

Jump type の確率積分方程式

東工大 理工学 谷 正明

§ 0. 序

次の様な integro-differential operator A :

$$Af(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

$$+ \int_{|u| \leq 1} \left\{ f(x+u) - f(x) - \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) u_i \right\} \frac{\varphi(x, u)}{|u|^{d+\alpha}} du$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{但し, } a = (a_{ij}(x)) : \text{有界可測, 対称, 非負定値} \\ b = (b_i(x)) : \text{有界可測} \\ \varphi(x, u) : \text{非負, 有界可測} \\ 1 \leq \alpha < 2 \end{array} \right.$$

に対し, 次の問題を考えよう.

$$(0) \left\{ \begin{array}{l} \text{operator } A \in \mathcal{L}(C_b^2(R^d)), \text{ その semi-group } \{T_t\} \text{ として} \\ T_t f(x) - f(x) = \int_0^t T_s A f(x) ds \quad \forall f \in C_b^2(R^d) \end{array} \right. \quad (1)$$

しをみたす Markov process が唯一つ存在するか？

我々の目的は、 A の主要項が退化しないという条件の下で
係数 a, b, γ のナメラカサについては、なるべく弱い仮定
で、上の問題を解くことである。上の問題(0)を解くには、
解析的な方法と確率積分方程式を使う方法がある。(0)に対応
する確率積分方程式は、次の形になる

$$(1) \quad x(t) = x(0) + \int_0^t \sigma(x(s)) d\beta(s) + \int_0^t f(x(s)) ds + \int_0^t \int C(x(s), \xi) \gamma(ds, d\xi)$$

但し、 σ は a の non-negative square root, $\beta(t)$ は d -dim
Brown 運動, $\gamma(ds, d\xi)$ は Levy measure $\frac{d\xi}{|\xi|^{d+1}}$ の対称 Cauchy
過程の random measure²⁾, $c(x, \xi)$ は次の関係をみたす写

$$\text{像: } m(x, du) = \int_{\{\xi; C(x, \xi) \in du\}} \frac{d\xi}{|\xi|^{d+1}} \quad \left(\begin{array}{l} x, \xi \in R^d \\ du \subset R^d \\ d\xi \subset R^d \end{array} \right)$$

$$\text{すなわち } m(x, du) = \chi_{(0 < |u| \leq 1)}^{(u)} \frac{\varphi(x, u)}{|u|^{d+\alpha}} du.$$

係数のナメラカサが落ちた時、一意性を示すには、確率積
分方程式を使う方法が有効である。それは、確率積分方程式
の解の一意性を示せば、そのまま問題(0)の一意性が従うから
とて、解析的な方法だけでは、一意性を言うのは難しいと
思われる。一意性を問題にするのは、operator A が、その
Markov process を特徴づけるかどうかに関係するからである

上に述べた我々の目的と密接に関連すると思われる結果について簡単にふれておく。

(a) Stroock - Varadhan [7]

a : positive-definite, bounded continuous, b : bounded measurable, $\varphi = 0$ の case に (1) を使って問題 (0) を解いた,

(b) Tanaka, Tsuchiya, S. Watanabe [cf. [9]]

$a = 0$, $\varphi(x, u) = \varphi(u)$ の case に (1) を扱った。

(c) Komatsu [2]

a : positive definite, bounded continuous の場合に (1) を扱った。

(d) Motoo (cf. [9]) [5]

$a = 0$ の場合, 解析的な方法により Markov process の存在について結果を出した。

以下, 我々は, (1) の解の一意性について考える。(1) の解の一意性については, 2つの定義がある。(cf. [10]).

