

統計多様体とアファイン微分幾何学

– Statistical manifolds and affine differential geometry –

名古屋工業大学・大学院工学研究科 松添 博¹

Hiroshi Matsuzoe

Graduate School of Engineering

Nagoya Institute of Technology

概要

統計多様体とは擬 Riemann 多様体と振れないアファイン接続の組で、計量とアファイン接続がある種の適合性 $((0, 3)\text{-Codazzi 構造})$ を満たすものである。統計多様体という用語は情報幾何学において導入されたが、この構造自体はアファイン微分幾何学において従前より研究が行われてきた。そこで本論文では統計多様体の幾何学について、アファイン微分幾何学の立場から解説する。特に統計多様体の一般化した共形構造について考察したのち、情報幾何学で重要な役割を果たす Legendre 変換や正準ダイバージェンスについて、アファイン微分幾何学の視点から解釈を与え、その一般化について解説する。また、余次元 2 の中心アファインはめ込みの理論が、情報幾何学には有用であることも解説する。

1 はじめに

統計的推論の幾何学的方法論の一つとして情報幾何学が知られている。情報幾何学では統計モデルを Riemann 多様体とみなし、そこに双対的なアファイン接続を導入する。この双対アファイン接続を用いることで最尤推定法をはじめとする統計学における推定手法を、幾何学的に捉えることが可能となる。情報幾何学は統計学や機械学習理論など、多くの分野に応用され研究が進められている [1]。統計多様体とはこのような統計モデルの持つ双対的なアファイン接続の構造を微分幾何学的な視点から定式化したものであり、Lauritzen によって導入された [10]。

一方、双対的なアファイン接続の幾何学は、アファイン曲面論など微分幾何学の中でも古くから研究がなされてきた [16], [18]。Kurose はアファイン超曲面論の立場から統計多様体の幾何学を考察し、統計多様体の定義を再定式化した [8]。多様体に内在する幾何学としては同値であるが、アファイン空間への実現性などでは違いがある。現在では微分幾何学の分野では、主に Kurose の定義が用いられている。

統計多様体の幾何学をアファイン微分幾何学の立場から考察すると、統計多様体の一般化した共形構造が重要な役割を果たすことがわかる [8], [11]。統計多様体の共形構造の一般化に関する議論は、もともとは統計学で導入されたものである [19]。その後 Kurose らの研究 [8], [9], [11], [12] により、幾何学的性質の解明や拡張などが行われてきた。

¹本研究の一部は科学研究費補助金 (若手研究 (B) 課題番号:23740047) の助成を受けたものである。

そこで本論文は、統計多様体の幾何学をアファイン微分幾何学の立場から解説する。特に前半では、統計多様体のさまざまな一般化した共形構造について考察する。なお、統計多様体の一般化した共形構造は、異常統計の分野などでも研究が行われている [2], [20]。また近年、逐次推定の漸近理論の分野でも、その幾何学が再発見された [7]。

また、情報幾何学で重要な役割を果たす Legendre 変換や正準ダイバージェンスについて考察すると、余次元 2 の中心アファインはめ込み [17], [11] が、自然な解釈や一般化を与える。本論文の後半では余次元 2 の中心アファインはめ込みと統計多様体の幾何学の関連をまとめる。

2 統計多様体

2.1 双対接続と統計多様体

本論文では多様体は滑らかであるとし、幾何学的諸量は局所的な状況で議論する。まず始めに双対接続の定義を与える。

M を n 次元多様体、 h を M 上の非退化な $(0, 2)$ -テンソル場、 ∇ を M 上のアファイン接続とする。このとき、 ∇ の h に関する双対接続 ∇^* を次の式で定義する。

$$Xh(Y, Z) = h(\nabla_X^* Y, Z) + h(Y, \nabla_X Z),$$

ただし X, Y および Z は M 上のベクトル場である。この定義は情報幾何学において一般的なものであるが、双対接続は問題設定に応じて適切に定義する必要があることを注意しておく [3], [13], [16]。

