

M調和関数の平均値定理

信州大理 真次康夫 (Yasuo Matsugu)

§1. Introduction

B_n を $\mathbb{C}^n$ の単位開球, $\text{Aut}(B_n)$ を B_n から B_n の上への両正則写像の全体, ν_n を B_n 上の正規化されたルベーグ測度とする。 $f \in C^2(B_n)$ に対し,

$$(\hat{\Delta}f)(z) = 4(1-|z|^2) \sum_{j,k=1}^n (\delta_{jk} - \bar{z}_j z_k) \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z), \quad z \in B_n,$$

と定義する。 B_n 上で $\hat{\Delta}f = 0$ が成立するとき, f を M調和関数であるという。 $f \in C^2(B_n) \cap L^1(\nu_n)$ が M調和であれば, f は次のような平均値定理を満たす:

$$\int_{B_n} (f \circ \gamma) d\nu_n = f(\gamma(0)), \quad \forall \gamma \in \text{Aut}(B_n). \quad (1)$$

この事実の逆に関し, P. Ahern, M. Flores と W. Rudin [1] は次のような形で解答を与えた:

i) $f \in L^\infty(\nu_n)$ が (1) を満たすならば, f は B_n 上で M調和。

ii) $1 \leq n \leq 11$, $f \in L^1(V_n)$ が (1) を満たすならば, f は B_n 上で M 調和。

iii) $n \geq 12$ ならば, B_n 上で M 調和ではないが, 条件 (1) を満たす $f \in L^1(V_n)$ が存在する。

この講演では, [1] の方法を荷重空間の場合に適用し, その有効性を検証する。最後に, 2, 3 の問題を提示する。

§ 2. M 調和関数

$\psi \in \text{Aut}(B_n)$, $a = \psi^{-1}(0) \in B_n$ ならば, $\gamma = \gamma_\psi$ 変換 $U \in U(n)$ が一意的に存在し, $\psi = U \varphi_a$ である。ここで, $U(n)$ は $\mathbb{C}^n$ 上のユニタリ群, 更に

$$\varphi_a(z) = \frac{a - P_a z - \sqrt{1 - |a|^2} (z - P_a z)}{1 - \langle z, a \rangle}, \quad z \in B_n,$$

$$P_a z = \begin{cases} \frac{\langle z, a \rangle}{|a|^2} a & (a \neq 0 \text{ の場合}) \\ 0 & (a = 0 \text{ の場合}) \end{cases}$$

$$\langle z, a \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \bar{a}_j, \quad |a|^2 = \langle a, a \rangle, \quad z = (z_1, \dots, z_n), \quad a = (a_1, \dots, a_n).$$

([5], p. 28). B_n 上のバークマン計量に関するラプラス・ベルトラミ作用素を $\tilde{\Delta}$ で表す。即ち, $f \in C^2(B_n)$, $z \in B_n$ に対し,

$$(\tilde{\Delta} f)(z) = \Delta(f \circ \varphi_z)(0) = 4(1 - |z|^2) \sum_{j,k=1}^n (\delta_{jk} - z_j \bar{z}_k) \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z),$$

ここで, Δ は通常の (ユークリディアン) ラプラス作用素である ([5], pp. 47-48; [6], p. 25). B_n 上で $\tilde{\Delta} f = 0$

を満たす $f \in C^2(B_n)$ は B_n 上 Δ 調和であるとよばれる。

[命題 1] $f \in C(B_n)$ に対し, 次の 3 条件は同値である:

- i) $f \in C^2(B_n)$ であり, B_n 上 $\Delta f = 0$ が成立する。
- ii) 任意の $z \in B_n$, 任意の $r \in (0, 1)$ に対し,

$$f(z) = \int_S f(\varphi_z(r\zeta)) d\sigma(\zeta)$$

が成立する。ここで, $S = \partial B_n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$,

