

安定性予想に対する Closing Lemma の応用について

北大 理学部 三波 篤郎

§ 1 . カ学系の理論における基本的な問題の 1 つは、
stable な system を characterize する事である。

これについて、S. Smale, J. Palis は次の事を予想した。

Conjecture (S. Smale, J. Palis [5])

構造安定 $\iff$ Axiom A + Strong Transversality Condition

Conjecture (S. Smale [6])

Ω -安定 $\iff$ Axiom A + No Cycle property

これらの予想は、vector field, diffeomorphism の両方に対して意味を持っているが、ここでは、有限次元、closed

可微分多様体 M 上の diffeomorphism についてのみ考える。

多くの部分的結果が提出され、結局、 C^1 -stability の場合、
次の予想が証明されれば、上の 2 つの予想は最終的に解決される事がわかっている。(なお、詳しくは、R. Mañé [2] 参照)

Conjecture

$f \in \mathcal{F}(M)$ (Ω -安定 or 構造安定)

$\Rightarrow \Lambda_i(f) : \text{hyperbolic set} \quad (0 \leq i \leq \dim M)$

==>

$\mathcal{F}(M) = \text{int}_1 \{ f \in \text{Diff}^1(M) \mid f \text{ の 周期点 は hyperbolic} \}$

また $\mathcal{F}(M) \ni f$ について.

$\Lambda_i(f) = \text{cl} \{ p \in \text{Per}(f) \mid p \text{ の stable dimension} = i \}$

さて. この問題を扱う上で. R. Mañé の次の結果が重要である.

(1.1) Proposition (R. Mañé [1])

$f \in \mathcal{F}(M)$ について次の事が成立する.

(i) f のある近傍 $\mathcal{U}$, $\exists c_1 > 0$, $0 < \lambda_1 < 1$

が存在し, $\forall g \in \mathcal{U}$ について.

$$\| T_g^{\pi(x, g)} | E_x^s(g) \| \leq c_1 \lambda_1^{\pi(x, g)}$$

$$\| T_g^{-\pi(x, g)} | E_x^u(g) \| \leq c_1 \lambda_1^{\pi(x, g)} \quad \forall x \in \text{Per}(g)$$

==> $\pi(x, g)$ は x の g に対する周期. また.

$E_x^s(g)$ ($E_x^u(g)$) は g の x における stable

(unstable) sub space.

(ii) $0 < j < \dim M$ について. ある Tf -invariant な

$TM|_{\Lambda_j}$ の subbundle E_j^s , E_j^u 及び w .

$\exists c_2 > 0$, $0 < \lambda_2 < 1$ が存在し.

$$TM|_{\Lambda_j} = E_j^s \oplus E_j^u$$

$$\|Tf^n|E_j^s x\| \cdot \|Tf^{-n}|E_j^u f^n(x)\| \leq C_2 \lambda_2^n$$

$$\forall x \in \Lambda_j, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad \square$$

この結果から、 Λ_j が hyperbolic set になるなら、それに対応する $TM|_{\Lambda_j}$ の splitting は E_j^s, E_j^u でなければならぬ事がわかる。この事から C^1 -安定性予想を解決するための、最終的な目標は、構造安定、 Ω -安定、あるいは $\mathcal{F}(M)$ の f について、 $Tf^n|E_j^s, Tf^{-n}|E_j^u$ が $n \rightarrow \infty$ の時、exponential contraction となる事を示す事である。さて、この問題に関して、Closing Lemma の方法が有効であろうと考えられるのは、次のような理由による。

$Tf^n|E_j^s, Tf^{-n}|E_j^u$ が exponential contraction でないとして仮定した時、 f が 構造安定、 Ω -安定、あるいは $\mathcal{F}(M)$ である事に矛盾する事を示せばよいのだが、わずかな perturbation に対して、それがもとの f と (又は、 $f|_{\Omega(f)}$ と) 位相共役になるかどうかの判定は、非常に困難であるように思われる。そこで、實際上、使いやすき条件は $\mathcal{F}(M)$ にならざるを得ない。 $Tf^{-n}|E_j^u$ が contraction でないとして仮定すると、次の事がわかる。

$$(1.2) \quad \exists p_* : \text{帰帰点}, \quad \exists v \in E_{j p_*}^u, \quad \|v\|=1$$

$$\text{が 存在し,} \quad \|Tf^n v\| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad \square$$

つまり、unstable subspace の element でありながら、

正の iteration に対して, norm が増大しないものが存在するのである. ここでもし, この回帰点をわずかな perturbation によって, 周期点にできれば, (1.1) (i) に矛盾するような周期点を作れるであろう. というわけである. しかし, 一般には, もう簡単にはゆかない. その理由は, (closing Lemma の方法で) 閉じて, 周期軌道にできるような orbit (の一部) の各点相互の位置関係の条件と, そこにおける norm の変化を, うまく同調させる事が, 今のところできていないからである. しかし, ある種の条件の下では可能である. ここでの目的は, そのような 2つの case を述べる事である.

