

## 慣性接続要素を含む構造物の定点理論を用いた構造制御

—慣性接続要素と粘性ダンパーが直列接続された場合—

正会員 ○村上 翔\*1 同 吉富信太\*2 同 辻 聖晃\*2 同 竹脇 出\*2

## 2. 構造—2. 振動

## 慣性接続要素, 定点理論, 変形制御, 加速度制御, ダンパー減衰力

## 1. 序

最近、2節点間の相対加速度に対して有効となる慣性接続要素と呼ばれる新しいタイプのダンパーが精力的に研究開発されている。この慣性接続要素と粘性要素を組合せた新しいタイプのダンパーについての研究が行われているが、両者を直列タイプで用いているものはほとんど見られない。本論文では粘性要素と慣性接続要素を直列に接続した場合にも定点が存在することを示し、定点理論に基づいた応答制御手法について考察する。

## 2. C-Z-k 直列型モデル

本論文では図1に示すようなダッシュポット、慣性接続要素、支持ばねの3要素を直列接続したC-Z-k直列型モデルを扱う。また制御効率の比較のため、ダッシュポットと支持ばねを直列接続したC-k直列型モデルの定点制御にも言及する。

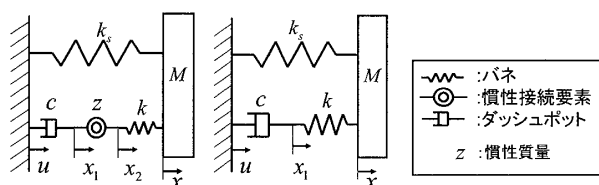


図1 C-Z-k 直列型モデルと C-k 直列型モデル

以下では質量比  $\mu = z/M$  と剛比  $\kappa = k/k_s$  の変化に伴う質点の変位及び加速度の地動に対する伝達関数の変化について考察する。

この系の動的な釣合式は(1)、(2)式となる。

$$M\ddot{x} + k_s(x-u) + k(x-x_2) = 0 \quad (1)$$

$$c(\dot{x}_1 - u) = z(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = k(x - x_2) \quad (2)$$

3. 地動変位に対する変位伝達関数  $H_d$  の最大値を最小化する制御

本節では建物の変形に相当する質点の地動変位に対する相対変位を制御する手法（以下制御Iと

する）について考察する。

(1), (2) 式において  $x = Xe^{i\omega t}$ ,  $x_1 = X_1e^{i\omega t}$ ,  $x_2 = X_2e^{i\omega t}$ ,  $u = Ue^{i\omega t}$  と置くと(3), (4)式を得る。

$$-\omega^2 MX + k_s(X-U) + k(X-X_2) = 0 \quad (3)$$

$$i\omega c(X_1-U) = -\omega^2 z(X_2-X_1) = k(X-X_2) \quad (4)$$

(4)式を  $X_1, X_2$  について解くと(5), (6)式を得る。

$$X_2 = \frac{1}{k - \omega^2 z} (kX - \omega^2 z X_1) \quad (5)$$

$$X_1 = \left( \frac{-\omega^2 z k}{k - \omega^2 z} + i\omega c \right)^{-1} \left\{ k \left( 1 - \frac{k}{k - \omega^2 z} \right) X + i\omega c U \right\} \quad (6)$$

これを(3)式に代入すると(7)式を得る。

$$\begin{aligned} & -\omega^2 MX + k_s(X-U) + i\omega c \left[ \left( \frac{-\omega^2 z k}{k - \omega^2 z} + i\omega c \right)^{-1} \times \right. \\ & \left. \left\{ k \left( 1 - \frac{k}{k - \omega^2 z} \right) X + i\omega c U \right\} - U \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \left\{ (1 - \lambda^2) + 2ih\lambda \frac{\kappa \left( 1 - \frac{1}{1 - \lambda'^2} \right)}{1 - \lambda'^2 \kappa + 2ih\lambda} \right\} (X-U) \\ & = \left[ \lambda^2 + 2ih\lambda \left\{ \frac{-\kappa \left( 1 - \frac{1}{1 - \lambda'^2} \right) - 2ih\lambda}{1 - \lambda'^2 \kappa + 2ih\lambda} + 1 \right\} \right] U \quad (7) \end{aligned}$$

但し  $\lambda = \omega/\omega_s$ ,  $\lambda' = \omega/\omega_a$ ,  $\omega_s^2 = k_s/M$ ,  $\omega_a^2 = k/z$ ,  $h = c/(2\sqrt{Mk_s})$  とする。