σ は S 上のユークリッド測度であり, $\sigma(S) = 1$ 。

- iii) 任意の $z \in B_n$, 任意の $r \in (0, 1)$ に対し,

$$f(z) = \frac{1}{\tau(E(z, r))} \int_{E(z, r)} f d\tau$$

が成立する。ここで, $d\tau(w) = \frac{dV_n(w)}{(1-|w|^2)^{n+1}}$, $w \in B_n$,

$$E(z, r) = \varphi_z(B(0, r)) = \{w \in B_n : |\varphi_z(w)| < r\}.$$

(証明) i) $\Leftrightarrow$ ii) [5], p. 52, Theorem 4.2.4, Cor. 2.

ii) $\Rightarrow$ iii) [6], p. 33.

iii) $\Rightarrow$ i) $\forall r \in (0, 1)$ を固定する。 $B(0, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < r\}$

上の Δ に関する Dirichlet 問題の可解性 ([6], p. 55,

Theorem 5.9) により, $B(0, r)$ 上で Δ 調和な $F \in C(\overline{B(0, r)})$

が存在し, $\partial B(0, r)$ 上で $F = f$ を満たす。 $B(0, r)$ 上でも

$F = f$ が成立すれば, f は $B(0, r)$ 上で Δ 調和となり, 証

明が終わる。 $g = f - F$ とおくと, $g \in C(\overline{B(0, r)})$ であり

$\partial B(0, r)$ 上で $g=0$ を満たす。 $B(0, r)$ 上でも $g \equiv 0$ であることを示したい。仮にそうでないとする。或る点 $z_0 \in B(0, r)$ があり、 $g(z_0) \neq 0$ 。 f は実数値としてよいから、 g も実数値としてよい。従って、 $g(z_0) > 0$ 又は $g(z_0) < 0$ 。前者の場合を考える。 $m = \max \{ g(z) : z \in \overline{B(0, r)} \}$ とおくと、 $m > 0$ 。 $K = \{ z \in \overline{B(0, r)} : g(z) = m \}$ は $B(0, r)$ の空でないコンパクト部分集合である。 $\forall z \in \partial K$ を取る。或る $r_0 \in (0, 1)$ が存在して、 $E(z, r_0) \subset B(0, r)$ 。従って、

$$m = g(z) = \frac{1}{\tau(E(z, r_0))} \int_{E(z, r_0)} g d\tau < m$$

となり矛盾である。(証明終)。

[命題2] (The One-Radius Theorem). $f \in C(\overline{B_n})$ とする。任意の $z \in B_n$ に対し、 $r(z) \in (0, 1)$ が存在し、

$$f(z) = \int_S f(\varphi_z(r(z)\xi)) d\sigma(\xi)$$

が成立するならば、 f は B_n 上で M 調和である。

(証明). [5], p. 58, §. 4.3.4.

命題2が条件「 $f \in C(\overline{B_n})$ 」を、条件「 f は B_n 上の有界な実解析関数」に置き換えた場合に成立するかという問題が [5], § 4.3.4 に提示されているが、それは Izuchi [3] によって否定的に解決された。

[命題3] $f \in L^1(\nu_n)$ が B_n 上で M 調和ならば、任意の φ

$\in \text{Aut}(B_n)$ に対して, $f(\psi(0)) = \int_{B_n} (f \circ \psi) dV_n$ が成立する。

(証明) $\psi(0) = z \in B_n$ とすると, 適当な $U \in \mathcal{U}(n)$ が存在して

$\psi = \psi_z U$. このことと命題 1 により

$$\int_{B_n} (f \circ \psi) dV_n = \int_{B_n} (f \circ \psi_z) dV_n = z_n \int_0^1 r^{2n-1} dr \int_S f(\psi_z(rs)) d\sigma(s) = f(z) = f(\psi(0)).$$

(証明終)

この命題 3 の逆を §3 以下で調べておく。

§3. 作用素 T_δ

$\delta \in (-1, \infty)$ に対して, $d\mu_\delta(z) = (1 - |z|^2)^\delta dV_n(z)$, $z \in B_n$, とおく。 $f \in L^1(\mu_\delta)$, $z \in B_n$ に対して,

$$T_\delta(z) = \binom{n+\delta}{n} \int_{B_n} (f \circ \psi_z) d\mu_\delta = \binom{n+\delta}{n} \int_{B_n} \frac{(1 - |z|^2)^{n+\delta+1} (1 - |w|^2)^\delta}{|1 - \langle z, w \rangle|^{2(n+\delta+1)}} f(w) dV_n(w)$$