$f \in \text{Diff}^1(M)$, $M \supset \Lambda$: compact f -invariant sub set

$TM|_{\Lambda} \supset E$: Tf -invariant subbundle とした時,

$\Gamma^b(E) = \{ E \text{ の bounded section 全体} \}$

$\Gamma^c(E) = \{ E \text{ の continuous section 全体} \}$

とすると, これらは sup. norm で Banach space になる.

$\Gamma = \Gamma^b$ or Γ^c とした時, $f_* : \Gamma \rightarrow \Gamma$ を,

$f_*(\sigma) = Tf \circ \sigma \circ f^{-1}$ と定める.

f_* は, isomorphism (linear homeomorphism) となる.

次の 2つの定理が, ここでの主要結果である.

Theorem 1 $f \in \mathcal{F}(M)$ について,

$$(i) \sup_{x \in \Lambda_j^s, n \in \mathbb{Z}_+} \|Tf^n|E_j^s x\| < \infty \\ \Rightarrow \text{spectral radius of } f_*|T^b(E_j^s) < 1$$

$$(ii) \sup_{x \in \Lambda_j^u, n \in \mathbb{Z}_+} \|Tf^{-n}|E_j^u x\| < \infty \\ \Rightarrow \text{spectral radius of } f_*^{-1}|T^b(E_j^u) < 1$$

Theorem 2 $f: C^1$ -構造安定, $\Lambda_i(f) \cap \Lambda_j(f) = \emptyset$ ($i \neq j$)

λ_1 を (1.1) Prop. (i) の定数 とする.

ある $\lambda \in \mathbb{C}$. s.t. $\lambda_1 < |\lambda| \leq 1$ が.

$$(i) f_*|T^b(E_j^s) \text{ のスペクトルでない} \\ \Rightarrow \text{spec. rad. } f_*|T^b(E_j^s) < 1$$

$$(ii) f_*^{-1}|T^b(E_j^u) \text{ のスペクトルでない} \\ \Rightarrow \text{spec. rad. } f_*^{-1}|T^b(E_j^u) < 1.$$

これらの結果を、安定性予想との関係がはっきりするよう
に言いかえると、次のようになる。

Corollary 1 $f \in \mathcal{F}(M)$ について.

$\Lambda_j(f)$ が hyperbolic set

$$\iff \sup_{x \in \Lambda_j, n \in \mathbb{Z}_+} \{ \|Tf^n|E_j^s x\|, \|Tf^{-n}|E_j^u x\| \} < \infty$$

Corollary 2

C^1 -構造安定かつ、 $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset$ ($i \neq j$) とある $f \in \text{Diff}^2(M)$ について.

$\Lambda_j(f)$ が hyperbolic set

$\iff \exists \lambda_s, \exists \lambda_u \in \mathbb{C} \quad \text{s.t.} \quad \lambda_1 < |\lambda_s| \leq 1 \leq |\lambda_u| < \lambda_1^{-1}$
 が存在し、 λ_s (λ_u) は $f_*|_{T^s(E_j^s)}$ ($f_*^{-1}|_{T^u(E_j^u)}$)
 のスペクトルではなし.

これらの結果の証明のポイントは、与えられた条件によつて、norm の変化を一樣に規定でき、Closing Lemma の方法が、割合、容易に適用できるという点にある.

具体的には、次の形で使われる.

Lemma 1

$f \in \text{Diff}^1(M)$, $p_* : f$ の帰点, $\Lambda = \text{cl}\{\text{Orb}_+(p_*)\}$

$TM|_\Lambda = E^1 \oplus E^2 : Tf$ -invariant splitting

$\mathcal{U} : f$ の nbd.

この時、 $\forall \varepsilon > 0$ に対して、

$\exists k_1 < \exists k_2$ (正整数), $\exists g \in \mathcal{U}$

$\exists \varphi : T_g M \longrightarrow T_p M : \text{isomorphism}$

ただし $p = f^{k_1}(p_*)$, $\tilde{p} = f^{k_2}(p_*)$

が存在し、次をみたす.

- (i) $d(p_*, p) < \varepsilon, \quad d(p_*, q) < \varepsilon$
- (ii) $g^{k_2-k_1}(q) = q, \quad g^k(q) \neq q \quad (0 < k < k_2-k_1)$
- (iii) $G(E_f^i) = E_p^i \quad (i=1, 2) \quad \text{であり}$
 $G|E_f^i : E_f^i \longrightarrow E_p^i \quad \text{は isometry}$
- (iv) $T_p f^{k_2-k_1} \circ G = T_f g^{k_2-k_1}$
- (v) gf^{-1} の support は $\bigcup_{k=k_1}^{k_2} f^k(p_*)$ の ε -nbd
 に含まれる. $\square$

(証明は. Sannami [4] 参照...)

