

SPINOR L -FUNCTIONS FOR GENERIC CUSP FORMS ON $GSp(2)$ BELONGING TO PRINCIPAL SERIES REPRESENTATIONS

石井 卓 (TAKU ISHII, 東京工業大学)
森山 知則 (TOMONORI MORIYAMA, 上智大学)

$G = GSp(2)$ を $\mathbf{Q}$ 上定義された次数 2 の similitude つきの symplectic 群, $\Pi = \otimes_v \Pi_v$ を アデール群 $G_{\mathbf{A}} = GSp(2, \mathbf{A})$ の尖点保型表現とする. 本稿では Moriyama ([Mo-2]) に続いて, Π_{∞} が $G_{\mathbf{R}} = GSp(2, \mathbf{R})$ の主系列表現と同型になる場合に, Π に付随する spinor L 関数 $\Lambda(s, \Pi)$ が全 s 平面上の整関数に解析接続され関数等式を満たすことを紹介する.

その証明には [Mo-2] と同じように Novodvorsky のゼータ積分を用いる. 従って Π が generic, つまりある尖点形式 $F \in \Pi$ に対する大域的 Whittaker 関数 $\mathcal{W}_F$ が消えないという仮定を要する. このとき各 local component Π_v も Whittaker 模型を持つことになり, 無限素点においては, Kostant の結果 ([Ko, Theorem 6.8.1]) により Π_{∞} は Vogan の意味で large でなければならない. [V] によると $G_{\mathbf{R}}$ の large な既約表現は $G_{\mathbf{R}}$ の放物部分群の conjugacy class に対応して 4 つのクラスに分けられるが, そのうち (i) G 自身, つまり Π_{∞} の $Sp(2, \mathbf{R})$ への制限が大きな離散系列表現の直和, (ii) Jacobi 型極大放物部分群から誘導された一般化主系列表現, の 2 つのクラスが [Mo-2] によって扱われた. 本稿では残る 2 つのクラスのうち, $G_{\mathbf{R}}$ の極小放物部分群に対応するもの, すなわち Π_{∞} が $G_{\mathbf{R}}$ の主系列表現となる場合を考える.

なお, 記号など [Mo-2], [Mo-3] と重複するところが多いのでそちらも併せて参照されたい.

§1. 主定理

(1.1) 大域的 Whittaker 関数. まず上で述べた generic という仮定について説明する. G を次数 2 の similitude 付きの symplectic 群とする:

$$G = GSp(2) := \{g \in GL(4) \mid {}^t g J_4 g = \nu(g) J_4 \text{ for some } \nu(g) \in \mathbf{G}_m\}, \quad J_4 := \left(\begin{array}{c|c} & 1_2 \\ \hline -1_2 & \end{array} \right).$$

ここで G は $\mathbf{Q}$ 上の代数群と考える. $\mathbf{Q}$ -algebra R に対して, G の R -valued points のなす群を G_R と書くことにする. 他の代数群についても同様. G の極大べき単部分群を

$$N := \left\{ n(x_0, x_1, x_2, x_3) := \left(\begin{array}{c|cc} 1 & x_1 & x_2 \\ & x_2 & x_3 \\ \hline & 1 & \\ & & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} 1 & x_0 \\ & 1 \\ \hline & 1 \\ & -x_0 & 1 \end{array} \right) \in G \right\}$$

ととり, $N_{\mathbf{A}}$ の非退化指標 ψ を

$$\psi(n(x_0, x_1, x_2, x_3)) = \mathbf{e}_{\mathbf{A}}(x_0 + x_3)$$

で固定する. ここで, $\mathbf{e}_{\mathbf{A}} : \mathbf{A}/\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{C}^{(1)}$ は $\mathbf{e}_{\mathbf{A}}(t_{\infty}) = \exp(2\pi\sqrt{-1}t_{\infty})$ ($t_{\infty} \in \mathbf{R}$) で特徴付けられる additive character である (なおこの ψ の定義は [Mo-2] とは異なっていることを注意しておく).