と定義する。

[命題 1] i) $T_\delta 1 = 1$. 即ち, $(T_\delta 1)(z) = 1$, $\forall z \in B_n$.

ii) 任意の $f \in L^1(\mu_\delta)$ に対して, $T_\delta f$ は B_n 上の実解析的関数。

iii) $f \in L^1(\mu_\delta)$ が B_n 上で M 調和ならば, B_n 上で $T_\delta f = f$.

(証明) i), ii) は明らか。iii) は §2, 命題 1 を用いて, §2, 命題 3 の証明と同様に示される。

[命題 2] $-1 < \delta < k < \infty$ ならば, T_k は $L^1(\mu_\delta)$ から

$L^1(\mu_\delta)$ の中への有界作用素であり, そのノルムは

$$\|T_k\| \leq \Gamma(k-\delta) \Gamma(n+k+\delta+2) / \Gamma(k+1) \Gamma(n+k+1).$$

(証明) [1], p. 383, Prop. 2.2 の証明と同様に証明される。

[命題 3] $-1 < \delta < \infty$, $f \in L^1(\mu_\delta)$, $\gamma \in \text{Aut}(B_n)$ ならば,
 $(T_\delta f) \circ \gamma = T_\delta(f \circ \gamma)$ が B_n 上で成立する。

(証明) [1], p. 384, Prop. 2.3 と同様。

[命題 4] $-1 < \delta < \infty$, $f \in L^1(\mu_\delta)$ とする。

i) $\delta \leq k < \infty$ に対し,

$$\Delta(T_k f) = 4(k+1)(n+k+1)(T_k f - T_{k+1} f).$$

ii) 任意の自然数 k に対し,

$$T_{k+\delta} f = G_{k,n}(\tilde{\Delta})(T_\delta f),$$

$$\text{ここに, } G_{k,n}(\lambda) = \prod_{j=1}^k \left\{ 1 - \frac{\lambda}{4(j+\delta)(n+j+\delta)} \right\}, \lambda \in \mathbb{C}.$$

(証明) [1], pp. 384-385, Prop. 2.4 の証明と同様にできる。

[注意] 1) 命題 4, ii) の λ の多項式 $G_{k,n}(\lambda)$ は δ に依存している。以後, $-1 < \delta < \infty$ なる任意の δ の与えられたいと、一々断わらない。2) 命題 4, i) より次の事実がわかる:

$f \in L^1(\mu_\delta)$ が 2 つの平均値定理 $T_k f = f = T_{k+1} f$ を或る $k \geq \delta$ に対し満たせば, f は B_n 上で M 調和である。

[命題 5] $f \in L^1(\mu_\delta)$ ならば, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - T_k f\|_{L^1(\mu_\delta)} = 0$ 。

(証明) [1], p. 385, Prop. 2.5 と同様に示される。

[命題 6] $f \in L^1(\mu_\delta)$ ならば, $T_\delta T_{1+\delta} f = T_{1+\delta} T_\delta f$ 。

(証明) [1], pp. 385-386, Prop. 2.6 の証明と同様の方法によ

り証明される。

§ 4. 関数 $\sigma_n(\lambda)$ と $\Sigma_n(\beta)$

— 変数 $\lambda \in \mathbb{C}$ の整関数 $\sigma_n(\lambda)$ を,

$$\sigma_n(\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{\lambda}{4(j+\delta)(n+j+\delta)} \right\}$$

によ、定義する。変数変換 $\lambda = -4\beta(n-\beta)$ 或は

$\lambda = -4n^2\alpha(1-\alpha)$, $n\alpha = \beta$, を考へる。 $1 \leq p < \infty$ に対し,

$$\Sigma_{n,p} = \left\{ \beta \in \mathbb{C} : -\frac{1+\delta}{p} < \operatorname{Re} \beta < n + \frac{1+\delta}{p} \right\}$$