その一つは従来から良く調べられてきた pathwise uniqueness で, その十分条件として,

$$\int \left| \sigma(x) - \sigma(y) \right|^2 + \left| b(x) - b(y) \right|^2 + \int \left| c(x, \xi) - c(y, \xi) \right|^2 \frac{d\xi}{|\xi|^{d+1}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \leq K |x-y|^2 \quad (\text{Lipschitz condition}) \\ |a(x)|^2 + |b(x)|^2 + \int |c(x, \xi)|^2 \frac{d\xi}{|\xi|^{d+1}} \leq K(1+|x|^2) \end{array} \right.$$

が知られている。(K. Ito [1] cf. [6])

Lipschitz condition をおく = とは、我々の目的にあまり
そわないうし、又、 $c(x, \xi)$ に課された Lipschitz condition は
operator A の係数 $\varphi(x, u)$ にどんな条件を課したのか、
あまり明瞭でない。その点を避けるため、我々は、以下で、
分布の意味での一意性を考える。即ち、 A を定める量 $a, b,$
 φ にどんな条件を仮定すれば、(1) の分布の意味での一意性
が言えるかという = とを考える。その方法は、Stroock -
Varadhan が diffusion type の確率微分方程式の場合に考
え出した idea に沿うものである。

又、その結果として、本尾氏が解析的に構成された Markov
process の一意性がどんな場合に示されるかという = とについ
ても、部分的な解答であるが、与える = とが ~~多~~ なる。

§ 1. Martingale formulation と確率積分方程式.

$s \geq 0$, R^d ; d 次元ユークリッド空間. C^d ; d 次元複素
空間とする

$\Omega_s = D([s, \infty) \rightarrow R^d)$ ($[s, \infty)$ で定義された R^d -値函数

で, 右連続, 左極限をもつもの全体), $\Omega_s \ni \omega \mapsto x_t, \omega(t) = x(t, \omega) = x(t)$

$\mathcal{F}_t^s = \sigma(x(u); s \leq u \leq t)$ ($x(u), s \leq u \leq t$ によって生成される σ -field)

Ω_0 を Ω , $\mathcal{F}_t^0$ を $\mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}_\infty^0$ を $\mathcal{F}$ とかく. $\theta \in \mathbb{C}^d, 0 \leq s \leq t$ に対し

$$X_\theta^s(t) = \exp \left\{ \theta \cdot (x(t) - x(s)) - \int_s^t b(x(\tau)) \theta \cdot d\tau - \frac{1}{2} \int_s^t a(x(\tau)) \theta \cdot \theta d\tau - \int_s^t \int_{\mathbb{R}^d} (e^{\theta \cdot u} - 1 - \theta \cdot u) \frac{q(x(\tau), u)}{|u|^{d+\alpha}} du d\tau \right\}$$

と定義し, $X_\theta^s(t) = X_\theta(t)$ とかく. $\cdot$ は $\mathbb{R}^d$ の内積を表す

$$\mathcal{P}_{s,x} = \left\{ P; \begin{array}{l} P \text{ is probability measure on } (\Omega_s, \mathcal{F}_\infty^s), P(x(s)=x)=1 \\ (X_\theta^s(t), \mathcal{F}_t^s, P)_{t \geq s} \text{ is martingale for } \forall \theta \in \mathbb{R}^d \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{P} = \left\{ P; \begin{array}{l} P \text{ is probability measure on } (\Omega, \mathcal{F}) \\ (X_\theta(t), \mathcal{F}_t, P)_{t \geq 0} \text{ is martingale for } \forall \theta \in \mathbb{R}^d \end{array} \right\}$$

とある. $\mathcal{P}_{0,x}$ を $\mathcal{P}_x$ とかく.

定義 $\forall x \in \mathbb{R}^d$ に対し, $\mathcal{P}_x$ が高々一集合となるとき

(1) の uniqueness が成立するといふ.

我々の目的は (1) の uniqueness が成立するための条件で a, b, φ について, 十々ラカサについてなるべく弱い条件をさがすことである. まず, formulation からいえることは.

Prop 1.1 (i) すべての $x \in \mathbb{R}^d$ について, $\mathcal{P}_x \ni \forall P$ に対し

$P(x(t) \in dx)$ が一意に決まる時 ($\forall t \geq 0$ に対し), (1) の uniqueness が成立.

(ii) 对 $\forall x \in \mathbb{R}^d$ について, " $\mathcal{P}_x \ni P_1, P_2$ である" に絶対連続なものは一致する" ならば " $\mathcal{P}_x$ は高々一点集合" が成立.

Proof. (i) は, $P \in \mathcal{P}_x$ の $\mathcal{F}_s$ に関する regular conditional probability を $Q_\omega(d\omega')$ とすると $Q_\omega \in \mathcal{P}_{s, x(s, \omega)}$ P-a.s. ω が言えて, P のマルコフ性が示せ, uniqueness が分る. (ii) は $\mathcal{P}_x$ が convex set より明らか.