$\Pi = \otimes_v \Pi_v$ を $G_{\mathbf{A}}$ の尖点保型表現とする. 尖点形式 $F \in \Pi$ に付随する大域的 Whittaker 関数 $\mathcal{W}_F : G_{\mathbf{A}} \rightarrow \mathbf{C}$ を

$$\mathcal{W}_F(g) := \int_{N_{\mathbf{Q}} \backslash N_{\mathbf{A}}} F(ng) \psi(n^{-1}) dn$$

によって定める. 本稿では以下を仮定する:

仮定 Π が generic, すなわちある尖点形式 $F \in \Pi$ に対して $\mathcal{W}_F$ が消えない.

(1.2) $G_{\mathbf{R}}$ の主系列表現. 前節の仮定により各 Π_v も Whittaker 模型を持つことになるが, 序文で述べたようにここでは Π_{∞} が $G_{\mathbf{R}} = GSp(2, \mathbf{R})$ の主系列表現になる場合を扱う.

$P_{\min} = MAN$ を $G_{\mathbf{R}}$ の極小放物部分群の Langlands 分解とする. ここで

$$\begin{aligned} M &= \langle \gamma_0 := \text{diag}(-1, -1, 1, 1), \gamma_1 := \text{diag}(-1, 1, -1, 1), \gamma_2 := \text{diag}(1, -1, 1, -1) \rangle, \\ A &= \{ \text{diag}(a_0 a_1, a_0 a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1}) \mid a_i > 0 \ (i = 0, 1, 2) \}, \\ N &= N_{\mathbf{R}}. \end{aligned}$$

σ を M の character とし, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3) \in \mathbf{C}^3$ に対して $\exp(\nu)$ という A の quasi-character を

$$\exp(\nu)(a) := \prod_{i=0}^2 a_i^{\nu_i}, \text{ for } a = \text{diag}(a_0 a_1, a_0 a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1})$$

によって定義する. このとき, 誘導表現

$$I(P_{\min}; \sigma, \nu) := C^{\infty}\text{-Ind}_{P_{\min}}^G (\sigma \otimes \exp(\nu + \rho) \otimes 1_N)$$

を $G_{\mathbf{R}}$ の主系列表現という. ここで, $\rho = (3/2, 2, 1) \in \mathbf{C}^3$.

さて $K := G_{\mathbf{R}} \cap O(4)$ とおくと, K は $G_{\mathbf{R}}$ の極大コンパクト部分群になり, $K_0 := Sp(2, \mathbf{R}) \cap O(4)$ も $Sp(2, \mathbf{R})$ の極大コンパクト部分群になりユニタリー群 $U(2)$ と同型なる:

$$U(2) \ni A + \sqrt{-1}B \mapsto k_{A,B} := \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in K_0, \quad (A, B \in M(2, \mathbf{R})).$$

よく知られているように

$$\widehat{K}_0 = \{ \tau_{(\lambda_1, \lambda_2)} := \text{Sym}^{\lambda_1 - \lambda_2} \otimes \det^{\lambda_2} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{Z}, \lambda_1 \geq \lambda_2 \}$$

である. $I(P_{\min}; \sigma, \nu)$ の K_0 -type は σ の M 上での値で決まり, 次の4つの場合

- Case 1. $\sigma(\gamma_1) = \sigma(\gamma_2) = 1$,
- Case 2. $\sigma(\gamma_1) = \sigma(\gamma_2) = -1$,
- Case 3. $\sigma(\gamma_1) = 1, \sigma(\gamma_2) = -1$,
- Case 4. $\sigma(\gamma_1) = -1, \sigma(\gamma_2) = 1$

のもとにそれぞれに, (i) $\sigma(\gamma_0) = 1$, (ii) $\sigma(\gamma_0) = -1$ の2つのクラスがあり, 全部で8通りの場合が考えられる.

