

階数 m の Wiener 函数

名大 理 田 中 秀松

§ 1 序

単位円周上に任意に m 個の連続函数 f_i ($1 \leq i \leq m$) を与える時, 円内に於て

$$\Delta^m u = 0$$

又円周上, 各 i ($1 \leq i \leq m$) に対して

$$(-\Delta)^{i-1} u = f_i$$

をみたす u を求めることを, Riquier の問題といひ, 彼により解かれた。伊藤氏は [2] に於て一般に n 次元 Euclid 空間内の有界開集合に関する上記の問題を掃散測度の系列により積分表示して解いた。このノートでは, 掃散測度の系列の性質を調べることにより, 上記の問題を非有界開集合に対して解く方法について述べる。

§ 2 記号と定義

n 次元 Euclid 空間 R^n 内の開集合 Ω をとるとき, $u \in C^{2m}(\Omega)$,

に対して Ω 内に於て

$$\Delta^m u = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \right)^m u = 0$$

がみたされるとき, u を Ω に於ける階数 m の多重調和函数という。 Ω の Green 函数を $G_\Omega(\cdot, \cdot)$ とかき, $x, y \in \Omega$ に対して

$$G_\Omega^{(i)}(x, y) = \int \cdots \int G_\Omega(x, z_1) G_\Omega(z_1, z_2) \cdots G_\Omega(z_{i-1}, y) dz_1 dz_2 \cdots dz_{i-1}$$

とおく。定数を適当に補正して

$$(-\Delta_y)^i G_\Omega^{(i)}(x, y) = \varepsilon_x$$

なるようにする。今 Ω を有界開集合として, 序で述べた伊藤氏[2]の結果, 及び掃散測度の系列について記す。

命題1 有界開集合 Ω の境界 $\partial\Omega$ 上に m 個の有界連続函数 f_i ($1 \leq i \leq m$) を与える。この時 Ω 上に m 個の正 Radon 測度 $\varepsilon_{x, \Omega}^{(i)}$ ($1 \leq i \leq m$) が存在して, Ω と f_i ($1 \leq i \leq m$) に関する Riquier 問題の解は

$$H_\Omega(x; (f_i)_{i=1}^m) = \sum_{i=1}^m \int f_i(y) d\varepsilon_{x, \Omega}^{(i)}(y)$$

により求まる。

ここで各 $x \in \Omega$ に対して得られた m 個の正 Radon 測度 $\varepsilon_{x, \Omega}^{(i)}$ ($1 \leq i \leq m$) と測度 ε_x の Ω への掃散測度の系列という。 f を Ω 上の有界連続函数, H_f^Ω を境界値 f に対する Ω 内の Dirichlet 問題の解とするとき, 上の測度は次式で特徴づけられる。

$$\int f(y) d\varepsilon_{x, \Omega}^{(i)}(y) = H_f^\Omega(x)$$

$$\int f(y) d\varepsilon_{x, \Omega}^{(i)}(y) = \int H_f^\Omega(z) G_\Omega^{(i-1)}(x, z) dz$$

次に Ω を任意の南集合として, Ω の上の階数 i の Wiener 函数を定義しよう. $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ を Ω の exhaustion とすると $\varepsilon_i (1 \leq i \leq m)$ に対して正 Radon 測度の列 $(\varepsilon_{x, \Omega_n}^{(i)})_{n=1}^{\infty}$ が得られる.

定義 Ω 上の有界連続函数 f が Ω 上の階数 i の Wiener 函数であるとは, Ω の任意の exhaustion $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して列

$$\left\{ \int f(y) d\varepsilon_{x, \Omega_n}^{(i)}(y) \right\}_{n=1}^{\infty}$$

が各 $x \in \Omega$ に於て収束する場合をいう.

Ω 上の階数 i の Wiener 函数全体を $W^{(i)}(\Omega)$ とかき, $f \in W^{(i)}(\Omega)$ に対して

$$R_f^{(i)}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f(y) d\varepsilon_{x, \Omega_n}^{(i)}(y)$$

$$W_0^{(i)}(\Omega) = \{ f \in W^{(i)}(\Omega); R_f^{(i)} = 0 \}$$

とおく. $W^{(i)}(\Omega)$ (又は $W_0^{(i)}(\Omega)$) は [1] で述べられている通常の Wiener 函数 (又は Wiener ポテンシャル) である.