次の Proposition が uniqueness を示すのに、本格的に使われる.

Prop. 2.1 次の仮定 (A) の下で, (1) と (2) は同値.

仮定 (A): $\bullet a(x)$: 有界可測, $\exists A_1, A_2 > 0$ 定数

$$A_1 |0|^2 \leq a(x) 0 \cdot 0 \leq A_2 |0|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, 0 \in \mathbb{R}^d$$

又は $a(x) \equiv 0$

$\bullet b(x)$: 有界可測

$\bullet \exists B_1, B_2 > 0$ 定数 $B_1 \leq \varphi(x, u) \leq B_2 \quad \forall x, u$

$\varphi(x, u)$: 可測.

(1) $P \in \mathcal{P}$

(2) P は probability measure on $(\Omega, \mathcal{F})$ で次の性質を持つ: P に関する Brown 運動 $\beta(t)$ と P に関する対称な

Cauchy過程 $\ell(t)$ が存在して, $x(t)$ は, その $\beta(t)$, $\ell(t)$ に関する (1) をみたす.

但し, P に関する Brown 運動 $\beta(t)$ とは, $\beta(t)$ は continuous path をもち $(\mathcal{F}_t)$ -adapted である

$$E(e^{i\theta \cdot (\beta(t) - \beta(s))} | \mathcal{F}_s) = e^{-\frac{1}{2}(t-s)|\theta|^2}, \quad (t > s, \theta \in \mathbb{R}^d)$$

をみたすもので, $\ell(t)$ が P に関する対称な Cauchy 過程とは, 右連続, 左極限を持つ path からなり, 確率連続で, $(\mathcal{F}_t)$ -adapted である,

$$E(e^{i\theta \cdot (\ell(t) - \ell(s))} | \mathcal{F}_s) = e^{(t-s) \int (e^{i\theta \cdot \xi} - 1 - \frac{i\theta \cdot \xi}{1+|\xi|^2}) \frac{d\xi}{|\xi|^{d+1}}}, \quad (t > s, \theta \in \mathbb{R}^d)$$

をみたすものである.

(注) $A_1 = 0$ かつ $B_1 = 0$ のときは, (1) を仮定して (2) の表現を得る = とは適当に確率空間を拡張すれば可能である.

Prop 1.2 の証明の outline

(1) $\Rightarrow$ (2) のとき示す. 簡単のため, $d=1$ とする.

$$\eta(t) = x(t) - x(0) - \int_0^t b(x(s)) ds$$

とすると, 仮定 (A) の上半分の不等式より, $\forall K > 0, \forall t \geq 0$ について

$$E(e^{K|\eta(t)|}) < +\infty$$

すなわち, $A \in \mathcal{F}_t$, $t \geq 0$ のとき, $E(X_0(t):A)$ は, 0 の正則函数で,

$$(4) \quad \frac{d^k}{d\theta^k} E(X_0(t):A) = E\left(\frac{d^k}{d\theta^k} X_0(t):A\right) \quad k=1, 2, \dots$$

が示される. $(X_0(t), \mathcal{F}_t, P)$ が $\forall \theta \in R^d \Rightarrow$ martingale より (4) で, $k=1, 2$ のときを考えて, $\theta=0$ とおくと, $\eta(t)$ は 2 乗可積分 martingale で,

$$\langle \eta \rangle_t = \frac{1}{2} \int_0^t a(x(s)) ds + \int_0^t \int_{|u| \leq 1} u^2 \frac{\varphi(x(s), u)}{|u|^{1+\alpha}} du ds$$

となり, $\langle \eta \rangle$ は連続な increasing process であるから, $\eta(t)$ は quasi-left continuous である. 従って, $\eta(t)$ は

$$\eta(t) = \eta_1(t) + \eta_2(t)$$

但し, $\eta_1(t)$ は連続な 2 乗可積分 martingale で, $\eta_2(t)$ は compensated sum of jumps of $\eta(t)$ と一意的に分解される.³⁾ ここで, $\eta_2(t)$ の具体的な表現を次の様に与えることができる. $\Delta \eta(s) = \eta(s) - \eta(s-)$, とおき, $t \geq 0$, $E \in \mathcal{B}(R^d)$

$$P^{\eta}(t, E) = \sum_{\substack{s \leq t \\ \Delta \eta(s) \neq 0}} \chi(\Delta \eta(s) \in E)$$

とあけは" 結論を得る. 但し $\bar{c}(x, u)$ は, 仮定 (A) の F で
 $c(x, \xi)$ は ξ の函数として, $|\bar{c}| \leq 1$ になるから, その逆函数
を $\bar{c}$ とし, $\chi_N(x) = 1$ (if $|x| \leq N$), $= 0$ (if $|x| > N$) とする.