(1.3) **主結果.** Π に付随する spinor L 関数 $L(s, \Pi)$ は,

$$L(s, \Pi) = \prod_{v < \infty} L(s, \Pi_v).$$

ここで有限素点における L 因子 $L(s, \Pi_v)$, および ϵ 因子 $\epsilon(s, \Pi_v, \psi_v)$ については [TB], [Mo-3] を参照. 無限素点における L 因子を

$$\begin{aligned} L(s, \Pi_{\infty}) &:= \Gamma_{\mathbf{R}}\left(s + \frac{\omega_{\infty} + \nu_1 + \nu_2}{2} + \delta_1\right) \Gamma_{\mathbf{R}}\left(s + \frac{\omega_{\infty} - \nu_1 + \nu_2}{2} + \delta_2\right) \\ &\quad \times \Gamma_{\mathbf{R}}\left(s + \frac{\omega_{\infty} + \nu_1 - \nu_2}{2} + \delta_3\right) \Gamma_{\mathbf{R}}\left(s + \frac{\omega_{\infty} - \nu_1 - \nu_2}{2} + \delta_4\right) \end{aligned}$$

で定める. ここで $\Gamma_{\mathbf{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$, Π の central character ω_{Π} に対し, $\omega_{\Pi}(t) = t^{\omega_{\infty}}$ ($t \in \mathbf{R}_{>0}$) で ω_{∞} を定める. つまり $\omega_{\infty} = 2\nu_0 - \nu_1 - \nu_2$. さらに $\delta_i \in \{0, 1\}$ は

$$(-1)^{\delta_1} = \sigma(\gamma_0), \quad (-1)^{\delta_2} = \sigma(\gamma_0\gamma_1), \quad (-1)^{\delta_3} = \sigma(\gamma_0\gamma_2), \quad (-1)^{\delta_4} = \sigma(\gamma_0\gamma_1\gamma_2).$$

となるようにとる. そして ϵ 因子 $\epsilon(s, \Pi_{\infty}, \psi_{\infty})$ を

$$\epsilon(s, \Pi_{\infty}, \psi_{\infty}) = \sqrt{-1}^{\delta_1+\delta_2+\delta_3+\delta_4} = \begin{cases} 1 & \text{Case 1} \\ -1 & \text{Case 2, 3, 4} \end{cases}$$

によって定める. このとき完備化された spinor L 関数 $\Lambda(s, \Pi)$, ϵ 因子 $\epsilon(s, \Pi)$ を

$$\Lambda(s, \Pi) = L(s, \Pi_{\infty}) \cdot L(s, \Pi), \quad \epsilon(s, \Pi) = \prod_v \epsilon(s, \Pi_v, \psi_v)$$

で定義する. また $F \in \Pi$ に対して,

$$\tilde{F}(g) = \omega_{\Pi}(\nu(g))^{-1} F(g\eta), \quad \eta := \left(\begin{array}{c|c} & 1 \\ \hline & -1 \\ \hline 1 & \end{array} \right) \in G_{\mathbf{Q}}$$

とおくと, $\Pi^{\vee} = \{\tilde{F} \mid F \in \Pi\}$ も $G_{\mathbf{A}}$ の generic な尖点保型表現であって, 無限素点において主系列表現を生成する. 我々の主張は以下の通りである.

定理 $\Pi = \otimes'_v \Pi_v$ を $G_{\mathbf{A}}$ の generic な尖点保型表現であって, Π_{∞} は $G_{\mathbf{R}}$ の既約主系列表現と同型であるとする. このとき完備化された spinor L 関数 $\Lambda(s, \Pi)$ は全 s 平面上の整関数に解析接続され, 関数等式

$$\Lambda(s, \Pi) = \epsilon(s, \Pi) \Lambda(1-s, \Pi^{\vee})$$

を満たす.

§2. 主定理の証明

[Mo-2] と同様に Novodvorsky のゼータ積分を用いて主定理を証明する. Novodvorsky の理論については, [N], [B1, §3], [Mo-3]などを参照されたい. 以下では, [Mo-2], [Mo-3]と同じ用語, 記号を用いる. また簡単のため $\omega_{\infty} = 0$ とする.

(2.1) 局所 Whittaker 関数の明示公式. $v \in \Pi_{\infty} = I(P_{\min}; \sigma, \nu)$ に対する局所 Whittaker 関数を $W_v \in \text{Wh}(\Pi_{\infty}, \psi_{\infty})$ と書く. Π_{∞} がクラス 1 主系列表現の場合 (=Case 1) は Niwa ([Ni]), 一般の場合には Ishii ([I]) によって, (minimal K_0 -type に属するベクトル v に対して) W_v の積分表示式が得られた (cf. Proskurin [P]). そこでは K -Bessel 関数の積を含むような形の公式が与えられているが, 我々の目的のためには [Mo-2] の計算と同様に次のような Mellin-Barnes 型積分表示が有用である (cf. [Mo-1]).

