

深さ1の素イデアルによって判定可能な性質

阪大 理学部 吉田 憲一

A をネーター的可換環で単位元を持つものとする。ここで我々は有限生成 A -加群 M についての性質の中で、特に $\Delta(M) = \{ \mathfrak{p} \in \text{Spec } A : \text{ht } \mathfrak{p} > 1, \text{depth } M_{\mathfrak{p}} = 1 \}$ によって判定可能な M に関する性質のいくつかを取り扱ってみたい。

そのためにまず $\Delta(M)$ の特徴づけを行なう。そこでまず有限生成 A -加群 N に対して $\text{Ass}_A(N)$ を考える。

$\text{Ass}(N) \subseteq \text{Hti}(A)$ のとき N を *uniform module with hti* と呼ぼう、特に $\text{Ass}(N) = \{\mathfrak{p}\}$ の時、 N は $\mathfrak{p}$ に属する *coprimary module* と呼ばれる。

有限生成 A -module N に対して $N_i = \{n \in N : \text{ht Ann}_A(n) \geq i\}$ と定めれば、 N_i は N の submodule で、ある整数 $d \geq 0$ が存在して次の減少列ができる。

$$N = N_0 \supseteq N_1 \supseteq \cdots \supseteq N_d \supsetneq N_{d+1} = (0).$$

この $\{N_i\}$ に関して次の命題を得る。

命題: (i) $D_i(N) = \{P \in H_i(A) : P \supseteq \text{Ann } N_i\}$ とおけば " $D_i(N) = \{P \in \text{Ass}(N) : \text{ht } P = i\}$ ", 従って $\text{Ass}(N) = \bigcup_{i=0}^d D_i(N)$ を得る。
 (ii) N_i/N_{i+1} は uniform module with $\text{ht } i$.
 (iii) $f \in A$ を N -regular element とすれば, $fN \cap N_i = fN_i$,
 従って $N/fN \cong N_i/fN_i \cong \cdots \cong N_d/fN_d$ を得る。

証明: (i) $P \supseteq \text{Ann } N_i$ とすれば, N_i の定義及び N_i が有限生成であるから, $\text{ht } P \geq i$ であることが安易にわかる。従って $\text{ht } P = i$ で $P \supseteq \text{Ann } N_i$ とすれば P は $\text{Ann } N_i$ の minimal prime divisor であるから $P \in \text{Ass}(N_i) \subseteq \text{Ass}(N)$ 。逆に $P \in \text{Ass } N$ で $\text{ht } P = i$ とする。このとき $m \in N$ で $\text{Ann}(m) = P$ となるものが存在するから N_i の定義より $m \in N_i \therefore \text{Ann } N_i \subseteq \text{Ann}(m) = P$, 従って $P \in D_i(N)$ である。

(ii) 次に $\text{Ass}(N_i/N_{i+1}) = D_i(N)$ を示す。 $P \in D_i(N)$ とすれば, $m \in N_i$ があって $\text{Ann}(m) = P$, $\bar{m}$ を m の residue class とすれば $\text{Ann}_{N/N_{i+1}}(\bar{m}) \supseteq P$ 。今 $\text{Ann}(\bar{m}) \not\supseteq P$ とすれば, $x \in \text{Ann}(\bar{m})$, $x \not\supseteq P$ が存在する。このとき $xm \in N_{i+1}$, 従って $P \not\supseteq \text{Ann}(xm)$ であるが一方 $\text{Ann}(xm) = \text{Ann}(m) : xA$ で $x \not\supseteq P$ ゆえに $P \supseteq \text{Ann}(m) : xA = \text{Ann}(xm)$, これは矛盾。従って $D_i(N) \subseteq \text{Ass}(N_i/N_{i+1})$ 。 $P \in \text{Ass}(N_i/N_{i+1})$ とする。 $\bar{m} \in N_i/N_{i+1}$ があって $P = \text{Ann}(\bar{m})$ 。 m を $\bar{m}$ の代表元とすれば, $m \in N_i$ 。 $P = \text{Ann}(\bar{m}) \supseteq \text{Ann}(m)$ で $m \in N_i$

