

Gaussian process の標準表現に関する 一結果

熊大 理 櫃 田 倍 之

(Masuyuki Hitsuda)

$(B, Y) = \{B(t), Y(t); t \in [0, 1]\}$ を Gaussian process とする. ここで, $Y(t) = \int_0^t y(u) du$, $E \int_0^1 |y(u)| du < \infty$, $E y(u) = 0$ とする. 更に $B_t(B) = \sigma\{B(s); s \in [0, t]\}$, $B_t(Y) = B_t(y) = \sigma\{y(s); s \in [0, t]\}$ *) とするとき, $B = \{B(t); t \in [0, 1]\}$ は $B_t(B, y) = B_t(B) \vee B_t(y)$ に関して Brownian motion であると仮定する. 以後, $H_t(x) = \text{linear span by } \{x(s); s \leq t\}$ と示すことにする. $t=1$ のときには省略することもある ($H(x) = H_1(x)$).

次の問題を考察する.

$$(0.1) \quad X(t) = B(t) + Y(t), \quad t \in [0, 1]$$

の標準表現を求めよ.

現段階では, この問題に対して完全な解答は得られていない. 一つのアプローチと部分的な結果を紹介したい.

§1. Lemmas

最初の Lemma は innovation theorem として知られており, 所期の問題をより具体的に考察するための足掛りとなる。

Lemma 1. (Kailath-Shiryayev). (0.1)

で与えられた Gaussian process $\{x(t); t \in [0, 1]\}$ に対して,

$$(1.1) \quad \bar{B}(t) = x(t) - \int_0^t \hat{y}(u) du, \quad t \in [0, 1]$$

但し $\hat{y}(u) = E[y(u) | B_u(x)]$, は $B_t(x)$ -Brownian motion である。すなわち, $\{\bar{B}(t); t \in [0, 1]\}$ の法則は Brown 運動と同じであり,

$$E[\bar{B}(t) | B_s(x)] = \bar{B}(s) \quad a.e. P, \quad t \geq s,$$

が成立する。

Remark. この Lemma により Gaussian process $X = \{x(t); t \in [0, 1]\}$ の“1つの” innovation は, Brownian motion であることが判明する。実際 Lévy-Hida の標準表現を得ることは, $\{B_t(x); t \in [0, 1]\}$ に関する Gaussian martingale を列挙することと同等であり, $\{\bar{B}(t); t \in [0, 1]\}$ がその martingale の 1 つになるのである。

Corollary. (I) (0.1) による $X = \{x(t)\}$ は次のように独立に分解できる:

$$(1.2) \quad X(t) = \bar{B}(t) + \int_0^t \hat{y}_1(u) du + \int_0^t \hat{y}_2(u) du, \quad t \in [0, 1],$$

ここで, $\hat{y}_1(u) \in H_u(\bar{B})$, $\hat{y}_2(u) \in H(\bar{B})^\perp \cap H_u(X)$, $u \in [0, 1]$.

更に,

$$(1.3) \quad E \left[\int_0^1 |\hat{y}_1(u)| du + \int_0^1 |\hat{y}_2(u)| du \right] < \infty.$$

$$(II) \quad H_t(X) = H_t(\bar{B}) \oplus H_t(\hat{y}_2), \quad \forall t \in [0, 1].$$

(III) 積分核 $k = k(u, v)$ が存在して

$$\hat{y}_1(u) = - \int_0^u k(u, v) d\bar{B}(v)$$

と書ける。

Proof. $\hat{y}_1(u) = E[\hat{y}(u) | \mathcal{B}_u(\bar{B})]$ とおく。

Gauss の定理より, $\hat{y}_1(u) = P_u^{\bar{B}} \hat{y}(u) = P_u^{\bar{B}} y(u)$

$$\hat{y}_1(u) = P_u^{\bar{B}} \hat{y}(u) = P_u^{\bar{B}} y(u)$$

が成立する。但し, $P_u^{\bar{B}}$ は $H_u(\bar{B})$ への orthogonal projection である。この projection は u 毎でなくとも

$$\hat{y}_1(u) = P^{\bar{B}} \hat{y}(u) \quad \text{但し } P^{\bar{B}} = P_1^{\bar{B}},$$

と書いてもよいことに注意しておく。これは, $\hat{y}(u)$ が

$$H(\bar{B}) \ominus H_u(\bar{B}) \quad \text{と直交することからわかる。} \quad \hat{y}_2(u) =$$

$$\hat{y}(u) - \hat{y}_1(u) \quad \text{が } H_u(\bar{B}) \quad \text{更に } H(\bar{B}) \quad \text{と直交することから明らかである。}$$