命題 (Case 1) $\omega_{\infty} = 2\nu_0 - \nu_1 - \nu_2 = 0$ とする. $GSp(2, \mathbf{R})$ のクラス 1 主系列表現の spherical vector を v_0 とする. このとき W_{v_0} の動径成分 $W_{v_0}|_{A_0}$ ($A_0 = Sp(2, \mathbf{R}) \cap A$) は次のような

積分表示を持つ.

$$\begin{aligned}
& W_{v_0}|_{A_0}(\text{diag}(a_1, a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1})) \\
&= a_1^2 a_2 \int_{L(\sigma_1)} \frac{ds_1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{L(\sigma_2)} \frac{ds_1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{L(\tau_1)} \frac{dt_1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{L(\tau_2)} \frac{dt_2}{2\pi\sqrt{-1}} \left(\pi \frac{a_1}{a_2}\right)^{-s_1} (\pi a_2^2)^{-s_2} \\
&\quad \times \Gamma\left(\frac{s_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s_1 - t_1 - t_2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s_2 - t_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s_2 - t_2}{2}\right) \\
&\quad \times \Gamma\left(\frac{t_1}{2} + \frac{\nu_1 - \nu_2}{4}\right) \Gamma\left(\frac{t_1}{2} - \frac{\nu_1 - \nu_2}{4}\right) \Gamma\left(\frac{t_2}{2} + \frac{\nu_1 + \nu_2}{4}\right) \Gamma\left(\frac{t_2}{2} - \frac{\nu_1 + \nu_2}{4}\right).
\end{aligned}$$

ここで $\sigma \in \mathbf{R}$ に対して積分路 $L(\sigma)$ は $\mathbf{C}$ 平面において $\sigma - \sqrt{-1}\infty$ から $\sigma + \sqrt{-1}\infty$ に向かう虚軸に平行な直線を意味し, $\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2 \in \mathbf{R}$ は

$$\sigma_1 > \tau_1 + \tau_2, \quad \sigma_2 > \max(\tau_1, \tau_2), \quad \tau_1 > \frac{|\text{Re}(\nu_1 - \nu_2)|}{2}, \quad \tau_2 > \frac{|\text{Re}(\nu_1 + \nu_2)|}{2}$$

を満たすようにとる.

(2.2) 局所ゼータ積分 $Z_N^{(\infty)}(s, W)$ の計算. 前節の公式を用いて局所ゼータ積分 $Z_N^{(\infty)}(s, W)$ ($W \in \text{Wh}(\Pi_\infty, \psi_\infty)$) を計算し, 無限素点における局所関数等式を導く. [Mo-2] と同様に Hoffstein-Murty ([H-M]) に習って, 変数を 1 つ増やして

$$Z_N^{(\infty)}(s, y_1; W) := \int_{\mathbf{R}^\times} d^\times y \int_{\mathbf{R}} dx W(X(x, y; y_1)) |y|^{s-3/2}$$

とおく ($Z_N^{(\infty)}(s, W) = Z_N^{(\infty)}(s, 1; W)$). ここに

$$X(x, y; y_1) = \left(\begin{array}{c|c} yy_1 & \\ \hline y & y_1^{-1} \\ \hline x & 1 \end{array} \right).$$

さらに

$$Z_N^\pm(s, y_1; W) := \int_0^\infty d^\times y \int_{\mathbf{R}} dx W(X(\pm x, \pm y; y_1)) y^{s-3/2}$$

とおけば, $v \in \Pi_\infty$ に対して,

$$\begin{aligned}
Z_N^{(\infty)}(s, y_1; W_v) &= Z_N^+(s, y_1; W_v) + Z_N^-(s, y_1; W_v) \\
&= Z_N^+(s, y_1; W_v) + Z_N^+(s, y_1; W_{\Pi_\infty(\gamma_0)v})
\end{aligned}$$

