

# $p$ 進 $L$ 関数の積分表示

北大 理 森田 康夫

## 1. 問題

$N$  を自然数とし,  $\chi \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$  より  $\mathbb{C}^\times$  への準同型とする。この時  $(n, N) \neq 1$  なる整数  $n$  に対して  $\chi(n) = 0$  とおくことにより

$$\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

なる map ができる。このようなものを Dirichlet の character と呼ぶ。

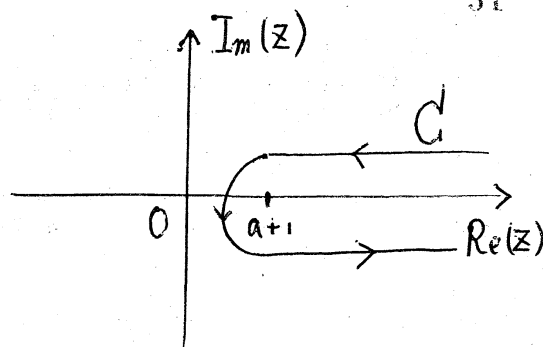
さてこのような  $\chi$  に対して

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \log \Gamma_\chi(z+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{(z+n)^2}$$

とおく。また  $\operatorname{Re}(s) > 1$ ,  $-1 < a < +\infty$  に対し

$$L(s; a, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{(n+a)^s}$$

とおく。この時  $C$  を右  
図のような曲線とすると



$$(\Delta-1) L(\Delta, a, \chi)$$

$$= \frac{-1}{2\pi i} \int_C \left( \frac{d}{dz} \right)^2 \left\{ \log \Gamma_{\chi}(-z+a+1) \right\} z^{-\Delta+1} dz$$

が成り立つ。ただし  $|\arg(z)| \leq \pi$  とする。

以下この積分表示にあたるものの  $p$  進体上での類似物をつくる。

## 2 結果

$p$  を奇素数とし、 $\mathbb{Q}_p$  を  $p$  進体、 $|\cdot|_p$  を  $p$  進付値で  $|p|_p = p^{-1}$  とするものとする。これを  $|\cdot|_p$  を延長した付値で完備な代数的閉体とする。  $|\cdot|_p$  でこの延長された付値もあらわす。

$$\mathbb{Z}_p^\times = \{ x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_p = 1 \}$$

とおく。これは  $\mathbb{Q}_p^\times$  の subgroup であり

$$\mathbb{Z}_p^\times = \left( 1 \text{ の } p-1 \text{ 乗根全体の作る群} \right) \\ \times \left\{ x \in \mathbb{Q}_p \mid |x-1|_p \leq |p|_p \right\}$$

と直積に分解される。  $x \in \mathbb{Z}_p^X$  に対して

$$\omega(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{p^n}$$

とおく。これは上の直積の第一成分への射影を与える。とくに  $\omega$  は modulo  $p$  で定義された Dirichlet character を与える。

次に  $\omega$  を

$$\left\{ z \in k \mid \exists x \in \mathbb{Z}_p^X \text{ s.t. } |z-x|_p < |p^{\frac{1}{p-1}}|_p \right\}$$

の上へ  $\omega(z) = \omega(x)$  とおき拡張しておく。

また

$$z = \omega(z) \langle z \rangle$$

とおき  $\langle \rangle$  を定義しておく。そこで  $A_1 \in k$ ,  $A_2 \in \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$  に対し,  $A = (A_1, A_2)$  とおき

$$z^A = \omega(z)^{A_2} \langle z \rangle^{A_1}$$

$$\langle z \rangle^{A_1} = \exp(A_1 \log \langle z \rangle)$$

とおく。これは  $\omega(z) = \zeta$  とおく時  $A_1$  と  $z - \zeta$  の関数として

$$|A_1|_p |z - \zeta|_p < |p^{\frac{1}{p-1}}|_p$$

で収束する巾級数で与えられる。

$\chi$  は modulo  $f$  で定義された Dirichlet character であるとする。このとき

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \log \Gamma_{p,\chi}(z+1) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{f p^\alpha} \sum_{\substack{1 \leq n \leq f p^\alpha \\ (n,p)=1}} \frac{\chi(n)}{z+n}$$

とおく。また  $a \in \mathbb{A}_p$  と  $|a|_p \leq |p|_p$  をみたす  $k$  の元とすると

$$(s-1) L_p(s; a, \chi) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{f p^\alpha} \sum_{\substack{1 \leq n \leq f p^\alpha \\ (n,p)=1}} \frac{\chi(n)}{\langle a+n \rangle^{s-1}}$$

とおく。この時

①  $\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \log \Gamma_{p,\chi}(z+1)$  は  $\mathbb{P}^1(k) \setminus \mathbb{Z}_p^\times$  上で収束し、この上の analytic function を与える。とくに

$$\left\{ z \in \mathbb{P}^1(k) \mid |z - \zeta|_p > |p|_p \text{ for } \zeta \text{ s.t. } \zeta^{p-1} = 1 \right\}$$