と定義し, $\Sigma_{n,\infty} = \left\{ \beta \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} \beta \leq n \right\}$ と定義す

る。特に, $\Sigma_n \equiv \Sigma_{n,1} = \left\{ \beta \in \mathbb{C} : -(1+\delta) < \operatorname{Re} \beta < n+1+\delta \right\}$.

$$\Omega_n = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda = -4\beta(n-\beta) \text{ for some } \beta \in \Sigma_n \right\}$$

とおく。

[命題 1] $\{\lambda, \beta\} \subset \mathbb{C}$, $\lambda = -4\beta(n-\beta)$, $1 \leq p < \infty$

とする。このとき, $X_\lambda \cap L^p(\mu_\delta) \neq \{0\}$ であるためには,

$\beta \in \Sigma_{n,p}$ であることが必要十分である。ただし,

$$X_\lambda = \left\{ f \in C^2(B_n) : \Delta f = \lambda f \right\}.$$

(証明) [1], 1.387, Prop 3.2 の証明とほぼ同様に示される。

[命題 2] $\lambda \in \Omega_n$ ならば, $\sigma_n(\lambda) \neq 0$ か $\sigma_n'(\lambda) \neq 0$.

(証明) [1], 1.387, Prop 3.3 と同様。

[命題 3] $\lambda \in \Omega_n$, $f \in X_\lambda \cap L^1(\mu_\delta)$ ならば,

$$T_\delta f = \frac{1}{\sigma_n(\lambda)} f.$$

(証明) $f \in X_\lambda$ より, $z \in B_n$, $0 \leq r < 1$, $\gamma \in S$ に対し,

$$\int_S f(\varphi_z(r\zeta)) d\sigma(\zeta) = g_\alpha(r\gamma) f(z)$$

が成立する ([5], p. 51, Theorem 4.2.4). 従って,

$$(T_\delta f)(z) = \binom{n+\delta}{n} \int_{B_n} (f \circ \varphi_z) d\mu_\delta = \binom{n+\delta}{n} \left(\int_{B_n} g_\alpha d\mu_\delta \right) f(z).$$

任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し, §3, 命題4により

$T_{k+\delta} f = \sigma_{k,n}(\delta) T_\delta f = c \sigma_{k,n}(\delta) f = c \sigma_{k,n}(\lambda) f$,
 $c = \binom{n+\delta}{n} \int_{B_n} g_\alpha d\mu_\delta$. $k \rightarrow \infty$ とすれば, §3,
 命題5より, $f = c \sigma_n(\lambda) f$ を得る。 $\lambda \in \Omega_n$ だから, 命
 題1により, $g \in X_\lambda \cap L^1(\mu_\delta) \setminus \{0\}$ が存在する。

$c \sigma_n(\lambda) g = g \neq 0$ であるから, $c \sigma_n(\lambda) = 1$. ゆえに,

$c = 1/\sigma_n(\lambda)$, $T_\delta f = c f = (1/\sigma_n(\lambda)) f$ として証明終。

[命題4] $\delta = 0$ の場合. $\{\lambda, \beta\} \subset \mathbb{C}$, $\lambda = -4\beta(n-\beta)$

ならば,

$$\sigma_n(\lambda) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(1+\beta)\Gamma(n+1-\beta)}.$$

(証明) [1], pp. 388-389, Prop 3.5 を用いる。

$\mathbb{C}$ 上の有理型関数 Φ_n を,

$$\Phi_n(\beta) = \Gamma(1+\beta)\Gamma(n+1-\beta) / \Gamma(n+1), \quad \beta \in \mathbb{C},$$

により定義する。 $\Phi_n^{-1}(\infty) = \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, \dots, n\}$, $\beta \in (\mathbb{R} \setminus \Phi_n^{-1}(\infty))$ に対し, $\Phi_n(\beta) \in \mathbb{R}$ かつ Φ_n は零点をもたないから $\Sigma_n \setminus \{-1, n+1\}$ 上で連続な分枝 $A_n(\beta) \equiv \arg \Phi_n(\beta)$ が存在し, $A_n(0) = 0$.