アファイン接続 ∇, ∇^* の曲率テンソルを、それぞれ R, R^* とすると、

$$h(R(X, Y)Z, V) = -h(Z, R^*(X, Y)V) \quad (1)$$

が成り立つ。また、一般に $(\nabla^*)^* \neq \nabla$ である。 $(0, 2)$ -テンソル場 h が対称な場合、 $h(X, Y) = h(Y, X)$ 、または歪対称な場合、 $h(X, Y) = -h(Y, X)$ には、 $(\nabla^*)^* = \nabla$ が成り立つ。

命題 2.1 次の条件のうち 2 つを仮定すると、残りが成り立つ。

- (1) ∇ は捩れを持たない。
- (2) ∇^* は捩れを持たない。
- (3) $(\nabla_X h)(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z)$ 。

ここまでの議論は、計量に相当する $(0, 2)$ -テンソル場 h が対称でない場合でも一般的に成り立つ。

以下 h の対称性、すなわち、 h が M 上の擬 Riemann 計量であることを仮定する。特に計量の正値性も仮定する場合には g と表記する。

命題 2.2 以下の条件のうち2つを仮定すると、残り2つの条件が成り立つ。

- (1) ∇ は捩れを持たない。
- (2) ∇^* は捩れを持たない。
- (3) $C = \nabla h$ は対称である。
- (4) $\nabla^{(0)} = (\nabla + \nabla^*)/2$ は h に関する Levi-Civita 接続である。

したがって、互いに双対的な捩れのないアファイン接続の組からは、対称な $(0,3)$ -テンソル場 C が自然に定義される。逆に次の命題も成り立つ。

命題 2.3 (M, h) を擬 Riemann 多様体とし、 $\nabla^{(0)}$ を h に関する Levi-Civita 接続とする。また C を対称な $(0,3)$ -テンソル場とし、

$$h(\nabla_X Y, Z) = h(\nabla_X^{(0)} Y, Z) - \frac{1}{2}C(X, Y, Z), \quad (2)$$

$$h(\nabla_X^* Y, Z) = h(\nabla_X^{(0)} Y, Z) + \frac{1}{2}C(X, Y, Z) \quad (3)$$

によって ∇ と ∇^* を定義する。このとき ∇ と ∇^* は h に関して互いに双対なアファイン接続となる。さらに ∇h と $\nabla^* h$ は対称なテンソル場となる。

これ以降、本論文では計量 h は対称であり、アファイン接続 ∇ は捩れを持たないと仮定する。上記の命題 2.2 および命題 2.3 に注意して、統計多様体の定義を述べる。

定義 1 (統計多様体 [8]) (M, h) を擬 Riemann 多様体、 ∇ を M 上の捩れのないアファイン接続とする。 ∇h が対称となるときの (M, ∇, h) を**統計多様体**という。

(M, ∇, h) を統計多様体とし、 ∇^* を h に関する ∇ の双対接続とする。このとき $\nabla^* h$ も対称となり、 (M, ∇^*, h) は統計多様体になる。組 (M, ∇^*, h) を (M, ∇, h) の**双対統計多様体**という。

ももとの統計多様体の定義は Lauritzen [10] によって与えられた、Riemann 多様体 (M, g) と $(0,3)$ -対称テンソル場 C の組 (M, g, C) のことである。幾何学以外の分野ではこちらの定義を用いられることも多い。上記の命題により二つの定義は基本的には同じであるが、後述のアファインはめ込みの幾何学を考える場合には区別が必要である。

2.2 双対平坦空間と正準ダイバージェンス

次に、情報幾何学で重要な双対平坦空間の幾何学をまとめる。 (M, h) を擬 Riemann 多様体、 ∇ を M 上の捩れのないアファイン接続とし、 ∇^* を ∇ の h に関する双対接続とする。このとき式 (1) から、 ∇ が平坦であれば ∇^* も平坦となる。そこで (M, h, ∇, ∇^*) を**双対平坦空間**とよぶ。

アファイン接続 ∇ の接続係数を $\{\Gamma_{ij}^k\} (i, j, k = 1, \dots, n)$ とする。アファイン接続 ∇ が平坦であれば、適当な局所座標系 $\{\theta^i\}$ が存在して $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$ となる。このよう

な座標系 $\{\theta^i\}$ を ∇ のアファイン座標系とよぶ. さらに, 双対接続 ∇^* のアファイン座標系 $\{\eta_i\}$ で

$$h\left(\frac{\partial}{\partial\theta^i}, \frac{\partial}{\partial\eta_j}\right) = \delta_i^j$$

となるものが存在する. この局所座標系 $\{\eta_i\}$ を h に関するアファイン座標系 $\{\theta^i\}$ の双対座標系とよぶ.