従ってこの系の地動変位に対する変位伝達関数  $H_d$  は(8)式となる。

$$\begin{aligned} H_d &= \left| \frac{X-U}{U} \right| \\ &= \left| \frac{-\lambda'^2 \lambda^2 + i \frac{2h}{\kappa} \lambda^3 (1 - \lambda'^2)}{-\lambda'^2 (1 - \lambda^2) + i \frac{2h}{\kappa} \lambda \{ (1 - \lambda'^2)(1 - \lambda^2) - \kappa \lambda'^2 \}} \right| \quad (8) \end{aligned}$$

$\mu = 0.5$ ,  $\kappa = 0.5$  の下で  $h = 0 \sim \infty$  で変化させたときの  $H_d$  は図2のようになり、定点の存在が確認で

Vibration control of structures with inertial dampers by fixed point method -Case of serially connected inertial damper and viscous damper-

MURAKAMI Sho, YOSHITOMI Shinta, TSUJI Masaaki and TAKEWAKI Izuru

きる。またこの定点は(8)式において  $h=0, h=\infty$  とした 2 曲線の交点に一致し、 $H_d$  の  $h$  に対する定点での  $\lambda$  について(9)式を得る。

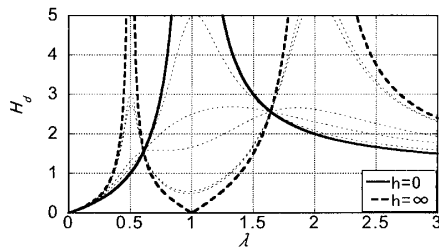


図2  $h=0 \sim \infty$  で変化させたときの  $H_d$

$$\frac{\lambda^2}{(1-\lambda^2)} = -\frac{\lambda^2(1-\lambda'^2)}{\{(1-\lambda^2)(1-\lambda'^2) - \kappa\lambda'^2\}}$$

$$\Leftrightarrow \lambda^4 - \left(\gamma + \frac{\kappa+2}{2}\right)\lambda^2 + \gamma = 0 \quad (9)$$

ここで  $\gamma = \lambda^2/\lambda'^2$  である。これは質量比  $\mu$ 、剛比  $\kappa$  を用いて  $\kappa/\mu$  と表すこともできる。

定点における  $\lambda$  は(9)式の 2 つの正の解となる。

(9)式を  $\lambda^2$  について解いた 2 解を小さい順に  $\lambda_1^2, \lambda_2^2$  と置くと、2 定点の高さが揃う条件は(10)式で与えられる。

$$\lambda_1^2/(1-\lambda_1^2) = -\lambda_2^2/(1-\lambda_2^2)$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - 2\lambda_1^2\lambda_2^2 = 0 \quad (10)$$

(10)式に(9)式の解と係数の関係を代入することで 2 定点の高さが揃う条件として(11)式を得る。

$$\left(\gamma + \frac{\kappa+2}{2}\right) - 2\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = (\kappa+2)/2 \quad (11)$$

(11)式より制御 I における最適質量比  $\mu_{dopt}$  と剛比  $\kappa$  の関係は(12)式となる。ことがわかる。

$$\mu_{dopt} = 2\kappa/(\kappa+2) \quad (12)$$

制御 I における最適無次元振動数比  $\lambda_{dopt}$  は(9)式に(11)式を代入して得られる  $\lambda^2$  の 2 解の root として(13)式のように求まり、このときの定点の高さ  $H_{dopt}$  は(10)式の最左辺と(13)式より(14)式のように求められる。

$$\lambda_{dopt} = \sqrt{(\kappa+2 \pm \sqrt{\kappa(\kappa+2)})}/2 \quad (13)$$

$$H_{dopt} = \sqrt{(\kappa+2)/\kappa} \quad (14)$$

C-k 直列型モデルの変位伝達関数の定点は 1 点のみ存在し、またその高さは  $(\kappa+2)/\kappa$  であるため、制御 I においては C-Z-k 直列型モデルの方が定点の高さが抑えられていることがわかる。

(8)式で  $h=0$  とした曲線は  $\lambda < 1$  で単調増加、 $\lambda >$

1 で単調減少し、各領域に一つずつ定点が存在する。これらを順に定点 1、2 とすると、(9)式より 2 定点の  $\lambda$  座標  $\lambda_{df}$  は(15)式のように表すことができる。但し  $\gamma_{dopt}$  には(11)式の最右辺の値を代入し、 $\delta$  は  $(\gamma - \gamma_{dopt})/2$  を表すものとする。

$$\lambda_{df} = \sqrt{\gamma_{dopt} + \delta \pm \sqrt{\gamma_{dopt}(\gamma_{dopt} - 1) + 2\delta(\gamma_{dopt} - 1) + \delta^2}} \quad (15)$$