となる. 従って $\Pi_\infty(\gamma_0)v = -v$ となる場合には上の積分がゼロになってしまうので, $v \in \Pi_\infty$ を適当に選んでゼータ積分が消えないようにしなければならない. 実際後述のように Case 1-(ii) では minimal K -type から少しずらしたところで計算する. これは $GL(2, \mathbf{R})$ の主系列表現, つまり Maass wave form $f(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n e^{2\pi\sqrt{-1}nz}$ において, $a_n = -a_{-n}$ の場合には $\frac{\partial f}{\partial x}(z)$ に対してゼータ積分を計算することの類似である (cf. [B2, 1.9]).

Case 1-(i) $v_0(k_{A,B}) = 1$ (spherical vector) とすると $\sigma(\gamma_0)v_0 = 1$ なので, $Z_N^{(\infty)}(s, y_1; W_{v_0}) = 2Z_N^+(s, y_1; W_{v_0})$ となる. [Mo-2] と同様に $X(x, y; y_1)$ を岩澤分解して W_{v_0} の Mellin-Barnes 型積分表示を代入して, x, y で積分した後, Barnes の (1st-)Lemma を用いて s_2, t_1, t_2 の順に積分を実行すると次を得る:

命題 (Case 1-(i))

$$\frac{Z_N^{(\infty)}(s, y_1; W_{v_0})}{L(s, \Pi_\infty)} = 2^4 \pi^{1/2} y_1^{2-s} \int_{L(\sigma_1)} \frac{ds_1}{2\pi\sqrt{-1}} (\pi y_1)^{-2s_1} \\ \times \frac{\Gamma(s_1 + \frac{\nu_1 - \nu_2}{4}) \Gamma(s_1 - \frac{\nu_1 - \nu_2}{4}) \Gamma(s_1 + \frac{\nu_1 + \nu_2}{4}) \Gamma(s_1 - \frac{\nu_1 + \nu_2}{4})}{\Gamma(s_1 + \frac{s}{2}) \Gamma(s_1 - \frac{s-1}{2})}.$$

従って s_1 の積分の中身は $y_1 = 1$ とすれば $s \leftrightarrow 1-s$ で不変であることが容易に見て取れるので, 局所関数等式

$$\frac{Z_N^{(\infty)}(s, W_{v_0})}{L(s, \Pi_\infty)} = \frac{Z_N^{(\infty)}(1-s, \widetilde{W}_{v_0})}{L(1-s, \Pi_\infty^\vee)}$$

を得る.

注意 1 この s_1 についての積分は Γ 関数の積商で書くことはできない. 実際 Meijer の G 関数という合流型の特殊関数 ($G_{2,4}^{4,0}(y_1)$) になり, 留数計算をすれば一般超幾何関数 ${}_3F_2(y_1)$ の和で記述される. それは Novodvorsky のゼータ積分が「diagonal」な積分になっておらず「unipotent」な積分 ($=x$ での積分) を含むことに起因すると考えられる. またこの $G_{2,4}^{4,0}(y_1)$ は Π_∞ の generalized Bessel model を考えたときの球関数 (の「境界値」) になっていると考えられる ([Mo-4]).

注意 2 講演では, Hoffstein-Murty が $GL(3) \times GL(1)$ のゼータ積分を計算するのに用いた trick をこの場合に適用することでこの命題を証明した. すなわち $Z_N^+(s, y_1; W_v)$ を y_1 で Mellin 変換すると,

$$\int_0^\infty Z_N^+(s, y_1; W_v) y_1^w d^\times y_1 \\ = \int_0^\infty d^\times y_1 \int_0^\infty d^\times y W_v|_{A_0} (\text{diag}(\sqrt{y_1}, \sqrt{y}, 1/\sqrt{y_1}, 1/\sqrt{y})) y_1^{w/2} y^{s-(w+3)/2} \\ \times \int_{\mathbf{R}} dx \exp(2\pi\sqrt{-1}xy) \cdot (1+x^2)^{s-(w+3)/2} \left(\frac{1-\sqrt{-1}x}{\sqrt{1+x^2}} \right)^m.$$