上では、

$$\sum_{\zeta^{p-1}=1} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n^{(\zeta)} (z - \zeta)^n \right\}$$

の形を与えられる。

なることがわかっている。したがって

の時  $|A_1|_p < |p^{-1} p^{\frac{1}{p-1}}|_p$

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^2 \left\{ \log \Gamma_{p,q}(-z+a+1) \right\} z^{-A+1}$$

は 各 1 の  $p-1$  乗根  $\zeta$  につき

$$|p|_p < |z-\zeta|_p < |A_1^{-1} p^{\frac{1}{p-1}}|_p, |p^{\frac{1}{p-1}}|_p$$

なる円環上で  $z-\zeta$  の Laurent 級数に展開される。そこで その  $(z-\zeta)^{-1}$  の係数として

$\text{Res}_{|z-\zeta|_p \leq |p|_p} [ \quad ]$  を定義する。この時

### 定理

$$\begin{aligned} & (A_1-1) L_p(A_1, a, q\omega^{1-A_2}) \\ &= - \sum_{\zeta^{p-1}=1} \text{Res}_{|z-\zeta|_p \leq |p|_p} \left[ \left(\frac{d}{dz}\right)^2 \left\{ \log \Gamma_{p,q}(-z+a+1) \right\} z^{-A+1} \right] \end{aligned}$$

が成り立つ。とくに左辺は  $|A_1|_p < |p^{-1} p^{\frac{1}{p-1}}|_p$  において収束する  $A_1-1$  の巾級数であらえられる。

## 3 準備

$$(1) \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-\zeta)^n \quad (a_n \in k)$$

が  $|z-\zeta|_p = r$  の時収束するとする。この時

$$\max_{-\infty < n < +\infty} (|a_n|_p r^n) = \max_{|z-\zeta|=r} |f(z)|_p$$

が成り立つ。とくに  $f_m(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n^{(m)} (z-\zeta)^n$

が  $\{|z-\zeta|_p = r\}$  上で一様収束すれば、 $a_n^{(m)}$  も  $m \rightarrow \infty$  の時収束する。

(1)  $f(z)$  と (1) の通りとし、 $|\zeta-\zeta'|_p < r$  なる点  $\zeta'$  を取り

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n (z-\zeta')^n \quad (b_n \in k)$$

とおく。この時

$$a_{-1} = b_{-1}$$

が成り立つ。

## 4. 証明

$r \in |k|_p$  の元で

$$|p|_p < r < |\Delta_i^{-1} p^{\frac{1}{p-1}}|_p, \quad |p^{\frac{1}{p-1}}|_p$$

なる数を取る。この時 3 の (1) より

$$-\sum_{\substack{p-1 \\ j=1}} \operatorname{Res}_{|z-\zeta|_p \leq |p|_p} \left[ \left( \frac{d}{dz} \right)^2 \left\{ \log \Gamma_{p,\chi}(-z+a+1) \right\} z^{-\Delta+1} \right]$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{f p^\alpha} \sum_{\substack{1 \leq n \leq f p^\alpha \\ (n,p)=1}} \chi(n) \sum_{\substack{p-1 \\ j=1}} \operatorname{Res}_{|z-\zeta|_p \leq |p|_p} \left[ \frac{-1}{-z+a+n} z^{-\Delta+1} \right]$$

が成り立つ。ところで  $|a|_p \leq |p|_p$  であるから 3 の (2) より

$$\operatorname{Res}_{|z-\zeta|_p \leq |p|_p} \left[ \frac{-1}{-z+a+n} z^{-\Delta+1} \right]$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } w(n) \neq \zeta \\ (a+n)^{-\Delta+1} & \text{if } w(n) = \zeta \end{cases}$$

が成り立つ。よって

$$(a+n)^{-\Delta+1} = w(n)^{-\Delta+1} \langle a+n \rangle^{-\Delta+1}$$

だから

定理の右辺

$$= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{f p^\alpha} \sum_{\substack{1 \leq n \leq f p^\alpha \\ (n,p)=1}} \chi w^{-\Delta+1}(n) \frac{1}{\langle a+n \rangle^{\Delta-1}}$$

$$= (\Delta_1 - 1) L_p(\Delta_1; a, \chi \omega^{1-\Delta_1})$$

となる。

## 5 応用

$(\frac{d}{dz})^2 \log \Gamma_{p,\chi}(-z+a+1)$  の  $z=0$  および  $z=\infty$  での展開が定理を使って計算できる。結果と書くと

$$(\frac{d}{dz})^2 \log \Gamma_{p,\chi}(-z+a+1)$$

$$= \sum_{m \geq 2} (m-1) L_p(m; a, \chi \omega^{1-m}) z^{m-2}$$

$$= - \sum_{m \leq 1} (m-1) L_p(m; a, \chi \omega^{1-m}) z^{m-2}$$

となる。