ところが $\zeta(\sigma + it)$ のオーダーの研究は、以下の Lindelöf 予想と呼ばれる未解決の難問に阻まれているのが現状である：

Lindelöf 予想

任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$\zeta(\sigma + it) = O(|t|^\varepsilon) \quad \left(|t| \geq 2, \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1\right)$$

が成り立つ (?)

関数のオーダーを直接考えることは困難であるという観点から、一つ譲歩して $|\zeta(\sigma + it)|$ の t に関する平均値のオーダーを考察する試みが進められた。その出発点として、2 乗平均値に対する

$$\int_2^T |\zeta(\sigma + it)|^2 dt \sim \begin{cases} \zeta(2\sigma)T & (\sigma > 1/2) \\ T \log T & (\sigma = 1/2) \end{cases} \quad (1.5)$$

なる形の結果が得られている。しかし、平均値オーダーを考えることは、単に関数のオーダーが難しすぎるからという理由だけでなく、高次の平均値オーダーを考えることで Lindelöf 予想と同等の結果が得られることが期待されており、平均値オーダーと Lindelöf 予想との関係が次の定理 (Theorem 1.1) によって関連付けられている；

Theorem 1.1 (Theorem 13.2 in Titchmarsh[12]). 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$\int_2^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^{2k} dt = O(T^{1+\varepsilon}) \quad (\forall k \in \mathbb{N}) \quad (1.6)$$

が成り立つことと、Lindelöf 予想が成り立つことは同値である。

このことから、平均値オーダーの考察は Lindelöf 予想解決への一つのアプローチとして重要な研究テーマとされている。しかし、(1.6) の成立が示されているのは、わずか

に $k = 1, 2$ の場合のみであり、平均値オーダーからのアプローチでも、Lindelöf 予想の解明には未だ遠いのが現状である。

一方、近年では多重ゼータ関数を対象とした平均値の研究が、松本氏、津村氏の共同研究 [9] を筆頭に着目されるようになった。2015 年において松本氏、津村氏は、Euler-Zagier 型 2 重ゼータ関数

$$\zeta_2(s_1, s_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1}(m_1 + n_1)^{s_2}}$$

に着目し、2 つ目の変数 $s_2 = \sigma_2 + it_2$ の虚部 t_2 に関する平均値として、 $\sigma_1 + \sigma_2 > 3/2$ におけるある部分領域において

$$\int_2^T |\zeta_2(\sigma_1 + it_1, \sigma_2 + it_2)|^2 dt_2 \sim \zeta_2^{[2]}(\sigma_1 + it_1, 2\sigma_2)T \quad (T \rightarrow \infty) \quad (1.7)$$

の形の結果を与えている。ただし、

$$\zeta_2^{[2]}(s_1, s_2) := \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m^{s_1}} \right|^2 \frac{1}{k^{s_2}}$$

である。また、池田氏、松岡氏、永田氏の共同研究 [5] によって (1.7) の改良版が与えられ、 $\{(\sigma_1, \sigma_2) \mid \sigma_1 + \sigma_2 = 3/2, \sigma_2 > 1/2\} \cup \{(\sigma_1, \sigma_2) \mid \sigma_1 \geq 1, \sigma_2 = 1/2\}$ を満たす範囲においては、

$$\int_2^T |\zeta_2(\sigma_1 + it_1, \sigma_2 + it_2)|^2 dt_2 \asymp T \log T \quad (T \rightarrow \infty) \quad (1.8)$$

の形の結果を与えている。さらに、1 つ目の変数や、双方の変数に着目した平均値

$$\int_2^T |\zeta_2(\sigma + it, s_2)|^2 dt, \quad \int_2^T |\zeta_2(\sigma_1 + it, \sigma_2 + it)|^2 dt,$$

についても同様の結果が得られている。他方、岡本氏と小野塚氏 [11] は、Mordell-Tornheim 型 2 重ゼータ関数

$$\zeta_{MT,2}(s_1, s_2; s) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s_1} n^{s_2} (m+n)^s},$$

に着目し、 $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma > 3/2$ におけるある部分領域において、(1.7) を特別な場合として含む

$$\int_2^T |\zeta_{MT,2}(s_1, s_2; \sigma + it)|^2 dt \sim \zeta_{MT,2}^{[2]}(s_1, s_2; 2\sigma)T \quad (T \rightarrow \infty) \quad (1.9)$$

の形の結果を与えている。ただし、

$$\zeta_{MT,2}^{[2]}(s_1, s_2; s) = \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m^{s_1} (k-m)^{s_2}} \right|^2 \frac{1}{k^s}$$