(15)式より  $\delta > 0$  では定点 1 が、 $\delta < 0$  では定点 2 が制御 I の定点よりも高くなる。ことがわかる。

定点が  $H_d$  のピーク点となる条件は(16)式で与えられ、これを  $h$  について解けば 2 実解が得られる。これらは(13)式の  $\lambda_{dopt}$  及び  $\gamma_{dopt}$  の関数として表される。この相加平均より制御 I における最適無次元減衰定数  $h_{dopt}$  が求められ、これは剛比  $\kappa$  の関数となる。

$$\left. \frac{dH_d}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_{dopt}} = 2\lambda \left. \frac{dH_d}{d(\lambda^2)} \right|_{\lambda=\lambda_{dopt}} = 0 \quad (16)$$

#### 4. 加速度伝達関数 $H_a$ の最大値を最小化する制御

次に建物に作用する力と関係する質点の加速度を制御する手法（以下制御 II とする）について考察する。加速度伝達関数  $H_a$  は次式で与えられる。

$$H_a = \left| \frac{\ddot{X}}{\dot{U}} \right| = \left| \frac{-\omega^2 X}{-\omega^2 U} \right| = \left| 1 + \frac{X-U}{U} \right|$$

$$= \left| \frac{-\lambda'^2 + i\frac{2h}{\kappa}\lambda\{1-(1+\kappa)\lambda'^2\}}{-\lambda'^2(1-\lambda^2) + i\frac{2h}{\kappa}\lambda\{(1-\lambda'^2)(1-\lambda^2) - \kappa\lambda'^2\}} \right| \quad (17)$$

これより定点における  $\lambda$  について次式を得る。

$$\frac{-\lambda'^2}{-\lambda'^2(1-\lambda^2)} = -\frac{1-(1+\kappa)\lambda'^2}{(1-\lambda'^2)(1-\lambda^2) - \kappa\lambda'^2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda^4 - 2\frac{\gamma+1+\kappa}{2+\kappa}\lambda^2 + \frac{2\gamma}{2+\kappa} = 0 \quad (18)$$

3 節の(9)式と同様にして、2 定点の高さが揃う条件が(19)式のように求められる。

$$\frac{1}{(1-\lambda_1^2)} = -\frac{1}{(1-\lambda_2^2)} \Leftrightarrow 2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = 0 \quad (19)$$

(19)式に(18)式の解と係数の関係を代入して(20)式を得る。

$$2 - 2\frac{\gamma+1+\kappa}{2+\kappa} = 0 \Leftrightarrow \gamma = 1 \quad (20)$$

(20)式より制御 II での最適質量比  $\mu_{aopt}$  と剛比  $\kappa$  の関係について(21)式を得る。

$$\mu_{aopt} = \kappa \quad (21)$$

制御Ⅱにおける最適無次元振動数比 $\lambda_{aopt}$ と定点の高さ $H_{aopt}$ は3節と同様にして(22), (23)式のように求められる。

$$\lambda_{aopt} = \sqrt{1 \pm \sqrt{\kappa/(\kappa+2)}} \quad (22)$$

$$H_{aopt} = \sqrt{(\kappa+2)/\kappa} \quad (23)$$

(18)式より求まる2定点の $\lambda$ 座標 $\lambda_{af}$ は(24)式のように表すことができ、3節と同様に、このとき2定点の最大高さが最小となっていることがわかる。但し $\delta_a = (\gamma-1)/(\kappa+2)$ とする。

$$\lambda_{af} = \sqrt{1 + \delta_a + \sqrt{\kappa/(\kappa+2) + \delta_a^2}} \quad (24)$$

C-k 直列型モデルの加速度伝達関数の定点は一点のみ存在し、またその高さは $(\kappa+2)/\kappa$ であるため、制御ⅡにおいてもC-Z-k 直列型モデルの方が定点の高さが抑えられていることがわかる。

制御Ⅱにおける最適無次元減衰定数 $h_{aopt}$ は(25)式の2実解の相加平均として求められ、 $h_{dopt}$ 同様剛比 $\kappa$ の関数となる。

$$\left. \frac{dH_a}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_{aopt}} = 2\lambda \left. \frac{dH_a}{d(\lambda^2)} \right|_{\lambda=\lambda_{aopt}} = 0 \quad (25)$$