従って (1.2) の分解が示された。(1.3) は

明らかであろう。

(II) も 分解 (1.2) から直ちに言える。

(III) は $\hat{y}_1(\omega) \in H_u(\bar{B})$ であり, Wiener 積分で表わされることから明らかである。

この Lemma の事実は Stricker (1983) に主張されているが, その証明はいまこ冗長である。

さて, 一般の Gauss 過程 $X = \{X(t) : t \in [0, 1]\}$ が与えられたとき, その linear span $H(X)$ または $H_t(X)$ を確定することは難しい。Brown 運動 $\{B(t) : t \in [0, 1]\}$ については, Wiener 積分の全体であること, つまり

$$H(B) = \left\{ \int \alpha dB : \alpha \in \mathcal{L}^2[0, 1] \right\},$$

$$H_t(B) = \left\{ \int \alpha dB : \alpha = p_t \alpha, \alpha \in \mathcal{L}^2[0, 1] \right\},$$

(但し, p_t は通常 projection $p_t \alpha(u) = 0, u \geq t,$
 $= \alpha(u), u < t$

を示す) はよく知られているが, これと同様のことが, 次の性質を持つ Gauss 過程に関して言える: X の covariance function $E \Gamma_X(t, s) = E[X(t)X(s)], t, s \in [0, 1],$ とするとき, Γ_X が Γ_B と次の意味で同値であるときである。

Definition. 2つの covariance functions

Γ_{X_1} と Γ_{X_2} が ある定数 $C > 0$ に対して, $C \Gamma_{X_1}(t, s) - \Gamma_{X_2}(t, s)$

が非負値であるとき, Γ_{X_1} は Γ_{X_2} を dominate するという: 記号 $\Gamma_{X_1} > \Gamma_{X_2}$. $\Gamma_{X_1} > \Gamma_{X_2}$ かつ $\Gamma_{X_1} < \Gamma_{X_2}$ であるとき, Gauss 過程 $X_1 = X_2$ (または covariance Γ_{X_1} と Γ_{X_2}) は 同値 であるという: 記号 $\Gamma_{X_1} \sim \Gamma_{X_2}$.

Lemma 2 (Aronsjain 1950). $\Gamma_{X_1} > \Gamma_{X_2}$ ならば, それらを両主核とする Hilbert 空間 $\mathcal{H}(X_1)$, $\mathcal{H}(X_2)$ の間に包含関係 $\mathcal{H}(X_1) \supset \mathcal{H}(X_2)$ が成立する. 特に $\Gamma_{X_1} \sim \Gamma_{X_2}$ ならば $\mathcal{H}(X_1) = \mathcal{H}(X_2)$.

この Lemma 2 の系として, $\Gamma_{X_1} \sim \Gamma_{X_2}$ であるとき,

$$\mathcal{J}: \Gamma_{X_1}(t, \cdot) \mapsto \Gamma_{X_2}(t, \cdot)$$

は $\mathcal{H}(X_1)$ から $\mathcal{H}(X_2)$ の上への 1:1 線型写像 $\mathcal{J}$ に拡張される. このことと $\mathcal{H}(X_i)$ と $\mathcal{H}(X_i)$ の間の自然な対応

$$X_i(t) \mapsto \Gamma_{X_i}(t, \cdot), \quad i=1, 2$$

が 1:1, onto に拡張されることから, 次の Lemma 3 がわかる:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{H}(X_1) & & \mathcal{H}(X_1) & \xrightarrow{\mathcal{J}} & \mathcal{H}(X_2) & & \mathcal{H}(X_2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X_1(t) & \longleftrightarrow & \Gamma_{X_1}(t, \cdot) & \longleftrightarrow & \Gamma_{X_2}(t, \cdot) & \longleftrightarrow & X_2(t) \end{array}$$

Lemma 3 (Hitsuda 1984). $\Gamma_X \sim \Gamma_B$ を仮定すると, 対応 $B(t) \mapsto X(t)$ が $\mathcal{H}(B)$ から $\mathcal{H}(X)$ への

1:1かつ onto の線型写像 S に拡張される。

Definition. 上の Lemma で定めた S を用いて $S(\int_0^1 \alpha dB)$ を $\int_0^1 \alpha dX$ と書く。 $\alpha \in \mathcal{L}^2[0,1]$ に対して Wiener 型積分 $\int_0^1 \alpha dX$ が定義される。

Lemma 4. $H(X) = \{ \int_0^1 \alpha dX : \alpha \in \mathcal{L}^2[0,1] \}$
更に, $H_t(X) = \{ \int_0^t \alpha dX : \alpha = P_t \alpha \in \mathcal{L}^2[0,1] \}.$