[命題5] $\delta = 0$ とする。(a) 任意の $x \in \mathbb{R}$ を固定するとき, $|\Phi_n(x+iy)|$ は $|y| \rightarrow \infty$ するとき値 0 に単調に減少する。

(b) $\Sigma_{n,\infty} \setminus \{0, n\}$ 上で $|\Phi_n(\beta)| < 1$. (c) $0 \leq c < 1$ を固定する。 c が $-\infty$ から $+\infty$ に増加するとき, $A_n(-c-ix)$ は $-(n/2+c)\pi$ から $(n/2+c)\pi$ に単調に増加する。(d) $1 \leq p < \infty$ に対し, 十分大きな n をとれば, 方程式 $\Phi_n(\beta) = 1$ は $\Sigma_{n,p} \setminus \{0, n\}$ の中に解をもつ。これは n 解の個数は, 各 n に対し有限個であり, $n \rightarrow \infty$ とき ∞ に増加しなく。

(証明) [1], pp. 389-391.

[命題6] $\delta = 0$ とする。 $n \in \mathbb{N}$ に対し,

$\{\beta \in \Sigma_n \setminus \{0, n\} : \Phi_n(\beta) - 1 = 0\} = \emptyset$ であるための必要十分条件は $1 \leq n \leq 11$ である。

(証明) [1], p. 392, Prop. 3.8.

§5. Ahern-Flores-Rudin の定理

$-1 < \delta < \infty$ を固定する。 $M = \{f \in L^1(\mu_\delta) : T_\delta f = f\}$

と置く。 $\delta < c < \infty$ に対し, §3, 命題2により, T_δ は

$L^1(\mu_\delta)$ から $L^1(\mu_c)$ への有界作用素であり, 恒等作用素 I

も $L^1(\mu_\delta)$ から $L^1(\mu_\delta) \wedge \alpha$ 有界作用素である。 $M = \{ f \in L^1(\mu_\delta) : (I - T_\delta)f = 0 \}$ であるから、 M は $L^1(\mu_\delta)$ の閉部分空間である。 $f \in M$ ならば、 $f = T_\delta f$ は §3, 命題 1 により、 B_n 上で実解析的である。 そこで、偏微分作用素 $\tilde{\Delta}$ の M への制限 $\tilde{\Delta}_M$ を考えることができる。 $f \in M$ に対し、 §3, 命題 4 より、 $\tilde{\Delta}_M f = \tilde{\Delta} f = \tilde{\Delta}(T_\delta f) = 4(\delta+1) \times (n+\delta+1)(T_\delta f - T_{\delta+1} f) = 4(\delta+1)(n+\delta+1)(f - T_{\delta+1} f)$ が成立する。従って、 M 上で $\tilde{\Delta}_M = C(I - T_{\delta+1})$ 、ただし $C = 4(\delta+1) \times (n+\delta+1)$ 。 $T_{\delta+1}$ は $L^1(\mu_\delta)$ から $L^1(\mu_\delta)$ の中への有界作用素であるから、 $\tilde{\Delta}_M$ は M から $L^1(\mu_\delta)$ の中への有界作用素となる。更に、 §3, 命題 6 より、 $\tilde{\Delta}_M(M) \subset M$ が従うことが容易にわかる。ゆえに、 $\tilde{\Delta}_M$ は M から M の中への有界作用素である。

任意の $f \in M$ 、任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し、 §3, 命題 4 より、 $T_{k+\delta} f = b_{k,n}(\tilde{\Delta})(T_\delta f) = b_{k,n}(\tilde{\Delta}_M)f$ であるから、 $k \rightarrow \infty$ とすることはより、 §3, 命題 5 を用いると、 $f = b_n(\tilde{\Delta}_M)f$ である。そこで、作用素ノルムに関して、 $\lim_{k \rightarrow \infty} b_{k,n}(\tilde{\Delta}_M) = b_n(\tilde{\Delta}_M)$ である。ゆえに、 M 上で $b_n(\tilde{\Delta}_M) = I$ が成立つ。