だから $\text{ht } \mathfrak{p} \geq i$. 今 $\text{ht Ann}(m) > i$ とすれば $m \in N_{i+1}$ だから $\bar{m} = \bar{0}$ となり矛盾する。そこで $\text{ht Ann}(m) = i$ である。 $\mathfrak{p} \ni x$ に対して $xm \in N_{i+1}$ ゆえに $\text{ht } \mathfrak{p} = i$, 従って $\mathfrak{p} \in D_i(N)$. $\therefore \text{Ass}(N_i/N_{i+1}) \subseteq H_i(A) \therefore N_i/N_{i+1}$ は uniform module with $\text{ht } i$.

(iii) $f \in A$ を N -regular element とすれば, $f \notin \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(N)$. 今 $m \in N$ で $fm \in N_i$ とする。 $f \notin \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in \text{Ass}(N)$ ゆえに $\text{Ann}(fm) = \text{Ann}(m)$. $fm \in N_i$ ゆえに $\text{Ann}(fm) = \text{Ann}(m)$ の prime divisor はすべて $\text{ht} \geq i$ ゆえに $m \in N_i$.

A を integral domain から A の integral closure $\bar{A}$ は有限 A -module で $\text{ht } \mathfrak{p}_i A = 1$, for $\mathfrak{p}_i \in H_t(\bar{A})$ を満たすものとする。 M を torsion free finite A -module とすれば, ある $\bar{A}$ -free module F で $M \subseteq F \subseteq M \otimes_A Q(A)$ とするものが存在する。 $\phi: F \longrightarrow N = F/M$ として $\phi^{-1}(N_i) = M_i$ とおけば

$$M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots \supseteq M_d \supsetneq M_{d+1} = M$$

なる F の sub-modules の減少列が与えられる。

命題: (i) この chain は F のとり方に依らない。

$$(ii) \text{Ass}(M_2/M) = \Delta(M)$$

$$(iii) \mathfrak{p} \in D_c(M_2/M) \text{ で } \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p} \text{ に属する primary ideal とすれば,}$$

$$\text{Ext}_{A_{\mathfrak{p}}}^1(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{p}}) = \text{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{q}A_{\mathfrak{p}}, M_2/M_{i+1}) = \{\bar{m} \in M_2/M_{i+1} \mid \text{Ann}(\bar{m}) \subseteq \mathfrak{q}\} \otimes A_{\mathfrak{p}}$$

系: $\Delta(M)$ は有限集合である。

証明 (i) F_1, F_2 を条件を満たす $\bar{A}$ -free module とすれば,
 F_1, F_2 を含むものが存在するから, 我々は $M \subset L \subset F$, L, F は
 free $\bar{A}$ -module, で F/M から得られるものを M_2 , F/M から得られ
 るものを N_2 とすれば $M_2 = N_2$ であることを示せばよい. $F/M \cong$
 F/M で $\text{ht Ann}(M_2/M) > 1$ 即ち $N_2 \subseteq M_2$ は明らか。逆を示す。そ
 のためには, $M_2 \subseteq L$ を示せばよい。今 $M_2 \not\subseteq L$ とする。 $N = M_2$
 $+ L$ とおく。このとき $L \subsetneq N \subseteq F$ であるから $\text{Ann}(N/L) \subseteq \text{Ann}$
 (M_2/M) . 従って $\text{ht Ann}(M_2/M) > 1$ だから $\text{ht Ann}(N/L) > 1$. $\mathfrak{p}$ を
 $\text{Ann}(N/L)$ の minimal prime divisor とする。このとき $\mathfrak{p} \in$
 $\text{Ass}(N/L)$ だから $\text{Hom}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}, (N/L)_{\mathfrak{p}}) \neq (0)$. $\text{ht}_{\mathfrak{p}} > 1$ 故 depth
 $\bar{A}_{\mathfrak{p}} > 1$, 従って $\text{depth } L_{\mathfrak{p}} > 1$ から我々は, $0 \rightarrow L \rightarrow N$
 $\rightarrow N/L \rightarrow 0$ (exact) から