Remark. 各 t に対して S は $H_t(B)$ を $H_t(X)$ の上に 1:1 に移す: $S(H_t(B)) = H_t(X).$

Lemma 5 (Hitsuda 1973). $X = \{X(t); t \in [0,1]\}$
 $Y = \{Y(t); t \in [0,1]\}$ を 2つの独立な Gaussian processes とする。 各 $t \in [0,1]$ に対して,

$$H_t(X+Y) = H_t(X) \oplus H_t(Y)$$

となるための必要十分条件は $H_t(X) \cap H_t(Y) = \{0\}, t \in [0,1]$, となることである。 ここで, $H_t(X)$ (resp. $H_t(Y)$) は, 内積核 $\Gamma_X(u,v)$ (resp. $\Gamma_Y(u,v)$), $(u,v) \in [0,t] \times [0,t]$, 上を持つ Hilbert 空間とする。

最後の Lemma 5 の証明はここには与えないが、
 t までの情報が完全に分離されながら、process が発展する
 ための条件である。

§ 2. 標準表現と応用

本節においても

$$X(t) = B(t) + Y(t), \quad t \in [0, 1]$$

$[0, 1]$ において与えた Gaussian process とする。この process
 について現在までに判明していることを列挙する。まず、
 前節の Lemma 5 に対応して次の Proposition が成立する。

Proposition 1. B と Y が独立であるとき、

各 t に対して

$$(2.1) \quad H_t(X) = H_t(B) \oplus H_t(Y)$$

であるための必要十分条件は、各 $t > 0$ に対して

$$(2.2) \quad \mathcal{H}_t(Y) = \{ a \mid a(s) = \int_0^s \alpha(u) du, \text{ かつ } \int_0^t \alpha^2(u) du = \infty \}$$

である。

Proof. $\mathcal{H}_t(B) = \{ a \mid a(s) = \int_0^s \alpha(u) du, \quad$

$\int_0^t \alpha^2(u) du < \infty$ } であるから, Lemma 5 の条件をみた

すためには, (2.2) が成立しなければならない. なお,

$Y(t) = \int_0^t y(u) du$ と書けることにより, $\mathcal{H}_t(Y)$ の元 a が絶

対連続 ($\exists \alpha \in L^1[0, t], a(s) = \int_0^s \alpha(u) du$) であることは

明白であろう.

例. $Y(t) = \int_0^t \alpha_0(u) B_1(u) du$, 但し $\alpha_0 \in L^2[a, b]$

$0 \leq a < b \leq 1$, $\alpha_0 \in L^1[0, 1]$, 更に $B_1 = \{B_1(t)\}$ は B と独立
な Brown 運動とすれば (2.2) をみたす. このような

α_0 が存在することは簡単にわかる. このとき, X は

(0.1) の型に標準表現されて, 重複度 2 の Lebesgue スペ
クトル測度を持つことになる.

上の Proposition 1 の対偶として, $\mathcal{H}_t(B) \cap \mathcal{H}_t(Y)$

がある $t \in [0, 1]$ に対して non-trivial であれば $H_t(X)$

$\subsetneq H_t(B) \oplus H_t(Y)$ となり, (B, Y) の情報が $X = B + Y$

により忠実に伝達されないことになる.

Proposition 2.

B と Y が独立であるとき,

次の命題 (A) と (B) は同値である：

$$(A) \quad \mathcal{H}_t(B) \cap \mathcal{H}_t(I) = \{0\} \quad t \in [0, 1]$$

$$(B) \quad \overline{B} = B.$$

Proof. (A) $\Rightarrow$ (B) は Prop. 1 よりほとんど明らかであろう。逆に (A) の否定は $\mathcal{H}_t(x) \subsetneq \mathcal{H}_t(B) \oplus \mathcal{H}_t(I)$ がある $t \in [0, 1]$ で成り立つことを示しており、 $\overline{B} = B$ であることが直ちに従う。

REFERENCES

- N. Aronsjain (1950), Theory of reproducing kernels.
Trans. Amer. Math. Soc. 68, 337-404.
- T. Hida (1960), Canonical representations of Gaussian processes and their applications.
Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto A 33, Math. 109-155.
- M. Hitsuda (1968), Representation of Gaussian processes equivalent to Wiener process.
Osaka J. Math. 5, 299-312.
- M. Hitsuda (1973), Multiplicity of some class of Gaussian processes.
Nagoya Math. J. 52, 39-46.
- M. Hitsuda (1984), Wiener-like integrals for Gaussian processes and the linear estimation problems.
Advances in Probability (Ed. by M. Pinsky ; Dekker Pub.)
- Sh. R. Liptzer and A. N. Shiryaev (1974), Statistics of Stochastic Processes. (Russian) (Nauka). (English Version: Springer).
- C. Stricker (1983), Semimartingales gaussiennes - application au problème de l'innovation.
Z.W. 64, 303-312.

総論と17

飛田武幸 - 櫃田倍之, ガウス過程 — 表現と応用 (紀伊國屋書店 1976) がある.