$E_n = \{ \lambda \in \Omega_n : b_n(\lambda) = 1 \}$ とおくと、 E_n は $\tilde{\Delta}_M$ の固有値全体 $\sigma_p(\tilde{\Delta}_M)$ と一致する。実際、 $\lambda \in E_n$ ならば、 $\lambda \in \Omega_n$ であるから、対応して $\beta \in \Sigma_n = \Sigma_{n,1}$ 。 §4, 命題 1 より、 $f \in X_\lambda \cap L^1(\mu_\delta) \setminus \{0\}$ が存在する。 §4, 命題 3 より、

$T_\delta f = (1/\sigma_n(\lambda))f = f$ となり, $f \in M \setminus \{0\}$. $\widetilde{\Delta}_M f = \widetilde{\Delta} f = \lambda f$ であるから, $\lambda \in \sigma_p(\widetilde{\Delta}_M)$. 逆に, $\lambda \in \sigma_p(\widetilde{\Delta}_M)$ とすれば, $\widetilde{\Delta}_M f = \lambda f$ を満たす $f \in M \setminus \{0\}$ が存在する。

$f \in X_\lambda \cap L^1(\mu_\delta) \setminus \{0\}$ だから, $X_\lambda \cap L^1(\mu_\delta) \neq \{0\}$. §4, 命題 1 より, $\beta \in \bar{\Sigma}_{n,1} = \bar{\Sigma}_n$. 対応 12, $\lambda \in \Omega_n$. §4, 命題 3 より, $T_\delta f = (1/\sigma_n(\lambda))f$ を得る。他方, $f \in M$ より $T_\delta f = f$ であるから, $\sigma_n(\lambda) = 1$. ゆえに, $\lambda \in E_n$ が従う。

これ以後, $\delta = 0$ とする。(おこは,

$$\sigma_n(\lambda) = \prod_{j=1}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{1}{4j(n+j)} \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

$$\frac{1}{\sigma_n(\lambda)} = \Phi_n(\beta) = \frac{\Gamma(1+\beta) \Gamma(n+1-\beta)}{\Gamma(n+1)}, \quad \lambda = -4\beta(n-\beta).$$

ガンマ関数 Γ の性質を用いて, 調べると, §4, 命題 5, (d) より, E_n は有限集合であり, $0 \in E_n$ かつ E_n は次の形をしている:

$$E_n = \{\lambda \in \Omega_n : \sigma_n(\lambda) = 1\} = \{0, \lambda_1, \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_{m(n)}, \bar{\lambda}_{m(n)}\},$$

ここで, $m(n) \in \mathbb{Z}_+$, $\operatorname{Im} \lambda_j > 0$ ($1 \leq j \leq m(n)$). 更に,

[1], p. 392, Prop. 3.8 により, 次の事実の数値計算を用いてわかる。i) $n \leq 11$ ならば, $m(n) = 0$, 従って, $E_n = \{0\}$.

ii) $n \geq 12$ ならば, $m(n) \geq 1$, 従って, $E_n \neq \{0\}$.

さて, バナッハ空間 M は次のように直和分解できる:

$$M = \sum_{\lambda \in E_n} \oplus \{X_\lambda \cap L^1(V_n)\}.$$

実際, E_n の各点で 1 位の零点をもち, 他に零点をもたないモノックな多項式を Q とする。1 から,

$$F(\lambda)Q(\lambda) = g_n(\lambda) - 1, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

$$F(\lambda) \neq 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus E_n$$
を満たす $\mathbb{C}$ 上の整関数 F が存在する。スペクトル定理により,
$$\sigma_p(F(\tilde{\Delta}_M)) = F(\sigma_p(\tilde{\Delta}_M)) = F(E_n) \neq 0.$$
ゆえに, 写像 $F(\tilde{\Delta}_M): M \rightarrow M$ は 1 対 1 である。
$$F(\tilde{\Delta}_M)Q(\tilde{\Delta}_M) = g_n(\tilde{\Delta}_M) - I = 0$$
であるから, M 上 $Q(\tilde{\Delta}_M) = 0$ であることがわかる。これより, [1], p393, Lemma 4.1 を用いると,
$$M = \sum_{\lambda \in E_n} \{X_\lambda \cap L^1(V_n)\}$$
が得られる。この分解と上述の集合 E_n の性質を用いることにより, 次の結果を得る。

i) $n \leq 11$ ならば, $M = X_0 \cap L^1(V_n) = \{f \in L^1(V_n) : \tilde{\Delta}f = 0\}$.