§3. 解析的な評価, 一意性についてこの結果.

Prop. 1.1 から分る様に, (I) の uniqueness を示すには

$\mathbb{R}^d \ni \forall f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ に対し, $\mu_\lambda(f) = E\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x(t)) dt\right]$ とし, $\forall f \in C_b(\mathbb{R}^d)$
に對し, 一意に決まることを云ふは"よい". μ_λ は resolvent
に相当するものだから, perturbation の半法により既知の
resolvent と結びつけて一意性を示す. $a > 0$ のとき (I) $a > 0$
(i.e. uniformly elliptic) のときは $\frac{1}{2}\Delta$ を main term に考
え, (II) $a = 0$ のときは α 次の対称安定過程の generator を
main term に考える. どちらも大体同様にやれるが, (II) の
場合について以下説明する. (評価は (I) の場合の方が簡単
である) operator $B^{(a)}$ $B^{(a)}u$ $\tilde{B}^{(a)}$ を次の様に定義する.

$$B^{(a)}f(x) = \int_{|u| \leq 1} \left\{ f(x+u) - f(x) - \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot u_i \right\} \frac{\varphi(0,0)}{|u|^{d+\alpha}} du$$

$$\tilde{B}^{(a)}f(x) = \int_{|u| \leq 1} \left\{ f(x+u) - f(x) - \sum_{i=1}^d \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) u_i \right\} \frac{\varphi(u)}{|u|^{d+\alpha}} + \sum_{i=1}^d c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

但し, $\varphi(u)$ は可測で, $B_1 \leq \varphi(u) \leq B_2$, $\forall u$, B_1, B_2 は

仮定 (A) での定数. $C = (c_1, \dots, c_d)$ は定数ベクトル.

$B^{(\alpha)}$ に対応する加法過程の resolvent を $G_\lambda^{(\alpha)}$, $B^{(\alpha)}$ に対応する加法過程の semigroup を $\tilde{T}_t^{(\alpha)}$ とする. このとき, 次の評価が成り立つ.

Prop. 3.1 $1 \leq \alpha < 2$, $1 < p < \infty$

(i) 定数 $C = C(p, \alpha)$ が存在し (B_1 は depend するが, C_2 は indep)

$$\|\tilde{T}_t^{(\alpha)} f\| \leq C \frac{1}{t^{\frac{1}{\alpha p}}} \|f\|_p \quad \text{for } \forall f \in L^p(\mathbb{R}^d), t > 0. \quad 6)$$

(ii) $p > \frac{\alpha}{\alpha - 1}$ ならば

$$\|G_\lambda^{(\alpha)} f\| \leq C \lambda^{-(1 - \frac{d}{\alpha p})} \|f\|_p \quad \text{for } \forall f \in L^p(\mathbb{R}^d), \lambda > 0$$

(iii) (1) $1 < \alpha < 2$ に対し, $1 < p < \infty$ に対し,

• 定数 $C = C(p, \alpha)$ が存在して,

$$\|\frac{\partial}{\partial x_i} G_\lambda^{(\alpha)} f\|_p \leq C \lambda^{-(1 - \frac{1}{\alpha})} \|f\|_p \quad \text{for } f \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d) \quad 5)$$

• $\forall \alpha' < \alpha$ に対し 定数 $C = C(p, \alpha, \alpha')$ が存在して

$$\begin{aligned} & \|\frac{\partial}{\partial x_i} G_\lambda^{(\alpha)} f(\cdot + u) - \frac{\partial}{\partial x_i} G_\lambda^{(\alpha)} f(\cdot)\|_p \\ & \leq C |u|^{\alpha'(1 - \frac{1}{\alpha})} \lambda^{-(1 - \frac{1}{\alpha})(1 - \frac{\alpha'}{\alpha})} \|f\|_p \quad \text{for } f \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d) \end{aligned}$$