である。今回、筆者は Barnes 2 重ゼータ関数に対して (1.7) や (1.9) に相当する結果 (Theorem 2.1) が得られ、また Hurwitz 多重ゼータ関数に対しては (1.8) の類似の結果 (Theorem 3.3) も得られたので、それぞれ次節以降で紹介する。

2 Barnes 2重ゼータ関数の平均値

Definition 1. r を正の整数, $\alpha > 0, w_1, w_2, \dots, w_r > 0$ とし,

$$\zeta_r(s, \alpha; w_1, \dots, w_r) := \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha + w_1 m_1 + \cdots + w_r m_r)^s} \quad (2.1)$$

を Barnes r 重ゼータ関数という. 級数は $\operatorname{Re}(s) > r$ において絶対収束する. この関数は, $\mathbb{C}$ 全体へ有理型に解析接続され, 極は $s = 1, 2, \dots, r$ における一位の極のみをもち, それ以外の点では正則であることが示されている.

今回の研究において, 筆者は Barnes 2 重ゼータ関数

$$\zeta_2(s, \alpha; v, w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha + vm + wn)^s} \quad (2.2)$$

に着目し, 2 乗平均値の結果が以下のように得られた:

Theorem 2.1 (M [10]). (i) $\sigma > 2$ に対して,

$$\int_1^T |\zeta_2(s, \alpha; v, w)|^2 dt = \zeta_2^{[2]}(\sigma, \sigma, \alpha; v, w)T + O(1) \quad (T \rightarrow +\infty).$$

(ii) $3/2 < \sigma \leq 2$ に対して,

$$\begin{aligned} \int_1^T |\zeta_2(s, \alpha; v, w)|^2 dt \\ = \zeta_2^{[2]}(\sigma, \sigma, \alpha; v, w)T + O(T^{4-2\sigma} \log T) + O(T^{1/2}) \quad (T \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

ただし,

$$\zeta_2^{[2]}(s_1, s_2, \alpha; v, w) := \sum_{\substack{m_1, n_1, m_2, n_2 \geq 0 \\ vm_1 + wn_1 = vm_2 + wn_2}} \frac{1}{(\alpha + vm_1 + wn_1)^{s_1} (\alpha + vm_2 + wn_2)^{s_2}} \quad (2.3)$$

である.

Remark 1. 級数 (2.3) は $\operatorname{Re}(s_1 + s_2) > 2$ のとき絶対収束する. また, v と w が $\mathbb{Q}$ 上線型独立ならば, $\zeta_2^{[2]}(s_1, s_2, \alpha; v, w) = \zeta_2(s_1 + s_2, \alpha; v, w)$ すなわち, $\zeta_2^{[2]}$ は Barnes 2 重ゼータ関数となる.

(Theorem 2.1 の証明の概要)

(i) $\sigma > 2$ のとき,

$$|\zeta_2(s, \alpha; v, w)|^2 = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha + vm_1 + wn_1)^{\sigma+it}} \sum_{m_2=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha + vm_2 + wn_2)^{\sigma-it}}$$

となるが, $vm_1 + wn_1 = vm_2 + wn_2$ を満たす項と $vm_1 + wn_1 \neq vm_2 + wn_2$ を満たす項に分けて計算すると,

$$\begin{aligned} & |\zeta_2(s, \alpha; v, w)|^2 \\ &= \zeta_2^{[2]}(\sigma, \sigma, \alpha; v, w) \\ &+ \sum_{\substack{m_1, n_1, m_2, n_2 \geq 0 \\ vm_1 + wn_1 \neq vm_2 + wn_2}} \frac{1}{(\alpha + vm_1 + wn_1)^\sigma (\alpha + vm_2 + wn_2)^\sigma} \left(\frac{\alpha + vm_2 + wn_2}{\alpha + vm_1 + wn_1} \right)^{it}. \end{aligned}$$

のように変形すると, その積分は

$$\begin{aligned} & \int_1^T |\zeta_2(s, \alpha; v, w)|^2 dt = \zeta_2^{[2]}(\sigma, \sigma, \alpha; v, w)(T - 1) \\ &+ \sum_{\substack{m_1, n_1, m_2, n_2 \geq 0 \\ vm_1 + wn_1 \neq vm_2 + wn_2}} \frac{1}{(\alpha + vm_1 + wn_1)^\sigma (\alpha + vm_2 + wn_2)^\sigma} \\ &\times \frac{e^{iT \log\{(\alpha + vm_2 + wn_2)/(\alpha + vm_1 + wn_1)\}} - e^{i \log\{(\alpha + vm_2 + wn_2)/(\alpha + vm_1 + wn_1)\}}}{i \log\{(\alpha + vm_2 + wn_2)/(\alpha + vm_1 + wn_1)\}}. \end{aligned}$$

となり, (Second term) $\ll 1$ となるので (i) の結果を得る.