ここで m は

$$\Pi_\infty \left(\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \cos \theta & \sin \theta \\ & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \right) v = e^{\sqrt{-1}m\theta} v$$

によって決まる整数. すると x での積分は $GL(2)$ の Jacquet 積分となり, $GL(2, \mathbf{R})$ の主系列表現に付随する Whittaker 関数の動径成分を表す. 故に全体の積分は $GSp(2) \times GL(2)$ の Novodvorsky 積分の無限成分 (この Rankin-Selberg 積分の詳細については [B1] などを参照) になり, この積分は「diagonal」な積分なのでゼータ積分の計算は比較的容易である. 実際 $GSp(2)$ と $GL(2)$ の尖点保型表現が無限素点とともにクラス 1 主系列表現を生成している場合 ($m=0$ となる) には Γ 関数の積商で書けることが Niwa ([Ni]) により示され

ている:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty Z_N^+(s, y_1; W_{v_0}) y_1^w d^\times y_1 \\ &= C \pi^{-(s+w+2)} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{\nu_1 - \nu_2}{4}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{\nu_1 - \nu_2}{4}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{\nu_1 + \nu_2}{4}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{\nu_1 + \nu_2}{4}\right) \\ & \quad \times \frac{\Gamma\left(\frac{-s+w+2}{2} + \frac{\nu_1 - \nu_2}{4}\right) \Gamma\left(\frac{-s+w+2}{2} - \frac{\nu_1 - \nu_2}{4}\right) \Gamma\left(\frac{-s+w+2}{2} + \frac{\nu_1 + \nu_2}{4}\right) \Gamma\left(\frac{-s+w+2}{2} - \frac{\nu_1 + \nu_2}{4}\right)}{\Gamma(-s + \frac{w+3}{2}) \Gamma(\frac{w+2}{2})}. \end{aligned}$$

従って Mellin-inversion を適用して上の命題を得る.

注意 3 $\Lambda(s, \Pi)$ が entire になることの証明は [Mo-2, §3.4] と同様にできる.

他の Case でも適当なベクトルに対する Whittaker 関数の Mellin-Barnes 型積分表示を用いることで, 局所関数等式を示すことができる. 以下, それぞれの場合にどのベクトルを取って計算したかを述べておく.

Case 1-(ii) Case 1-(i) と同じベクトル v_0 に対してゼータ積分を計算すると先に述べたように $\Pi_\infty(\gamma_0)v_0 = -v_0$ となり, $Z_N^{(\infty)}(s, y_1; W) = 0$ になってしまう. そこで,

$$v'_1(g) := v_0(g, X_{(1,1)}), \quad v''_1(g) := v_0(g, X_{(-1,-1)})$$

とおく. ここで, $v(g, X) := \frac{d}{dt}|_{t=0} v(g \exp(tX))$ ($g \in \mathbf{G}_\mathbf{R}, X \in \text{Lie}(\mathbf{G}_\mathbf{R})$),

$$X_{(\pm 1, \pm 1)} = \left(\begin{array}{cc|cc} & 1 & & \pm\sqrt{-1} \\ 1 & & \pm\sqrt{-1} & \\ \hline & \pm\sqrt{-1} & & -1 \\ \pm\sqrt{-1} & & -1 & \end{array} \right).$$

v'_1, v''_1 はそれぞれ $\tau_{(2,0)}, \tau_{(0,-2)}$ に属するベクトルで $\Pi_\infty(\gamma_0)v'_1 = -v''_1$ となり $Z_N^{(\infty)}(s, y_1; W_{v'_1})$ は Case 1-(i) の場合とほぼ同様に計算できる.

Case 2 Π_∞ の minimal K_0 -type $\tau_{(\pm 1, \pm 1)}$ の元

$$v_0(k_{A,B}) := \det(A + \sqrt{-1}B), \quad v'_0(k_{A,B}) := \det(A - \sqrt{-1}B)$$

を取ると, $\Pi_\infty(\gamma_0)v'_0 = \sigma(\gamma_0)v_0$ となり (i), (ii) のいずれの場合も Case 1-(i) とほぼ同様に計算できる.