(2) $\alpha = 1$ のとき $1 < p < \infty$ に対し 定数 $C = C(p)$ が存在し

$$\|\frac{\partial}{\partial x_i} G_\lambda^{(1)} f\|_p \leq C \|f\|_p \quad \text{for } \forall f \in C_K^\infty(\mathbb{R}^d), \forall \lambda > 0$$

Proof. transition probability $\tilde{T}_t^{(\alpha)}(dy)$ の Fourier 変換に対し, 次の評価が成り立つことが分る.

$$\widehat{T}_t^{(a)}(\xi) = \int_{R^d} e^{iy \cdot \xi} \widetilde{T}_t^{(a)}(dy) \quad \text{と おく と} \quad \exists K > 0, \exists C > 0 \text{ 定数}$$

$$|\widehat{T}_t^{(a)}(\xi)| \leq K e^{-Ct|\xi|^\alpha} \quad \forall t > 0, \xi \in R^d,$$

従って $\widetilde{T}_t^{(a)}(dy)$ は Lebesgue 測度に関する density $p^{(a)}(t, y)$ を持ち、

$$\|p^{(a)}(t, \cdot)\|_q \leq \text{const.} \left(\|\widehat{T}_t^{(a)}\|_1 \right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{を使えば、後は}$$

Young の不等式より明らか、 $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right)$. (ii) は (i) より従う. (iii) (i) は本尾氏が [5] で sup norm の時行った方法が適用できる. (iii) (ii) については [8] 参照.

以後 仮定 (A) は常に仮定し、 $a=0$ の場合を考える.

$T_\lambda^{(a)} = (A - B^{(a)})G_\lambda^{(a)}$ とおく. 方程式 (1) より, Itô の公式を使って, $P \in \mathcal{P}_x$ (x : 任意に fix, P も任意に fix) に対し定義された μ_λ について, 次式を得る.

$$\mu_\lambda (I - T_\lambda^{(a)})h = G_\lambda^{(a)} h(x) \quad \forall h \in C_K^\infty$$

従って, μ_λ が $L^p_p(R^d)$ 上の bounded linear functional で, $\|T_\lambda\|_p < 1$ ということになり, 適当な p に対して証明できれば, μ_λ が一意に定まり, (1) の uniqueness が示される.

そのため

$$\phi_m(s) = \frac{k}{2^n} \quad \text{if } \frac{k}{2^n} \leq s < \frac{k+1}{2^n}, \quad n=1, 2, \dots, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

とあるとき, $\exists \{n'\} \subset \{n\}$, $\exists s_0 \in [0, 1]$:

$$(*) \quad x_{n'}(t) = x(0) + \int_0^t b(x(\phi_{n'}(s-s_0) + s_0)) ds \\ + \int_0^t \int c(x(\phi_{n'}(s-s_0) + s_0), \xi) g(ds, d\xi)$$

と定義すれば, $x_{n'}(t) \rightarrow x(t)$ in Prob. for $\forall t$ as $n' \rightarrow \infty$.
が [8] と同様の方法で示される.

$$\mu_\lambda^{(n')} f = E \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x_{n'}(t)) dt \right] \quad f \in L^p(R^d)$$

とあると $\mu_\lambda^{(n')}$ は仮定 (A) の下で "bounded linear functional on $L^p(R^d)$ " となる. 実際, 次の様に表示される. 簡単のため $s_0 = 0$, $n' = n$ とする.

$$\left| E \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(x_n(t)) dt \right] \right| \leq \sum_{k=1}^\infty \left| E \left[\int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} e^{-\lambda t} f(x_n(t)) dt \right] \right|$$

まず,

$$|I_k| = \left| E \left[\int_0^{\frac{k}{2^n}} e^{-\lambda t} f(x_n(t)) dt \right] \right|$$

$$= \left| \int_0^{\frac{k}{2^n}} e^{-\lambda t} dt E \left[f(x + b(x) \cdot t + \int_0^t \int c(x, \xi) g(ds, d\xi)) \right] \right|$$