命題 2.4 (M, h, ∇, ∇^*) を双対平坦空間とし, M は単連結で大域的座標系を持つと仮定する. また $\{\theta^i\}$ を ∇ のアファイン座標系, $\{\eta_i\}$ を h に関する $\{\theta^i\}$ の双対座標系とする. このとき M 上の関数 ψ と ϕ が存在して

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta^i} = \eta_i, \quad \frac{\partial\phi}{\partial\eta_i} = \theta^i, \quad \psi(p) + \phi(p) - \sum_{i=1}^n \theta^i(p)\eta_i(p) = 0, \quad (4)$$

$$h_{ij} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^i\partial\theta^j}, \quad h^{ij} = \frac{\partial^2\phi}{\partial\eta_i\partial\eta_j}, \quad (5)$$

が成り立つ. ただし p は M の任意の点で, (h_{ij}) は擬 Riemann 計量 h の $\{\theta^i\}$ に関する成分行列, (h^{ij}) は $\{\eta_i\}$ に関する成分行列である. さらに

$$C_{ijk} = \frac{\partial^3\psi}{\partial\theta^i\partial\theta^j\partial\theta^k}$$

は統計多様体 (M, ∇, h) の 3 次形式である.

擬 Riemann 計量 h は関数 ψ および ϕ の Hessian として与えられるので, ψ を h の θ -ポテンシャル, ϕ を η -ポテンシャルとよぶ. また 3 つ組 (M, ∇, h) を **Hesse 多様体**とよぶこともある [21].

次に命題 2.4 と同じ仮定の下で, $M \times M$ 上の関数 D を次の式で定義する.

$$D(p, r) := \psi(p) + \phi(r) - \sum_{i=1}^n \theta^i(p)\eta_i(r),$$

ただし p と r は M の任意の点である. 関数 D の定義はアファイン座標系の選び方に依らないことに注意する. この関数 D は多様体 M 上の 2 点 p と r の相違度を測る関数であり, 双対平坦空間 (M, h, ∇, ∇^*) (または Hesse 多様体, 平坦な統計多様体 (M, ∇, h)) の**正準ダイバージェンス**とよぶ. 計量 h が正定値であれば, D は非負な関数であり, $D(p, r) = 0$ となるのは $p = r$ に限られる. また, 双対平坦空間 (M, h, ∇^*, ∇) の正準ダイバージェンスを $D^*(p, r)$ とすると

$$D(p, r) = D^*(r, p)$$

が成り立つ.

ここで正準ダイバージェンス $D(p, r)$ から, もとの双対平坦構造 (h, ∇, ∇^*) が誘導されることを確認しておく. D を $M \times M$ 上の関数としたとき, M 上の関数を次で定義する.

$$D[X_1, \dots, X_i | Y_1, \dots, Y_j](p) := (X_1)_p \dots (X_i)_p (Y_1)_r \dots (Y_j)_r D(p, r)|_{p=r},$$

ただし $X_1, \dots, X_i$ と $Y_1, \dots, Y_j$ は M 上の任意のベクトル場である. $M \times M$ 上の関数 D が**コントラスト関数**であるとは

1. $D[|](p) = D(p, p) = 0,$
 2. $D[X|](p) = D[|X](p) = 0,$
 3. $h(X, Y) := -D[X|Y]$ は M 上の擬 Riemann 計量
- (6)

が成り立つことをいう [5], [12].