即ち, $f \in L^1(V_n)$ に対し, $T_0f = f$ であるための必要十分条件は, $\tilde{\Delta}f = 0$ である。

ii) $n \geq 12$ ならば, $\{0\} \subsetneq X_\lambda \cap L^1(V_n) \subset M$ を満たす $\lambda \in E_n \setminus \{0\}$ が存在する。 $f \in X_\lambda \cap L^1(V_n) \setminus \{0\}$ に対し, $T_0f = f$ しか $\tilde{\Delta}f = \lambda f \neq 0$ 。

一般の $p \in [1, \infty]$ に対し p は, 同様の考察により, 次の

ような結果を得る。 $E(n, p) = \{ \lambda \in E_n : X_\lambda \cap L^p(V_n) \neq \{0\} \}$

とおくとき、 $0 \in E(n, p) \subset E_n$, $E(n, 1) = E_n$. $M \cap L^p(V_n)$

は,

$$M \cap L^p(V_n) = \sum_{\lambda \in E(n, p)} \oplus X_\lambda \cap L^p(V_n)$$

の形に直和分解できる。特に、 $p = \infty$ のとき、

$$E(n, \infty) = \{0\},$$

$$M \cap L^\infty(V_n) = X_0 \cap L^\infty(V_n) = \{ f \in L^\infty(V_n) : \Delta f = 0 \},$$

即ち、 $f \in L^\infty(V_n)$ に対し、 $T_0 f = f$ であるための必要十

分条件は (次元 n に関係なく) $\Delta f = 0$ である。

§6. 2, 3 の問題.

[問題1] Ahern-Flores-Rudin の定理は、任意の $\delta \in (-1, \infty)$ に対し、 $L^1(\mu_\delta)$ に属する関数 f について、どのような条件で成立するか。即ち、 $f \in L^1(\mu_\delta)$, $T_\delta f = f$ ならば、 f は B_n 上で M 調和であるか？

[問題2] Ahern-Flores-Rudin の定理は、関数の定義域を B_n から多重円板に置き換えたとき成立するか？

[問題3] f を B_n 上で有界な実解析的関数とする。任意の $z \in B_n$ に対し、 $r(z) \in (0, 1)$ が存在し、

$$f(z) = \frac{1}{\tau(E(z, r(z)))} \int_{E(z, r(z))} f d\tau$$

が成立すると仮定する。このとき、 f は B_n 上で M 調和か？

[問題4] Ω を B_n の相対コンパクトな部分領域とする。

B_n 上の任意の M 調和関数 f に対し,

$$f(a) = \frac{1}{\tau(\Omega)} \int_{\Omega} f d\tau$$

が成立すると仮定する。このとき、 $a \in B_n$ は f に依存しない定数である。このとき、ある $r \in (0, 1)$ が存在して、 $\Omega = E(a, r)$ となるか? (cf. [2], [4]).

引用文献

- [1] P. Aherne, M. Flores and W. Rudin, An invariant volume-mean-value property, J. Func. A., 111 (1993), 380-397.
- [2] B. Epstein and M. M. Schiffer, On the mean value properties of harmonic functions, J. d'Analyse Math., 14 (1965), 109-111.
- [3] K. Izuchi, The one-radius theorem is not true for bounded real-analytic functions, Proc. Amer. Math. Soc., 103 (1988), 823-830.
- [4] 金子宏 and 阪井章, 調和関数の平均値とブラウン運動, 数学, 41 (1989), 86-88.
- [5] W. Rudin, Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag, New York, 1980.
- [6] M. Stoll, Invariant Potential Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$, London Math. Soc. Lecture Note Series 199, 1994.