とある, $x + b(x) \cdot t + \int_0^t \int c(x, \xi) g(ds, d\xi)$ は Lévy
measure での $X_{(0 < |u| \leq 1)} \varphi(x, u) / |u|^{d+\alpha} du$ (x fixed) の

加法過程より Prop 3.1 (i) から.

$$|I_1| \leq C \int_0^{\frac{1}{2^n}} e^{-\lambda t} \frac{1}{t^{\frac{d}{2p}}} \|f\|_p dt \leq C(n, 1) \|f\|_p \quad \text{if } p > \frac{d}{2}$$

以後 $p > \frac{d}{2}$ なる $1 < p < \infty$ を固定する。

$$\begin{aligned} I_2 &= E \left[\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} e^{-\lambda t} f(x_n(t)) dt \right] \\ &= \int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{n-1}}} e^{-\lambda t} dt E \left[f \left(x + b(x) \cdot \frac{1}{2^n} + b \left(x \left(\frac{1}{2^n} \right) \right) \left(t - \frac{1}{2^n} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_0^{\frac{1}{2^n}} c(x, \xi) g(ds, d\xi) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\frac{1}{2^n}}^t c \left(x \left(\frac{1}{2^n} \right), \xi \right) g(ds, d\xi) \right) \right] \end{aligned}$$

$$= E[\dots] = E[E[\dots | \mathcal{F}_{\frac{1}{2^n}}]] \quad \text{where } \dots = \dots$$

$$g(ds, d\xi) \perp \mathcal{F}_{\frac{1}{2^n}} \quad \text{if } ds \subset \left(\frac{1}{2^n}, t \right]$$

を使うと

$$E[\dots] = \int_{\Omega} P(dw') \int_{\Omega} P(dw'') f \left[Y_t(w') + \int_{\frac{1}{2^n}}^t c \left(x \left(\frac{1}{2^n} \right), w' \right), \xi \right) g(ds, d\xi, w'') \right]$$

$$\begin{aligned} \text{where } Y_t(w') &= x + b(x) \frac{1}{2^n} + b \left(x \left(\frac{1}{2^n} \right), w' \right) \left(t - \frac{1}{2^n} \right) \\ &\quad + \int_0^{\frac{1}{2^n}} c(x, \xi) g(ds, d\xi, w') \end{aligned}$$

となり, やはり Prop 3.1 (i) より

$$\left| \int_{\Omega} P(dw'') f(Y_t(w') + \int_{\frac{1}{2^n}}^t C(x(\frac{1}{2^n}, w'), \xi) g(ds, d\xi, w'')) \right|$$

$$\leq \text{Const.} \frac{1}{(t - \frac{1}{2^n})^{\frac{d}{d_p}}} \|f\|_p.$$

従って,

$$|I_2| \leq C(n, 2) \|f\|_p$$

以下同様に評価でき, $(n \in \sum_{k=1}^{\infty} C(n, k) < +\infty$ に注意すれば).

$$|\mu_{\lambda}^{(n)} f| \leq C(n) \|f\|_p \quad (\text{if } \infty > p > \frac{d}{\alpha})$$

を得る.

よって, $C(n)$ が n に independent になる様子を確かめたい. 一般に, 仮定(A)の下で云えるかどうか. また証明できないので, 後で更に仮定を置かねばならない, その事情をみするため, $\alpha > 1$ の場合に計算を行ってみよう.

(*) の式に Itô の公式を適用して, 次の式を得る.

$h \in C_K^{\infty}(R^d)$ に対し (簡単のため $s_0 = 0$, $n \leq n$ とする)

$$\mu_{\lambda}^{(n)}(h) = G_{\lambda}^{(\alpha)} h(x) + E \left[\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} b(x(\phi_n(t)) \cdot \nabla G_{\lambda}^{(\alpha)} h(x_n(t)) dt \right]$$

$$+ E \left[\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt \int_{|u| \leq 1} \left\{ G_{\lambda}^{(\alpha)} h(x_n(t) + u) - G_{\lambda}^{(\alpha)} h(x_n(t)) - \nabla G_{\lambda}^{(\alpha)} h(x_n(t)) \cdot u \right\} \right]$$