以後簡単のためある $x \in \Omega$ に対して

$$\int G_{\Omega}^{(i-1)}(x, y) dy < \infty$$

が成立するとき, Ω は条件 [i] をみたすということにする.

Ω が条件 [i] をみたせば各点 $x \in \Omega$ に対して上記積分は有限である.

§3 函数族 $W^{(i)}(\Omega)$ ($1 \leq i \leq m$) について

函数族 $W^{(i)}(\Omega)$ ($W_0^{(i)}(\Omega)$) ($1 \leq i \leq m$) の関係について次のことが成立する.

命題2 Ω を任意の開集合とする。 Ω が条件 [i] をみたすことと $W^{(i)}(\Omega) = W^{(i)}_0(\Omega)$, $W^{(i)}_0(\Omega) = W^{(i)}(\Omega)$ が成立することは同値。

証明 f を Ω で有界連続, $\{\Omega_k\}_{k=1}^{\infty}$ を Ω の exhaustion とする。

G_{Ω_k} を Ω_k の Green 函数とすると

$$\int \left(\int f(y) d\varepsilon_{x, \Omega_k}^{(i)}(y) \right) G_{\Omega_k}^{(i-1)}(x, z) dx = \int f(y) d\varepsilon_{z, \Omega_k}^{(i)}(y)$$

$f \in W^{(i)}(\Omega)$ とすれば各 $x \in \Omega$ に対して

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f(y) d\varepsilon_{x, \Omega_k}^{(i)}(y) = R_f^{(i)}(x)$$

条件 [i] より各 $x \in \Omega$ に対して

$$\left| \int \left(\int f(y) d\varepsilon_{x, \Omega_k}^{(i)}(y) \right) G_{\Omega_k}^{(i-1)}(x, z) dz \right| \leq \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \int G_{\Omega_k}^{(i-1)}(z, y) dy < \infty$$

従って $\lim_{k \rightarrow \infty} \int f(y) d\varepsilon_{z, \Omega_k}^{(i)}(y) = \int R_f^{(i)}(x) G_{\Omega}^{(i-1)}(z, x) dx$

これより $W^{(i)}(\Omega) \subset W^{(i)}_0(\Omega)$, $W^{(i)}_0(\Omega) \subset W^{(i)}(\Omega)$ をうる。

逆に $W^{(i)}_0(\Omega) \ni f$ とする。 $\Omega \ni x_0$ を固定し, $\varphi_{x_0} \in C^{(i-1)}_0(\Omega)$, ≥ 0 ,

x_0 の廻りの回転で不変, 且つ $\int \varphi_{x_0}(y) dy = 1$ なる函数をとる。

条件 [i] と $f \in W^{(i)}(\Omega)$ であることから

$$\left\{ \int H_f^{\Omega_k}(x) \left(\int G_{\Omega_k}^{(i-1)}(x, z) (-\Delta)^{i-1} \varphi_{x_0}(z) dz \right) dx \right\}_{k=1}^{\infty}$$

は収束列である。ところで十分大なる k に対しては

$$\int H_f^{\Omega_k}(x) \left(\int G_{\Omega_k}^{(i-1)}(x, z) (-\Delta)^{i-1} \varphi_{x_0}(z) dz \right) dx = \int H_f^{\Omega_k}(x) \varphi_{x_0}(x) dx = H_f^{\Omega_k}(x_0)$$

従って函数列 $\left\{ \int f(y) d\varepsilon_{x, \Omega_k}^{(i)}(y) \right\}$ は x_0 に於て収束, x_0 は任意にとれたから $f \in W^{(i)}(\Omega)$ をうる。 $W^{(i)}_0(\Omega) \subset W^{(i)}(\Omega)$ も同様。

又 $W^{(i)}(\Omega) = W^{(i)}_0(\Omega)$ が成立すれば $1 \in W^{(i)}(\Omega)$ となり Ω は条件 [i] をみたすことがわかる。

系 Ω が条件 [M] をみたすことと次は同値である。

$$W^{(1)}(\Omega) = W^{(2)}(\Omega) = \dots = W^{(m)}(\Omega), \quad W_0^{(1)}(\Omega) = W_0^{(2)}(\Omega) = \dots = W_0^{(m)}(\Omega)$$