§. 2 定理の証明.

Theorem 1 の証明は. Sannami [4] 参照.

ここでは. Theorem 2 の証明の概略を述べる.

$\lambda_1 < |\lambda| \leq 1$ が $f_*^{-1}|_{\Gamma^b(E_j^y)}$ のスペクトルでない
 なす. $\text{spec. rad } f_*^{-1}|_{\Gamma^b(E_j^y)} < 1$ を示す.
 E^s についても. 同様である.

さて, $\sigma(L) = L$ のスペクトル集合 とする.

$\sigma(f_*^{-1}|_{\Gamma^c(E_j^y)}) \subset \sigma(f_*^{-1}|_{\Gamma^b(E_j^y)})$
 であるから. $\lambda \notin \sigma(f_*^{-1}|_{\Gamma^c(E_j^y)})$ である.

J. Mather [3] の証明中の結果から.

$$\delta_\lambda = \{ \mu \in \mathbb{C} \mid |\mu| = |\lambda| \} \quad \text{とする.}$$

$S_\lambda \cap (t_*^{-1} | \Gamma^C(E_j^y)) = \emptyset$ である事がわかる。

これは $t_*^{-1} : \Gamma^C(E_j^y) \rightarrow \Gamma^C(E_j^y)$ が λ -pseudo-hyperbolic であるという事である。従って t_*^{-1} -invariant splitting

$$\Gamma^C(E_j^y) = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \quad \text{が存在し}$$

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \text{spec. rad } t_*^{-1} | \Gamma_1 &< |\lambda| \\ \text{spec. rad } t_* | \Gamma_2 &< |\lambda|^{-1} \end{aligned}$$

さて S に

E_j^y の Tf -invariant subbundle E_1, E_2 があり

$$E_j^y = E_1 \oplus E_2, \quad T_i = T^C(E_i) \quad (i=1,2)$$

となる事がわかる。

さて $\text{spec. rad } t_*^{-1} | \Gamma^C(E_j^y) \geq 1$ と仮定すると

(2.1) より E_2 は 0 -vector bundle ではない。

そこで (1.2) を示したのと同様の議論を $Tf | E_2$ に適用すると、ある帰点 p_* と、 $E_2 \ni v, \|v\|=1$ で

$$\|Tf^n v\| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{となるものがあ}$$

$$\text{spec. rad } t_* | \Gamma_2 < |\lambda|^{-1} < \lambda_2^{-1} \quad \text{であるから}$$

$\exists n_0 \in \mathbb{Z}_+$ が存在し

$$n > n_0 \implies \|t_*^n | \Gamma_2\|^{1/n} < |\lambda|^{-1}$$

この事から $n > n_0$ なる $x \in \Lambda_j$ について

$$\|Tf^n | E_{2,x}\| < |\lambda|^{-n} \quad \text{となる事がわかる}$$

上に述べたように、その上では E_2 が 0 になさな

な. 同帰点 p の存在が保障されているから. これに Lemma 1 を適用して. f の perturbation g を作るのであるが. ここで Lemma 1 における $k_2 - k_1$ を十分大きくとると. 作り出した周期点 z について. (1.1) Prop. (i) にあるように.

$$\|T_g^{-\pi(z, z)}|E_f^u(g)\| \leq C_2 \lambda_1^{\pi(z, z)}$$

となるためには. stable dimension が必ず増大していなければならない事がある. ところが. perturbation の

support は十分小さくでき. $\Lambda_i \cap \Lambda_j = \emptyset \quad (i \neq j)$

であるから. $g = f$ on $\Lambda_i \quad (i \neq j)$ である.

f は構造安定であるから. $g(\Lambda_i) = \Lambda_i \quad (i \neq j)$ となさなければならない. 故に. 上で作った周期点 z の stable dimension は. もとの j でなければならない.

これは矛盾である. 従って.

$$\text{spec. rad } t_*^{-1}|T^c(E_j^u) < 1 \quad \text{となる.}$$

この事から.

$$\text{spec. rad } t_*^{-1}|T^b(E_j^u) < 1 \quad \text{がわかる.}$$

Q. E. D.

[REFERENCES]

- [0] C. Pugh , R.C. Robinson
 C^1 Closing Lemma, including Hamiltonians.
 (Preprint)
- [1] R. Mañé Expansive diffeomorphisms.
 LNM 468 (1974) 162 - 174
- [2] R. Mañé Contributions to the Stability Conjecture.
 Topology (1979)
- [3] J. Mather Characterization of Anosov diffeo.
 Indag. Math. 30 (1968) 479 - 483
- [4] A. Sannami On the Stability Conjecture.
 Master thesis. (1979) Hokkaido Univ.
- [5] J. Palis , N. Smole. Structural Stability theorem.
 Global Analysis 223 - 232
- [6] N. Smole
 Global stability questions in dynamical systems.
 symposium on Global Analysis, Washington, D.C.