コントラスト関数 D に対し, アファイン接続 ∇ と ∇^* を次で定義する.

$$\begin{aligned} h(\nabla_X Y, Z) &= -D[XY|Z], \\ h(Y, \nabla_X^* Z) &= -D[Y|XZ]. \end{aligned}$$

実際に ∇ と ∇^* がアファイン接続であることは, f を M 上の関数としたとき

$$\begin{aligned} h(\nabla_X(fY), Z) &= -D[X(fY)|Z] = -df(X)D[Y|Z] - fD[XY|Z] \\ &= h(df(X)Y + f\nabla_X Y, Z) \end{aligned}$$

が成り立つことなどから証明できる. 式 (6) の両辺を微分するで, 2 つのアファイン接続 ∇ と ∇^* が h に関して互いに双対的であることがわかる. さらに微分の可換性などから ∇ と ∇^* は振れがないことがわかり, ∇h と $\nabla^* h$ は対称な $(0, 3)$ -テンソル場となる. したがって, (M, ∇, h) と (M, ∇^*, h) は統計多様体となる. この (M, ∇, h) をコントラスト関数 D から**誘導された統計多様体**とよぶことにする.

もし (M, ∇, h) が Hesse 多様体であれば, (M, ∇, h) は D から**誘導された Hesse 多様体**とよぶ.

命題 2.5 D を双対平坦空間 (M, h, ∇, ∇^*) の正準ダイバージェンスとする. このとき, D は与えられた双対平坦空間 (M, h, ∇, ∇^*) を誘導する M 上のコントラスト関数である.

(証明) 正準ダイバージェンスの定義と方程式 (4) から $D[|] = 0$ と $D[X|] = D[|X] = 0$ が成り立つ. $\{\theta^i\}$ を ∇ -アファイン座標系, $\{\eta_j\}$ を h に関する $\{\theta^j\}$ の双対座標系とし, $\partial_i = \partial/\partial\theta^i$ とおく. このとき命題 2.4 から

$$\begin{aligned} D[\partial_i|\partial_j](p) &= (\partial_i)_p(\partial_j)_r D(p, q)|_{p=r} = (\partial_j)_r \{\eta_i(p) - \eta_i(r)\}|_{p=r} \\ &= -(\partial_j)_r \eta_i(r)|_{p=r} = -h_{ij}(p) \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって, D は M 上のコントラスト関数である.

このコントラスト関数から誘導されるアファイン接続は

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{ij,k} &= -D[\partial_i \partial_j | \partial_k] = (\partial_i)_p (\partial_k)_r \{ \eta_j(p) - \eta_j(r) \} |_{p=r} \\
 &= -(\partial_i)_p (\partial_k)_r \eta_j(r) |_{p=r} = 0, \\
 \Gamma_{ik,j}^* &= -D[\partial_j | \partial_i \partial_k] = (\partial_i)_r (\partial_k)_r \{ \eta_j(p) - \eta_j(r) \} |_{p=r} \\
 &= -(\partial_i)_r (\partial_k)_r \eta_j(r) |_{p=r} = -(\partial_i)_r (\partial_k)_r (\partial_j)_r \psi(r) |_{p=r} \\
 &= C_{ikj}
 \end{aligned}$$

によって与えられる. ただし C_{ikj} は平坦統計多様体 (M, ∇, h) の3次形式であり, $\Gamma_{ij,k}$ と $\Gamma_{ik,j}^*$ はアファイン接続 ∇ と ∇^* の第1種の共変微分係数である. 命題 2.3 から ∇ と ∇^* は与えられた双対平坦空間 (M, h, ∇, ∇^*) のアファイン接続と一致し, 命題の主張は成り立つ. $\square$

2.3 統計多様体上の一般化した共形構造

この章の最後に, 統計多様体上の一般化した共形構造についてまとめる.

2つの統計多様体 (M, ∇, h) と $(M, \bar{\nabla}, \bar{h})$ が $((\varphi, \lambda)$ に関して) **共形射影同値** であるとは, M 上の関数 φ と λ が存在して, 次が成り立つことをいう.

$$\bar{h}(X, Y) = e^{\varphi + \lambda} h(X, Y), \quad (7)$$

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - h(X, Y) \text{grad}_h \varphi + \{ d\lambda(Y) X + d\lambda(X) Y \}. \quad (8)$$

ここで $\text{grad}_h \varphi$ は h に関する φ の勾配ベクトル場

$$h(\text{grad}_h \varphi, X) := X\varphi$$

である.