## 5. 変位伝達関数の最大値を最小化したときの支持部材の負担力

建物にダンパーを設置する場合にはダンパーの最大減衰力は支持部材特性に依存するため、次に支持部材の負担力を考える。まず支持ばねの変形の伝達関数 $H_d^a$ を考える。

$$H_d^a = \left| \frac{X - X_2}{U} \right| \quad (26)$$

ここで(5)式を(27)式のように書き換えることで(26)式は(28)式のように変形できる。

$$X_2 = \frac{1}{k - \omega^2 z} \left( kX - \frac{-\omega^2 z k}{k - \omega^2 z} X + i\omega c U \right) \\ = \frac{\left( -\lambda'^2 + i \frac{2h}{\kappa} \lambda \right) X + \left( -i \frac{2h}{\kappa} \lambda \lambda'^2 \right) U}{\left\{ -\lambda'^2 + i \frac{2h}{\kappa} \lambda (1 - \lambda'^2) \right\}} \quad (27)$$

$$H_d^a = \left| \frac{-i \frac{2h}{\kappa} \frac{1}{\gamma} \lambda^3}{\left\{ -\frac{1}{\gamma} \lambda^2 + i \frac{2h}{\kappa} \lambda \left( 1 - \frac{1}{\gamma} \lambda^2 \right) \right\}} \right| \left| \frac{X - U}{U} \right| \quad (28)$$

(28)式は制御Ⅰ, Ⅱとも共通であり、各制御における支持ばねの負担力を考えるには、(28)式に各制御で剛比 $\kappa$ に対して求められる剛比と質量比の比 $\gamma$ 及び最適無次元減衰定数 $h_{dopt}$  (または $h_{aopt}$ )を代入すればよい。これは各制御における支持ばねの変形の地動に対する応答倍率に相当する。これに剛比 $\kappa$ を乗じたものが支持ばねの負担力の指標であると考えられる。尚この値は剛比 $\kappa$ と主体構造の固有円振動数に対する無次元振動数比 $\lambda$ の関数となる。

## 6. 剛比 $\kappa$ に対する諸量のパラメトリック解析

前節までで明らかとなった各制御における伝達関数や最適質量比、無次元減衰定数、支持ばねの負担力の指標について、剛比 $\kappa$ を変化させたときの変化を以下に示す。

### ①伝達関数の最大値と質量比

各制御において剛比 $\kappa$ を変化させたときの伝達関数の最大値 $H_{dopt}$ と $H_{aopt}$ は(14), (23)式より完全に一致するが、これと合わせて制御に必要な最適質量比 $\mu_{dopt}$ ,  $\mu_{aopt}$ を図3に示す。