(ii) $3/2 < \sigma \leq 2$ のとき, (2.2) の右辺は発散するので, 級数表示は使えない. そこで, 2重級数を有限和で切った次の近似公式を用いる;

Theorem 2.2 (M [10]). $1 < \sigma_1 < \sigma_2$, $x \geq 1, C > 1$ に対して, $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2, |t| \leq 2\pi x/C$ とする. このとき $x \rightarrow \infty$ に対して,

$$\begin{aligned} \zeta_2(s, \alpha; v, w) &= \sum_{0 \leq m \leq x} \sum_{0 \leq n \leq x} \frac{1}{(\alpha + vm + wn)^s} \\ &+ \frac{(\alpha + vx)^{2-s} + (\alpha + wx)^{2-s} - (\alpha + vx + wx)^{2-s}}{vw(s-1)(s-2)} + O(x^{1-\sigma}) \end{aligned}$$

が成り立つ.

Theorem 2.2 において, $C = 2\pi, x = t$ ととると,

$$\zeta_2(s, \alpha; v, w) = \sum_{m \leq t} \sum_{n \leq t} \frac{1}{(\alpha + vm + wn)^s} + O(t^{1-\sigma}) \quad (2.4)$$

を得る. 右辺の第1項目を $\Sigma(s)$ と表し, 2乗積分を計算すると

$$\begin{aligned} & \int_1^T |\zeta_2(\sigma + it, \alpha; v, w)|^2 dt = \int_1^T |\Sigma(s) + O(t^{1-\sigma})|^2 dt \\ &= \int_1^T |\Sigma(s)|^2 dt + O\left(\int_1^T |\Sigma(s)| t^{1-\sigma} dt\right) + O\left(\int_1^T t^{2-2\sigma} dt\right). \end{aligned}$$

が得られる. 最右辺の第1項目は (i) と同様の計算を行い, 第2項目は Cauchy-Schwarz の不等式を用いて評価する. 以上より (ii) の結果を得る.

□

3 Hurwitz 多重ゼータ関数の平均値

$\alpha > 0$ とする. Hurwitz 多重ゼータ関数を級数

$$\zeta_r(s, \alpha) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_r=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha + m_1 + \cdots + m_r)^s} \quad (\operatorname{Re}(s) > r).$$

で定義する, これは, Barnes 多重ゼータ関数 (2.1) を $w_1 = \cdots = w_r = 1$ に限定した特別な場合の関数である. Hurwitz 多重ゼータ関数 $\zeta_r(s, \alpha)$

$$\begin{aligned} \zeta_r(s, \alpha) &= \sum_{j=0}^{r-1} p_{r,j}(\alpha) \zeta(s-j, \alpha), \\ p_{r,j}(\alpha) &= \frac{1}{(r-1)!} \sum_{l=j}^{r-1} (-1)^{r+1-j} \binom{l}{j} S(r, l+1) \alpha^{l-j} \end{aligned}$$

を満たし, 1 重の Hurwitz ゼータ関数の線形和で表示することができる. ただし, $p_{r,j}(\alpha)$ に含まれる $S(r, l+1)$ は, 第 1 種 Stirling 数を表す.

例えば, $r=2, r=3$ の場合はそれぞれ

$$\begin{aligned} \zeta_2(s, \alpha) &= (1-\alpha)\zeta(s, \alpha) + \zeta(s-1, \alpha), \\ \zeta_3(s, \alpha) &= \frac{1}{2}(1-\alpha)(2-\alpha)\zeta(s, \alpha) + \frac{1}{2}(3-2\alpha)\zeta(s-1, \alpha) + \frac{1}{2}\zeta(s-2, \alpha) \end{aligned}$$