$$\text{Ext}_{A_{\mathfrak{p}}}^0 \left(\underset{(0)}{A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}}, L \right) \rightarrow \text{Ext}_{A_{\mathfrak{p}}}^0 \left(\underset{(0)}{A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}}, N/L \right) \rightarrow \text{Ext}_{A_{\mathfrak{p}}}^1 \left(\underset{(0)}{A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}}, L \right)$$

これは矛盾。だから $\text{Ann}(M_2) = A$, よって $M_2 \subseteq L$ を得る。

補題: $\text{ht } P \cap A = 1$, $P \in \text{Ht}_1(\bar{A})$ の仮定のもとでは $\text{ht } P > 1$ であれば $\text{depth } \bar{A}_P > 1$ 。

証明 (i) $\phi: A \longrightarrow B$ を noetherian rings の homomorphism, M を B -module とすれば $\text{Ass}(M) = \phi^*(\text{Ass}_B(M))$. 今 $\text{depth } \bar{A}_P = 1$ とすれば $0 \neq a \in P$ で, $P \in \text{Ass}_A(\bar{A}/a\bar{A})$. 一方 $\text{Ass}_{\bar{A}}(\bar{A}/a\bar{A}) = \{P \in \text{Ht}_1(\bar{A}), P \ni a\}$, 従って $\text{Ass}_A(\bar{A}/a\bar{A}) = \phi^*(\text{Ass}_{\bar{A}}(\bar{A}/a\bar{A}))$ 故 $P \in \text{Ht}_1(\bar{A})$ で $P = P \cap A$ である。仮定から $\text{ht } P = 1$ 。

(ii) $P \in \text{Ass}(M_2/M)$ とすれば M_2 の定義から $\text{ht } P > 1$, 従って $\text{ht } F_P > 1$, 又 $P \in \text{Ass}(F/M)$ 故 $\text{Hom}_{A_P}(A_P/P A_P, F_P/M_P) \neq (0)$. よって, $0 \longrightarrow M_P \longrightarrow F_P \longrightarrow F_P/N_P \longrightarrow 0$ (exact) から我々は $\text{Ext}_{A_P}^0(A_P/P A_P, F_P/M_P) \cong \text{Ext}_{A_P}^1(A_P/P A_P, M_P) \neq 0$ を得る。従って $\text{depth } M_P = 1$ だから $P \in \Delta(M)$. 逆に $P \in \Delta(M)$ とすれば $\text{ht } P > 1$ で今示したことから, $\text{Hom}_{A_P}(A_P/P A_P, F_P/M_P) \neq (0)$ 従って $P \in \text{Ass}(M_2/M)$. 特に我々は $\text{ht } P \cap A = 1$, $P \in \text{Ht}_1(\bar{A})$, の仮定がなくとも次の結果を得る。

命題: $\{P \in \text{Spec } A : \text{depth } A_P = 1\} = \text{Ht}_1(A) \cup \text{Ass}(\bar{A}/A)$.

(2) *seminormality* は *depth one* のイデアルで判定される。
seminormalization 及び *seminormal* については先の数理解
 析研講究録「可換環の研究」(No. 374)に詳しく述べたので、
 ここではその結果のみを記する。

定理: A を S_1 -条件を満たすネーター環, R を A と $Q(A)$ の
 中間環で有限 A -module なるものとする。 $\phi: A \rightarrow R/A = N$
 に対して $\phi^{-1}(Ni) = A_i(R)$ とおくと, $A_i(R)$ は R の部分環であ
 る。このとき A が R の中で *seminormal* である必要充分条件
 は conductor $\mathfrak{f}(A_i(R)/A)$ が $A_i(R)$ の *radical ideal* である。