Case 3 Π_∞ の minimal K_0 -type は $\tau_{(1,0)}, \tau_{(0,-1)}$ でいずれも表現は 2 次元になる.

$$(v_1(k_{A,B}), v_0(k_{A,B})) := (0, 1)(A + \sqrt{-1}B),$$

$$(v'_1(k_{A,B}), v'_0(k_{A,B})) := (1, 0) \det(A + \sqrt{-1}B)^{-1} (A + \sqrt{-1}B)$$

とすると $\{v_1, v_0\}$ (resp. $\{v'_1, v'_0\}$) は $\tau_{(1,0)}$ (resp. $\tau_{(0,-1)}$) の standard basis となり, $\Pi_\infty(\gamma_0)v_0 = \sigma(\gamma_0)v'_1$, $\Pi_\infty(\gamma_0)v_1 = -\sigma(\gamma_0)v'_0$ を満たす. ゼータ積分の計算は若干の工夫を要するが上と同様の方針でできる.

Case 4 Case 3 と同様に Π_∞ の minimal K_0 -type $\tau_{(1,0)}, \tau_{(0,-1)}$ の standard basis

$$(v_1(k_{A,B}), v_0(k_{A,B})) := (1, 0)(A + \sqrt{-1}B),$$

$$(v'_1(k_{A,B}), v'_0(k_{A,B})) := (0, 1) \det(A + \sqrt{-1}B)^{-1} (A + \sqrt{-1}B)$$

をとればよい.

REFERENCES

- [B1] BUMP, D., The Rankin-Selberg method: a survey. In: Number theory, trace formulas and discrete groups, Academic Press (1989), 49-109.
- [B2] BUMP, D., *Automorphic forms and representations*, Cambridge University Press, (1997).
- [H-M] HOFFSTEIN, J. AND MURTY, M. R., L -series of automorphic forms on $GL(3, R)$, In: Théorie des nombres (Quebec, PQ, 1987), de Gruyter, Berlin, (1989), 398-408.
- [H] HORI, A., Andrianov's L -functions associated to Siegel wave forms of degree two, *Math. Ann.* **303** (1995), 195-226.
- [I] ISHII, T., On principal series Whittaker functions on $Sp(2, \mathbf{R})$, preprint (2002).
- [Ko] KOSTANT, B., On Whittaker vectors and representation theory, *Invent. Math.* **48** (1978), 101-184.
- [Mo-1] MORIYAMA, T., A remark on Whittaker functions on $Sp(2, \mathbf{R})$, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **9**(2002), 627-635.
- [Mo-2] MORIYAMA, T., Entireness of the Spinor L -functions for certain generic cusp forms on $GSp(2)$, *Amer. J. Math.* **126** (2004), 899-920.
- [Mo-3] MORIYAMA, T., $Sp(2, \mathbf{R})$ 上の Whittaker 関数と Novodvorsky のゼータ積分について, 数理研講究録 1281 (2002), 1-13.
- [Mo-4] MORIYAMA, T., this volume.
- [Ni] NIWA, S., Commutation relations of differential operators and Whittaker functions on $Sp_2(\mathbf{R})$, *Proc. Japan Acad.* **71** Ser A.(1995), 189-191.
- [N] NOVODVORSKY, M. E., Automorphic L -functions for symplectic group $GSp(4)$, *Proc. Sympos. Pure Math.* **33-2** (1979), 87-95.
- [P] PROSKURIN, N., Cubic Metaplectic Forms and Theta Functions, *Lect. Notes in Math.* **1677** (1998).
- [TB] TAKLOO-BIGHASH, R., L -functions for the p -adic group $GSp(4)$, *Amer. J. Math.* **122** (2000), 1085-1120.
- [V] VOGAN, D., Gelfand-Kirillov dimension for Harish-Chandra modules, *Invent. Math.* **48** (1978), 75-98.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY, 2-12-1 OH-OKAYAMA, MEGURO-KU, TOKYO 152-8551, JAPAN

E-mail address: taku@math.titech.ac.jp

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SOPHIA UNIVERSITY, 7-1 KIOI-CHO, CHIYODA-KU, TOKYO, 102-8554, JAPAN

E-mail address: moriyama@mm.sophia.ac.jp