$$x \left\{ \varphi(x(\phi_n(t)), u) - \varphi(0, 0) \right\} \frac{du}{|u|^{d+\alpha}} \Bigg] = I_1 + I_2 + I_3$$

$$|I_1| \leq C(p, \alpha) \lambda^{-(1-\frac{d}{dp})} \|f\|_p$$

$$|I_2| \leq \|b\| \mu_\lambda^{(n)}(|\nabla G_\lambda^{(u)} h|) \leq \|b\| \|\mu_\lambda^{(n)}\|_p C(p, \alpha) \lambda^{-(1-\frac{1}{p})} \|h\|_p$$

$$\begin{aligned} I_3 &= E \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \left\{ \sum_{|u| \leq 1} \varphi(x(\phi_n(t)), u) - \varphi(x(\phi_n(t)), 0) \right\} \frac{du}{|u|^{d+\alpha}} \right] \\ &\quad + E \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \left\{ \sum_{|u| \leq 1} \varphi(x(\phi_n(t)), 0) - \varphi(0, 0) \right\} \frac{du}{|u|^{d+\alpha}} \right] \\ &= I_3^1 + I_3^2 \quad \text{とある.} \end{aligned}$$

$|I_3^1|, |I_3^2|$ を評価するために次の仮定を置く:

$$\begin{cases} |\varphi(x, u) - \varphi(x, 0)| \leq C |u|^\delta \quad \text{for some } \delta > 0 \\ |\varphi(x, 0) - \varphi(0, 0)| < \frac{B_1}{2} \\ \forall x, \forall u \quad |x| \leq 2 \text{ 或 } \bar{x}. \end{cases}$$

とある.

$$\begin{aligned} |I_3^1| &\leq \int_{|u| \leq 1} \frac{C du}{|u|^{d+\alpha-\delta}} E \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \left| G_\lambda^{(u)} h(x_n(t)+u) - G_\lambda^{(u)} h(x_n(t)) - \nabla G_\lambda^{(u)} h(x_n(t)) \cdot u \right| \right] \\ &= \int_{|u| \leq 1} \frac{C du}{|u|^{d+\alpha-\delta}} \mu_\lambda^{(n)} \left(|G_\lambda^{(u)} h(\cdot+u) - G_\lambda^{(u)} h(\cdot) - \nabla G_\lambda^{(u)} h(\cdot) \cdot u| \right) \end{aligned}$$

$$\leq \int_{|u| \leq 1} \frac{2C \, du}{|u|^{d+\alpha-\delta-\alpha''}} \|\mu_\lambda^{(n)}\|_p \|h\|_p \lambda^{-(1-\frac{1}{\alpha})(1-\frac{\alpha'}{\alpha})} \quad (\text{Prop. 3.1 (iii) (i)})$$

$$\text{但し, } \alpha'' = 1 + \alpha'(1 - \frac{1}{\alpha}).$$

$\delta > 0$ に注意して, $d + \alpha - \delta - \alpha'' < 1$ であり, $1 = \alpha' \in \mathbb{R}$ と
 $\alpha = \frac{1}{\alpha'} < 1$ である (① $\alpha'' \uparrow \alpha$ as $\alpha' \uparrow \alpha$)

$$\begin{aligned} \text{又, } |I_3|^2 &\leq \frac{1}{\varphi(0,0)} E \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \left| \varphi(x(\phi_n(t)), 0) - \varphi(0,0) \right| \left| B^{(\alpha)} G_\lambda^{(\alpha)} h(x_n(t)) \right| \right] \\ &\leq \frac{\sup_x |\varphi(x,0) - \varphi(0,0)|}{\varphi(0,0)} \mu_\lambda^{(n)} (|B^{(\alpha)} G_\lambda^{(\alpha)} h|) \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon \|\mu_\lambda^{(n)}\|_p \|h\|_p$$

$$\text{但し, } \varepsilon \equiv \frac{2 \cdot \sup_x |\varphi(x,0) - \varphi(0,0)|}{B_1} < 1.$$

$$\text{従って, } |\mu_\lambda^{(n)} h| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3'| + |I_3| \quad \text{より}$$