A が R の中で *seminormal* であれば, A は R の *glueings* で
 与えられるが, それは $\text{Ass}(R/A)$ によって次の様にして与えら
 れる。

定理: A は R の中で *seminormal* で, $\text{Ass}(R/A) = \{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n\}$
 とする。 $\mathfrak{p}_i$ 上の R の *prime ideals* を $P_{i1}, \dots, P_{ie_i}$, $e_i \geq 1$,
 とし元 $f \in R$ の P_{ij} による *residue class* を $f(P_{ij})$ と書けば:

$$A = \{f \in R : f(P_{i1}) = \dots = f(P_{ie_i}) = k(\mathfrak{p}_i)\}_{i=1, \dots, n}, \text{ ここで}$$

$$k(\mathfrak{p}_i) = Q(A/\mathfrak{p}_i) \text{ である。}$$

環の glueing の例を述べてみよう。

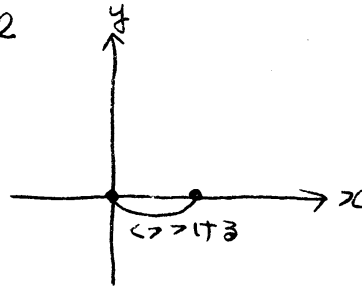
例1. 2つの平面上の2点をくっつけて1点にする。

$$R = k[x, y] e_1 + k[x, y] e_2, e_i e_j = \delta_{ij} e_i,$$

$$A = \{ \varphi_1(x, y) e_1 + \varphi_2(x, y) e_2 \in R : \varphi_1(0, 0) = \varphi_2(0, 0) \}$$

$$= k[x, y, z, v] / (xz, xv, yz, yv)$$

例2



$$R = k[x, y]$$

$$A = \{ \varphi(x, y) \in R : \varphi(0, 0) = \varphi(1, 0) \}$$

$$= k[x(x-1), x^2(x-1), y]$$

例3 1つの直線と1点をくっつける。tは変数。

$$A = \{ \varphi(x, y) \in k[x, y] : \varphi(t, 0) = \varphi(0, 1) \}$$

$$= k + (xy, (x+1)y) k[x, y].$$

Aはネーター的でない，従って有限生成でないが， $\bar{A} = k[x, y]$ である。

(2) overring RがA上 flat かどうかは depth one の prime ideals で判定できる。

定理: A をネーター整域, R を A と $Q(A)$ との中間環とする。

このとき R が A 上 flat である必要充分条件は $A_P \supseteq R$,
 または $\exists R = R$ がすべての $\text{depth } A_P = 1$ をみたす $P \in \text{Spec } A$
 に対して成り立つ事である。

証明: $FA(R) = \{P \in \text{Spec } A : A_P \not\supseteq R\}$ の minimal element
 は $\text{depth } 1$ の prime ideal である事をまず示そう。 P を
 $FA(R)$ の minimal element として $\text{depth } A_P > 1$ とすれば,
 $A_P = \bigcup_{Q \subsetneq P} A_Q$ で $Q \notin FA(R)$ ゆえに $A_Q \supseteq R$ から $A_P \supseteq R$ と
 なり矛盾する。

R が A 上 flat である必要充分条件は $P \in \text{Spec } A$ に対して,
 $A_P \supseteq R$ または $\exists R = R$ であるから $FA(R)$ の minimal element
 P は $\text{depth } 1$ で, 仮定から $\exists R = R$ ゆえに我々の証明は終わ
 る。

(3) flat overring R が A 上で有限生成であることは
 $\text{depth } 1$ によって決まる。

命題, R が A 上環として有限生成ならば $FA^*(R) = \{P \in \text{Spec } A$
 $: \text{depth } A_P = 1, A_P \not\supseteq R\}$ は有限集合。逆に R が A 上 flat の
 とき $FA^*(R)$ が有限集合であれば R は A 上有限生成である。