系 Ω が条件 [I] をみたし $f \in W^{(1)}(\Omega)$ とすると

$$\Delta^i f|_+ = 0, \quad f - (-\Delta)^{-1} \Delta^i f|_+ \in W_0^{(1)}(\Omega)$$

§ 4 非有界開集合 Ω に対する Riquier 問題

この § では Ω を条件 [M] をみたす開集合とする。

Ω_W^* を Ω の Wiener コンパクト化, $\Delta_W = \Omega_W^* - \Omega$, Γ_W を Ω_W^* の調和境界即ち $\Gamma_W = \{x \in \Delta_W; f(x) = 0, \forall f \in W_0^{(1)}(\Omega)\}$ とする。

命題 3 $\{\Omega_n\}_{n=1}^\infty$ を Ω の exhaustion とすると測度列 $\{\varepsilon_{x, \Omega_n}^{(i)}\}_{n=1}^\infty$ は各 $x \in \Omega$ に対して Ω_W^* 内で一致収束する。その極限を $\varepsilon_x^{(i)}$ とし, $S_{\varepsilon_x^{(i)}}$ をその support とすれば各 $x \in \Omega$ に対して

$$S_{\varepsilon_x^{(i)}} = S_{\varepsilon_x^{(j)}} = \Gamma_W \quad (2 \leq i \leq m)$$

証明 $W^{(1)}(\Omega) = C(\Omega_W^*)$ 【[1] Satz 9.3】であるから任意の $f \in C(\Omega_W^*)$ に対して f の Ω への制限は $W^{(1)}(\Omega)$ に含まれる。よって函数列 $\{\int f(y) d\varepsilon_{x, \Omega_n}^{(i)}(y)\}_{n=1}^\infty$ は収束する。

次に f を Δ_W 上有界連続, Γ_W 上 $f = 0$ とし, $f^* \in C(\Omega_W^*)$, Δ_W 上 $f^* = f$ とすれば, $f^* \in W_0^{(1)}(\Omega)$ 故

$$\int f(y) d\varepsilon_x^{(i)}(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f^*(y) d\varepsilon_{x, \Omega_n}^{(i)}(y) = 0$$

従って $S_{\varepsilon_x^{(i)}} \subset \Gamma_W$. 又 $S_{\varepsilon_x^{(i)}} = \Gamma_W$ であるから $S_{\varepsilon_x^{(i)}} \subset S_{\varepsilon_x^{(j)}}$ を示せばよい。これは任意の $f \in C(\Delta_W)$ に対して f^* をその $\Omega_W^* \cap \Delta_W$ の連続拡張とすると各 x について

$$\int f^*(y) d\varepsilon_{x, \omega_q}^{(1)}(y) = \int \left(\int f^*(y) d\varepsilon_{x, \omega_q}^{(1)}(y) \right) G_{\Omega_q}^{(1-1)}(x, z) dz$$

であるから, f^* が Ω の制限 $W^{(1)}(\Omega)$ に含まれることより

$$\int f(y) d\varepsilon_x^{(1)}(y) = \int \left(\int f(y) d\varepsilon_x^{(1)}(y) \right) G_{\Omega}^{(1-1)}(x, z) dz$$

従って $S_{E_x^{(1)}} \subset S_{E_x^{(1)}}$.

以上の準備のもとに条件 [M] をみたす開集合 Ω に対する Riquier の問題は次のようにとかれる。

命題 4 任意に m 個の $f_i \in C(\Delta_W)$ ($1 \leq i \leq m$) を与えるとき次をみたす函数 $\bar{h}(f_1, \dots, f_m)$ が存在する。 Ω 内に於て

$$\Delta^m \bar{h}(f_1, \dots, f_m) = 0$$

又各 i ($1 \leq i \leq m$) に於いて Γ_W 上

$$(-\Delta)^{i-1} \bar{h}(f_1, \dots, f_m) = f_i$$

証明 $f_i^* \in C(\Omega_W^*)$ を $f_i^* = f_i$ が Δ_W 上成立するものとする

$$\bar{h}_{f_i^*}^{(i)}(x) = \int f_i(y) d\varepsilon_x^{(i)}(y),$$

$$\bar{h}(f_1, \dots, f_m)(x) = \sum_{i=1}^m \bar{h}_{f_i^*}^{(i)}(x)$$

とおけば Ω 内に於て

$$\Delta^m \bar{h}(f_1, \dots, f_m) = 0$$

又各 i ($1 \leq i \leq m$) に於いて

$$(-\Delta)^{i-1} \bar{h}(f_1, \dots, f_m)(x) = (-\Delta)^{i-1} \bar{h}_{f_i^*}^{(i)}(x) + \sum_{k=i+1}^m (-\Delta)^{i-1} \bar{h}_{f_k^*}^{(k)}(x)$$