共形因子関数が $\varphi = \lambda$ であれば, 関係式 (7) は通常の計量の共形同値関係を表す. 計量 $\bar{h}$ と h の Levi-Civita 接続をそれぞれ $\nabla^{(0)}$ と $\bar{\nabla}^{(0)}$ とすると, これらは式 (8) を満たす. φ が定数関数であれば, 2つのアファイン接続 ∇ と $\bar{\nabla}$ は**射影同値**である. 一方, λ が定数関数であれば, 2つの接続は**双対射影同値**である [6].

定数 $\alpha \in \mathbf{R}$ と M 上の関数 ψ を取り,

$$\varphi = \frac{1 + \alpha}{2} \psi, \quad \lambda = \frac{1 - \alpha}{2} \psi$$

とする. この場合, 2つの統計多様体 (M, ∇, h) と $(M, \bar{\nabla}, \bar{h})$ は α -**共形同値**とよぶ. すなわち, M 上の関数 ψ が存在して

$$\begin{aligned}
 \bar{h}(X, Y) &= e^\psi h(X, Y), \\
 \bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y - \frac{1 + \alpha}{2} h(X, Y) \text{grad}_h \psi + \frac{1 - \alpha}{2} \{ d\psi(Y) X + d\psi(X) Y \}
 \end{aligned}$$

が成り立つ. 2つの統計多様体が (-1) -共形同値であるとき, それらのアファイン接続は射影同値である. 一方, 2つの統計多様体が 1 -共形同値であるとき, それらのアファイン接続は双対射影同値である.

特に双対統計多様体については, 以下が成り立つ.

命題 2.6 2つの統計多様体 (M, ∇, h) と $(M, \bar{\nabla}, \bar{h})$ が α -共形同値ならば、それらの双対統計多様体 (M, ∇^*, h) と $(M, \bar{\nabla}^*, \bar{h})$ は $(-\alpha)$ -共形同値である。

また (M, ∇, h) と $(M, \bar{\nabla}, \bar{h})$ が (φ, λ) に関して共形射影同値ならば、それらの双対統計多様体 (M, ∇^*, h) と $(M, \bar{\nabla}^*, \bar{h})$ は (λ, φ) に関して共形射影同値である。

統計多様体 (M, ∇, h) が **共形射影平坦** (または α -共形平坦) であるとは、局所的に平坦統計多様体と共形射影同値 (または α -共形同値) であることをよぶ [11], [8].

D と $\bar{D}$ を M 上のコントラスト関数とする。 M 上の関数 φ と λ が存在して

$$\bar{D}(p, r) = e^{\varphi(r)+\lambda(p)} D(p, r)$$

が成り立つとき、 D と $\bar{D}$ を **共形射影同値** という。この場合、コントラスト関数 D と $\bar{D}$ からそれぞれ誘導される統計多様体 (M, ∇, h) と $(M, \bar{\nabla}, \bar{h})$ は、共形射影同値である [14]. 特に M 上の関数 ψ が存在して $\varphi = (1 - \alpha)\psi/2$, $\lambda = (1 + \alpha)\psi/2$ となる場合、2つのコントラスト関数 D と $\bar{D}$ を α -共形同値という。

命題 2.7 D と $\bar{D}$ を M 上のコントラスト関数とし、 (M, ∇, h) と $(M, \bar{\nabla}, \bar{h})$ を、それぞれ D と $\bar{D}$ から誘導されたコントラスト関数とする。また φ と λ を M 上の関数とし $\alpha \in \mathbf{R}$ を定数すると、次が成り立つ。

1. $\bar{D}(p, r) = e^{\lambda(p)} D(p, r)$ ならば (M, ∇, h) と $(M, \bar{\nabla}, \bar{h})$ は (-1) -共形同値である。
2. $\bar{D}(p, r) = e^{\varphi(r)} D(p, r)$ ならば (M, ∇, h) と $(M, \bar{\nabla}, \bar{h})$ は 1 -共形同値である。
3. $\bar{D}(p, r) = e^{\frac{1+\alpha}{2}\varphi(r)+\frac{1-\alpha}{2}\varphi(p)} D(p, r)$ ならば (M, ∇, h) と $(M, \bar{\nabla}, \bar{h})$ は α -共形同値である。
4. $\bar{D}(p, q) = e^{\varphi(r)+\lambda(p)} D(p, r)$ ならば (M, ∇, h) と $(M, \bar{\nabla}, \bar{h})$ は共形射影同値である。