のようになる. これをもとに, $\zeta_2(s, \alpha)$ の 2 乗平均値を計算していくと

$$\begin{aligned} \int_1^T |\zeta_2(s, \alpha)|^2 dt &= \int_1^T |(1-\alpha)\zeta(s, \alpha) + \zeta(s-1, \alpha)|^2 dt \\ &= (1-\alpha)^2 \int_1^T |\zeta(s, \alpha)|^2 dt + \int_1^T |\zeta(s-1, \alpha)|^2 dt \\ &\quad + 2(1-\alpha) \operatorname{Re} \left(\int_1^T \zeta(s, \alpha) \overline{\zeta(s-1, \alpha)} dt \right) \end{aligned}$$

となり, 右辺第 3 項は

$$\int_1^T \zeta(s, \alpha) \overline{\zeta(s-1, \alpha)} dt = \zeta(2\sigma-1, \alpha)T + \begin{cases} O(T^{1/2}) & (3/2 < \sigma \leq 2), \\ O((T \log T)^{1/2}) & (\sigma = 3/2), \end{cases}$$

と計算でき, Hurwitz ゼータ関数の平均値の結果 ([8] 等を参照) を用いることで, 次の結果を得る.

Theorem 3.1 (M). (i) $3/2 < \sigma \leq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} \int_1^T |\zeta_2(\sigma + it, \alpha)|^2 dt &= \{(1-\alpha)^2 \zeta(2\sigma, \alpha) + 2(1-\alpha) \zeta(2\sigma-1, \alpha) + \zeta(2\sigma-2, \alpha)\}T \\ &\quad + O(T^{1/2}) + O(T^{4-2\sigma}) \quad (T \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

(ii) $\sigma = 3/2$ のとき,

$$\begin{aligned} & \int_1^T \left| \zeta_2 \left(\frac{3}{2} + it, \alpha \right) \right|^2 dt \\ &= T \log T + \left\{ (1-\alpha)^2 \zeta(3, \alpha) + 2(1-\alpha) \zeta(2, \alpha) + \gamma(\alpha) + \frac{\gamma}{\alpha} - 1 - \log 2\pi \right\} T \\ & \quad + O((T \log T)^{1/2}) \quad (T \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

ただし, γ は Euler 定数, $\gamma(\alpha)$ は一般 Euler 定数と呼ばれており,

$$\gamma(\alpha) := \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N \frac{1}{n+\alpha} - \log N \right),$$

で定義される.

また, $\zeta_3(s, \alpha)$ に対しても同様に計算することができるのであるが, ここで (2.3) の類似の級数として,

$$\begin{aligned} \zeta_3^{[2]}(s_1, s_2, \alpha; w_1, w_2, w_3) := & \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3, n_1, n_2, n_3 \geq 0 \\ w_1 m_1 + w_2 m_2 + w_3 m_3 = w_1 n_1 + w_2 n_2 + w_3 n_3}} \\ & \frac{1}{(\alpha + w_1 m_1 + w_2 m_2 + w_3 m_3)^{s_1} (\alpha + w_1 n_1 + w_2 n_2 + w_3 n_3)^{s_2}}, \end{aligned}$$

を定めておく. この級数は $\operatorname{Re}(s_1 + s_2) > 2$ において絶対収束する. また, 同様に w_1, w_2, w_3 が $\mathbb{Q}$ 上線型独立ならば,

$$\zeta_3^{[2]}(s_1, s_2, \alpha; w_1, w_2, w_3) = \zeta_3(s_1 + s_2, \alpha; w_1, w_2, w_3).$$

となり, Barnes 3 重ゼータ関数に一致する. この級数を用いて, $\zeta_3(s, \alpha)$ に対する 2 乗平均値の結果が以下のように与えられる;

Theorem 3.2 (M). (i) $5/2 < \sigma \leq 3$ のとき,

$$\int_1^T |\zeta_3(\sigma + it, \alpha)|^2 dt = \zeta_3^{[2]}(\sigma, \sigma, \alpha; 1, 1, 1) T + O(T^{1/2}) + O(T^{4-2\sigma}) \quad (T \rightarrow \infty).$$

(ii) $\sigma = 5/2$ のとき,

$$\begin{aligned} & \int_1^T \left| \zeta_3 \left(\frac{5}{2} + it, \alpha \right) \right|^2 dt \\ &= \frac{1}{4} T \log T + \frac{1}{4} \left\{ (1-\alpha)^2 (2-\alpha)^2 \zeta(5, \alpha) + 2(1-\alpha)(2-\alpha)(3-2\alpha) \zeta(4, \alpha) \right. \\ & \quad \left. + (6\alpha^2 - 18\alpha + 13) \zeta(3, \alpha) + 2(3-2\alpha) \zeta(2, \alpha) + \gamma(\alpha) + \frac{\gamma}{\alpha} - 1 - \log 2\pi \right\} T \\ & \quad + O((T \log T)^{1/2}) \quad (T \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