とこそ

$$\sum_{k=i+1}^m (-\Delta)^{i-1} \bar{h}_{f_k^*}^{(k)}(x) = \int \left(\sum_{k=i+1}^m (-1)^k \bar{h}_{f_k^*}^{(k)}(z) G_{\Omega}^{(k-1)}(y, z) dz \right) G_{\Omega}(x, y) dy$$

であるからこれは $W_0^{(1)}(\Omega)$ に含まれる。一方 $(-\Delta)^{i-1} \bar{h}_{f_i^*}^{(i)}$ は

$W^{(1)}(\Omega)$ に含まれるから $(-\Delta)^{i-1} f(t_1, \dots, t_m)$ は Ω_W^* に連続拡張することが出来る。各 $x \in T_W$ に対して

$$(-\Delta)^{i-1} f(t_1, \dots, t_m)(x) = (-\Delta)^{i-1} f_{f_i^*}^{(i)}(x) = f_{f_i^*}^{(i)}(x) = f_i(x)$$

注意 上の逆として Ω がもし上のような解をもつとすれば Ω は条件 [M] を満たさなければならない。従って非有界な開集合に対する Riquier の問題は条件 [M] という有界性とたいてい変らぬ制限のもとにしか解けなことが知られる。勿論非有界で条件 [M] を満たす開集合は存在するかより上の結果は命題 1 を含む。

§5 方程式 $\Delta u - pu = 0$ に対する応用。

Ω を R^n の任意の開集合, p を Ω 上非負連続的微分可能な函数として, Ω 上に方程式

$$L_p u = (\Delta - p)u = \Delta u - pu = 0$$

を考える。この場合についても前記の事実と同様に成立する。

今 $\inf_{\Omega} p > 0$ とすれば $L_p u = 0$ に対する Ω の Green 関数を $G_{p,\Omega}$ とすれば, いかなる Ω に対しても

$$\sup_{x \in \Omega} \int G_{p,\Omega}(x, y) dy < \infty$$

従って

$$G_{p,\Omega}^{(m-1)}(x, y) = \int \dots \int G_{p,\Omega}(x, z_1) G_{p,\Omega}(z_1, z_2) \dots G_{p,\Omega}(z_{m-2}, y) dz_1 dz_2 \dots dz_{m-2}$$

とあるとき各 $x \in \Omega$ について

$$\int G_{p,\Omega}^{(m-1)}(x, y) dy \leq \left(\sup_{x \in \Omega} \int G_{p,\Omega}(x, y) dy \right)^{m-1} < \infty$$

即ち Ω は条件 [M] を満たす。

従って $L_p u = 0$ の場合に対する Riquier の問題は 1) かなる 開集合 Ω に対しても次のようにとける。

$\Omega_{W_p}^*$ を Ω の p -Wiener コンパクト化, $\Delta_{W_p} = \Omega_{W_p}^* - \Omega$, Γ_{W_p} を Δ_{W_p} の調和境界とする。([3])

命題 5 $f_i \in C(\Delta_{W_p})$ ($1 \leq i \leq m$) を任意に与えると次のような函数 $R_{(f_1, \dots, f_m)}^p$ が存在する。 Ω 上に於て

$$(L_p)^m R_{(f_1, \dots, f_m)}^p = 0$$

各 i ($1 \leq i \leq m$) に対して Γ_{W_p} 上

$$(-L_p)^{i-1} R_{(f_1, \dots, f_m)}^p = f_i$$

参考文献

- [1] C. Constantinescu and A. Cornea : *Ideale Ränder Riemannscher Flächen*
Springer - Verlag (1963).
- [2] H. Itô : Sur les fonctions polyharmoniques et le problème de
Riquier. Nagoya Math. J., 37. 81-90 (1970)
- [3] H. Tanaka : On Wiener compactification of a Riemann surface associated
with the equation $\Delta u = pu$. Proc. Japan Acad., 45, 695-699 (1969)