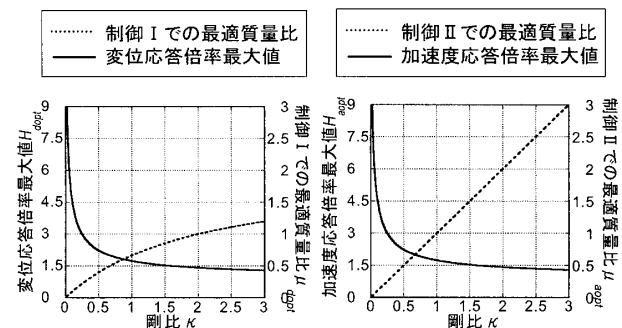


図3 各制御における伝達関数の最大値と最適質量比

### ②最適無次元減衰定数

各制御において剛比 $\kappa$ を変化させたときの最適無次元減衰定数を図4に示す。

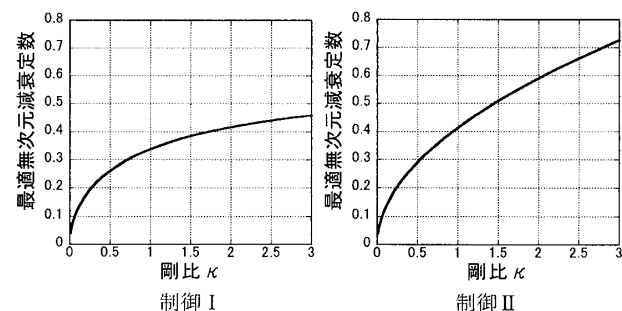


図4 各制御における最適無次元減衰定数

### ③支持部材の負担力

5節で扱った支持ばねの負担力の指標について、剛比 $\kappa$ を変化させたときの無次元振動数比 $\lambda$ に関する最大値を図5に示す。

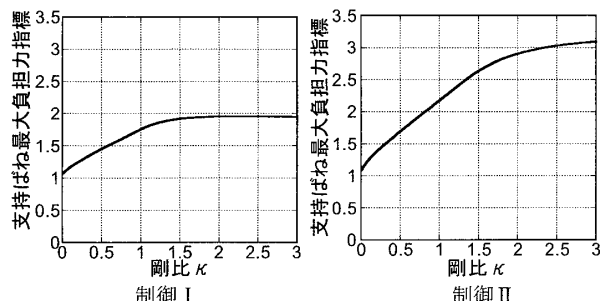


図5 各制御における支持ばねの最大負担力の指標

図5に示す支持部材の負担力の指標は支持部材に作用する力に対応するものであるが、ダンパー性能にとっては変形量そのものが重要となる場合もある。(28)式に各制御における諸量を代入したものについて、剛比 $\kappa$ を変化させたときの無次元振動数比 $\lambda$ に関する最大値を図6に示す。

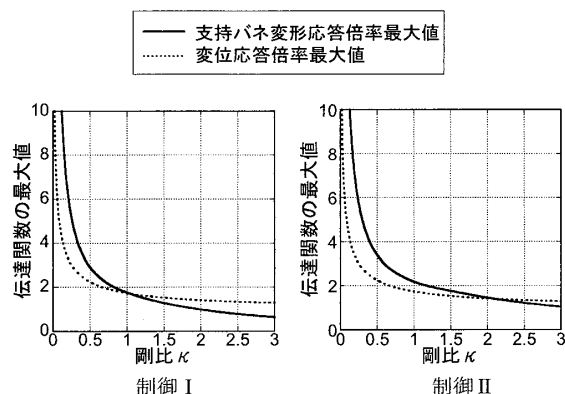


図6 各制御における支持ばねの最大変形指標

図3～6より制御I、IIについて次のことがわかる。

- ・剛比 $\kappa$ を大きくすることにより伝達関数の最大値を小さくすることができる。
- ・剛比 $\kappa$ を大きくすると、それに伴い制御に必要な慣性質量 $z$ の大きさ、無次元減衰定数の値、支持部材の最大負担力は大きくなり、またそれらの増加傾向は制御IIの方が強い。
- ・ある程度剛比が大きくなると剛比を大きくして

も応答倍率の低減効果の程はあまり変化しなくなり、支持部材の負担力の指標も頭打ちになる。しかしながら、最適質量比はほぼ一定の勾配をもって増加していくため、剛比や質量比に対する制御効率率は相対的に低下する。

尚、ダンパーのコストを考える場合、減衰係数は容易に調整可能であり、かつコストにはほとんど影響しないため、C-Z-k 直列型モデルの設計を考える場合には最適無次元減衰定数の大きさはあまり問題とはならない。

### 7. まとめ

本論文では、慣性接続要素と粘性ダンパーが直列接続されたダンパーユニットを支持部材を介して挿入した1質点モデルにおいて、伝達関数における定点の存在を明らかにした上で定点理論に基づく定式化を行い、以下の成果を得た。

- (1)振動数領域において相対変位伝達関数の最大値を最小化する制御、及び加速度伝達関数の最大値を最小化する制御について、各々の制御で必要となる最適質量比、最適無次元振動数比、最大応答倍率の値を剛比 $\kappa$ の簡単な関数として導いた。この定式化における定点高さの比較から、応答倍率の最大値は、C-Z-k 直列型モデルの方がC-k 直列型モデルよりも小さくなることを明らかにした。
- (2)剛比 $\kappa$ をパラメータとして各制御における応答倍率の最大値、必要となる質量比 $\mu$ 、最適無次元減衰定数、支持部材の負担力に関するパラメトリック解析を行いその特性を明らかにした。

謝辞 本研究の一部はH22年度科研費による。

### 参考文献

- 1) 斉藤 賢二, 五十子 幸樹: 同調粘性マスダンパーの実大加振実験とその解析的検証 (その1, その2), 大会学術講演梗概集, B-2, pp. 439 -442, 2010. 9.
- 2) 古橋 剛, 石丸 辰治: 複素固有値解析を介した D.M. 同調システムの簡易設計法 (その1～その6), 大会学術講演梗概集, B-2, pp. 465 -476, 2010. 9.
- 3) Takewaki, I., et al.: Fundamental mechanism of earthquake response reduction in building structures with inertial dampers, 5WCSCM, Tokyo, 2010.

\*1 京都大学大学院修士課程学生  
\*2 京都大学大学院工学研究科

Kyoto University, Graduate Student  
Kyoto University, Graduate School of Eng.