λ_0 を十分大きくとれば, $\forall \lambda \geq \lambda_0$ に対して, $(\lambda_0 = \lambda_0(p, d, \alpha, \delta))$

$$\|\mu_\lambda^{(n)}\|_p \leq \frac{C(p, \alpha) \lambda^{-(1-\frac{d}{2p})}}{1 - \left\{ \|b\| C(p, \alpha) \lambda^{-(1-\frac{1}{\alpha})} + \int_{|u| \leq 1} \frac{2C \, du}{|u|^{d+\alpha-\delta-\alpha''}} \cdot \lambda^{-(1-\frac{1}{\alpha})(1-\frac{\alpha'}{\alpha})} + \varepsilon \right\}}$$

$$\mu_\lambda^{(n)} \rightarrow \mu_\lambda \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{weakly}$$

としよう。これを使えば, $\|\mu_\lambda^{(n)}\|_p$ をおさえて, 同様に, $\|\mu_\lambda\|_p$

もあえらる。

$\varphi(x, u)$ についての全く同じ仮定の下で, 上と同様タヤリ
方で, $\lambda \geq \lambda_0$ のとき $\|T_\lambda\|_p < 1$ が示される

以上まとめて定理を述べる前に, 仮定をきょうり述べる。

仮定 (B, α): ① $1 < \alpha < 2$ のとき

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ |u| \leq 1}} \frac{|\varphi(x, u) - \varphi(x, 0)|}{|u|^\delta} < +\infty \quad \text{for some } \delta > 0$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\varphi(x, 0) - \varphi(0, 0)| < \frac{B_1}{2}$$

② $\alpha = 1$ のとき 適当な ~~XXXX~~ $p > d$ に對し

$$\varepsilon_1 = \|b\|_{C(p)}, \quad \varepsilon_2 = \frac{2}{B_1} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\varphi(x, 0) - \varphi(0, 0)|$$

$$\varepsilon_3 = \int_{|u| \leq 1} \frac{2C(p)}{|u|^{d-\delta}} du, \quad \varepsilon = \varepsilon(\delta) = \frac{1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\varepsilon_3} \quad \text{とあるとき}$$

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < 1 \quad \text{かつ}$$

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ |u| \leq 1}} \frac{|\varphi(x, u) - \varphi(x, 0)|}{|u|^\delta} < \varepsilon(\delta) \quad \text{for some } \delta > 0$$

但し, $C(p)$ は Prop. 3.1 (iii) の④で定まる定数。

このとき, 次の定理が成立する。

Theorem (I) $\alpha > 0$ (i.e. unif. elliptic) のとき, 仮定 (A) 及び α が連続ならば, (1) の uniqueness が成立.
 (II) $\alpha = 0$ のとき, 仮定 (A) 及び 仮定 (B, α) の下で (1) の uniqueness が成立.

[注]

- 1) $C_b^2(R^d)$ は, R^d で定義された 2 階迄の微係数があり, 有界連続な関数の全体を表す
- 2) 定義については, [1] 又は [6] 参照
- 3) 定義及び詳細は [4] 参照
- 4) $C_b(R^d)$ は, R^d で定義された有界連続な関数全体を表す.
- 5) $C_K^\infty(R^d)$ は, R^d で定義された無限回連続微分可能で, compact support をもつ関数全体
- 6) $\|\cdot\|$ は sup norm, $\|\cdot\|_p$ は Lebesgue measure に関する L^p -norm を表す.

文 献

- [1] K. Ito : Mem. Amer. Math. Soc. 4 (1954)
- [2] T. Komatsu : 確率論セミナー 四月シンポジウムにおける Short-Communication (1971)
- [3] H. Kunita - S. Watanabe : Nagoya Math. Jour.

30 (1967)

[4] P. A. Meyer : Probability and Potentials

Blaisdell Publ. Co. (1966)

[5] M. Motoo : PSG サマーセミナー講演 (1969)

[6] A. V. Skorohod : Studies in the theory of random processes (英訳, Addison Wesley 1965)

[7] D. W. Stroock - S. R. S. Varadhan : Comm. Pure Appl. Math.

XXII (1969)

[8] M. Tsuchiya : Jour. Math. Kyoto Univ. 10 (1970)

[9] ——— : 教理研 講究録 112 (1971)

[10] T. Yamada - S. Watanabe : Jour. Math. Kyoto Univ.

11 (1971)