証明: $R = A[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$, $\alpha_i \in R$ とする。 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ の共通分母の 1 つ x とすれば, $F_A^*(R) \subseteq \{P \in \text{Spec } A : P \text{ は } xA \text{ の prime divisor}\}$ から $F_A^*(R)$ は有限集合である。

R は A 上 flat とし, $F_A^*(R) = \{P_1, \dots, P_r\}$ とする。 $e_i = P_i \cap \dots \cap P_i$ とおくと, $e_i R = R$, 従って $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$, $a_1, \dots, a_n \in e_i$ で $\sum \alpha_i \alpha_i = 1$ 。 $C = A[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \subseteq R$ とおく。

C は A 上 flat で $F_A^*(R) = F_A^*(C)$ は簡単にわかる。 $\bar{\sigma}$ A 上 flat ゆえに $R = \bigcap_{P \in F_A^*(R)} A_P$, $\text{depth } A_P = 1$, から $R = C$ となる。

(4) $R \in A$ の拡大整域とする。 R の中で A が root closed とは, $t \in R$ で今ある整数 $n > 0$ があって $t^n \in A$ であれば $t \in A$ 。 $R \in A$ と $\mathbb{Q}(A)$ の中間環とすれば, A が R の中で root closed である必要充分条件は, A が A の R の中での integral closure の中で root closed。 そこで R は A 上 integral とすれば, A が root closed であれば A は R の中で seminormal であるが特に次の判定法を得る。

命題 R は A 上 integral で birational とする。 このとき A は R の中で root closed である必要充分条件は, $\text{Ass}(R/A)$ の P , $\text{ht } P = 1$, に対して conductor $e(A_{\bar{P}}(R)/A_{\bar{P}})$ は $A_{\bar{P}}(R)$ の radical ideal で P 上の $A_{\bar{P}}(R)$ の prime ideals は e 個。

それを正とすれば, $k(P)$ は $k(P)$ の中で "root closed".

証明: $\text{Ass}(R/A) = \{P_{ij}, \text{ht } P_{ij} = i, 1 \leq j \leq e_i\}$ とし,
 P_{ij} 上の $A_i(R)$ の prime ideal を P_{ij} とする. $R \ni t, t^n \in A$
 とし, $t \in A_i(R)$ に対する induction で示す. $t \in A_{i-1}(R)$ とする. $t(P_{ij})^n \in k(P_{ij})$ で $k(P_{ij})$ が $k(P_{ij})$ の中で "root closed" 故 $t(P_{ij}) \in k(P_{ij})$, 従って $t \in A_i(R)$, よって $i = d$ のとき $t \in A$ を得る.

A は R の中で "root closed" とすれば A は R の中で "semi-normal" ゆえに $\sqrt{(A_i(R)/A)}$ は $A_i(R)$ の radical ideal.
 $P = P_{ij}$ 上の $A_i(R)$ の prime ideals を $P_1, \dots, P_u, u \geq 2$ とする.

A は R の中で "root closed" 故 A は $A_i(R)$ の中で "root closed",
 従って A_P は R_P の中で "root closed" である.

このとき $A_P = \{\alpha \in R_P \mid \alpha(P_1) = \dots = \alpha(P_u) \in k(P)\}$ である
 が, $R_P \otimes_{A_P} k(P) = k(P_1) \times \dots \times k(P_u)$ ゆえにある元 $\alpha \in R_P$ で
 $\alpha(P_1) = -1, \alpha(P_2) = \dots = \alpha(P_u) = 1$ なるものがある. 従って
 $\alpha^2 \in A_P$ で $\alpha \notin A_P$, これは A_P が "root closed" であることに
 反する. 従って P_{ij} 上の $A_i(R)$ の prime ideals はただ一つ,

これを P_{ij} とすれば $\mathcal{K}(P_{ij})$ が $\mathcal{K}(P_{ij})$ の中で *root closed* であることは今示したことで明らかとなる。