一般の Hurwitz r 重ゼータ関数 $\zeta_r(s, \alpha)$ については、現時点では簡易的な結果のみしか得られていないが、

$$\zeta_r(s, \alpha) = \sum_{j=0}^{r-1} p_{r,j}(\alpha) \zeta(s-j, \alpha)$$

を満たすことを用いて、

$$\begin{aligned} \int_1^T |\zeta_r(s, \alpha)|^2 dt &= \sum_{j=0}^{r-1} p_{r,j}(\alpha)^2 \int_1^T |\zeta(s-j, \alpha)|^2 dt \\ &+ 2 \sum_{0 \leq k < l \leq r-1} p_{r,k}(\alpha) p_{r,l}(\alpha) \cdot \operatorname{Re} \left(\int_1^T \zeta(s-k, \alpha) \overline{\zeta(s-l, \alpha)} dt \right). \end{aligned}$$

の右辺の第2項の部分の評価することと、 $\sigma = r - 1/2$ の場合の主要項が

$$\int_1^T |\zeta(s-r+1, \alpha)|^2 dt \sim T \log T.$$

となることを用いて、次の結果が得られる；

Theorem 3.3 (M). (i) $\sigma > r - 1/2$ のとき、

$$\int_1^T |\zeta_r(\sigma + it, \alpha)|^2 dt \asymp T \quad (T \rightarrow \infty)$$

(ii) $\sigma = r - 1/2$ のとき、

$$\int_1^T \left| \zeta_r \left(r - \frac{1}{2} + it, \alpha \right) \right|^2 dt = \frac{1}{\{(r-1)!\}^2} T \log T + O(T^{1/2} \log T) \quad (T \rightarrow \infty).$$

Remark 2. Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ では、critical line $\sigma = 1/2$ における2乗平均値オーダーが $T \log T$ で評価されるが、Theorem 3.1, 3.2, 3.3 の(ii)の結果から、 r 重ゼータ関数については直線 $\sigma = r - 1/2$ が2乗平均値の観点から $\zeta(s)$ の critical line $\sigma = 1/2$ に相当しているのではないか、ということが覗える。

Hurwitz 多重ゼータ関数の結果、特に Theorem 3.3 については現時点で詳細な計算まで着手できておらず、簡易的な結果のみしか紹介できなかったが、引き続き細部までの計算を進め、漸近公式や誤差項の改良に努めていきたい。

References

- [1] F. V. Atkinson, The mean-value of the Riemann zeta function, Acta. Math., **81** (1949), 353-376.

- [2] J. Bourgain, Decoupling, exponential sums and the Riemann zeta-function, *J. Amer. Math. Soc.* **30** (2017), No. 1, 205-224.
- [3] R. Garunkštis, A. Laurinčikas, and J. Steuding, An approximate functional equation for the Lerch zeta-function, *Mathematical Notes*, Vol. **74**, No. 4 (2003), pp. 469-476.
- [4] R. Garunkštis, A. Laurinčikas, and J. Steuding, On the mean square of Lerch zeta-function, *Arch. Math. (Basel)* **80** (2003), no. 1, 47-60.
- [5] S. Ikeda, K. Matsuoka, Y. Nagata, On certain mean values of the double zeta-function, *Nagoya Math. J.* **217** (2015), 161-190.
- [6] Y. Komori, K. Matsumoto, H. Tsumura, Barnes multiple zeta-functions, Ramanujan's formula, and relevant series involving hyperbolic functions, *J. Ramanujan Math. Soc.* **28** (2013), 49-69.
- [7] A. Laurinčikas, R. Garunkštis, On the Lerch zeta-function, *Lith. Math. J.* **36** (1996), 337-346.
- [8] A. Laurinčikas, R. Garunkštis, *The Lerch zeta-function*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.
- [9] K. Matsumoto, H. Tsumura, Mean value theorems for the double zeta-function, *J. Math. Soc. Japan* **67** (2015), 383-408.
- [10] T. Miyagawa, Mean values of the Barnes double zeta-function, *Tokyo J. Math.* Vol. **41**, No. 2, (2018) to appear, 13pp.
- [11] T. Okamoto, T. Onozuka, Mean value theorems for the Mordell-Tornheim double zeta-functions, *Ramanujan J.* **37** (2015), 131-163.
- [12] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-function*. 2nd ed., Edited and with a preface by D. R. Heath-Brown, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.