コントラスト関数と統計多様体の一般化した共形構造の関連については、[12], [14] などとも参照されたい。

多様体の共形変形やアファイン接続の射影変形に関して、Weyl の共形曲率テンソルや、射影曲率テンソルなどが知られている。統計多様体の共形射影変形を特徴付けるものが、共形射影曲率テンソルである。

統計多様体 (M, ∇, h) に対して、 R を ∇ の曲率テンソル、 Ric を ∇ の Ricci テンソル、 $\text{Ric}^\#$ を Ricci 作用素

$$h(\text{Ric}^\#(X), Y) = \text{Ric}(X, Y)$$

とし、 σ をスカラー曲率 $\sigma = \text{tr}_h \text{Ric}$ とする。また Ric^* および $\text{Ric}^{*\#}$ を、それぞれ双対接続 ∇^* に関する Ricci テンソルと Ricci 作用素とする。このとき (M, ∇, h) の共形射影曲率テンソル W_{CP} を次で定義する。

$$\begin{aligned} W_{CP}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z \\ &\quad - \{h(Y, Z)A(X) - h(X, Z)A(Y) + B(Y, Z)X - B(X, Z)Y\} \\ &\quad - \frac{\sigma}{n(n-1)} \{h(Y, Z) - h(X, Z)Y\}. \end{aligned}$$

ただし A は $(1, 1)$ -テンソル場, B は $(0, 2)$ -テンソル場であり, 次で定義される.

$$A(X) = \frac{1}{n(n-2)} \{ \text{Ric}^\#(X) + (n-1)\text{Ric}^{*\#}(X) - \sigma X \},$$

$$B(X, Y) = \frac{1}{n(n-2)} \{ (n-1)\text{Ric}(X, Y) + \text{Ric}^*(X, Y) - \sigma h(X, Y) \}.$$

統計多様体の共形射影同値性に関して, 次が成り立つ [9].

命題 2.8 M を多様体とし $\dim M \geq 2$ とする. 2つの統計多様体 (M, ∇, h) と $(M, \bar{\nabla}, \bar{h})$ が共形射影同値であれば, それらの共形射影曲率テンソルは一致する.

命題 2.9 M を多様体とし $\dim M \geq 4$ とする. 統計多様体 (M, ∇, h) が共形射影平坦であるための必要十分条件は, M 上で共形射影曲率テンソルが恒等的に消えることである.

3 アファインはめ込み

次にアファイン超曲面の幾何学と統計多様体の幾何学の関連を簡単にまとめる. アファインはめ込みに関する一般的な内容は [18], 本論文に関連する結果については [6], [8], [15]などを参照されたい.

M を n 次元多様体, f を M から $\mathbf{R}^{n+1}$ へのはめ込みとする. また, ξ を f に沿った横断的ベクトル場とする. すなわち, M の各点 p において,

$$T_{f(p)}\mathbf{R}^{n+1} = f_*(T_p M) \oplus \mathbf{R}\{\xi_p\}$$

という分解が成り立つ. この場合, はめ込みと横断的ベクトル場の組 $\{f, \xi\}$ を M から $\mathbf{R}^{n+1}$ へのアファインはめ込みという.

$\tilde{\nabla}$ を $\mathbf{R}^{n+1}$ の標準アファイン接続とし, f に沿った共変微分も同じく $\tilde{\nabla}$ で表すとする. $\mathbf{R}^{n+1}$ の共変微分が接空間の分解に応じて

$$\tilde{\nabla}_X f_* Y = f_*(\nabla_X Y) + h(X, Y)\xi, \quad (9)$$

$$\tilde{\nabla}_X \xi = -f_*(SX) + \tau(X)\xi \quad (10)$$

と表示され, M に ∇, h などの諸量が誘導される. ∇ を誘導接続, h をアファイン基本形式, S をアファイン型作用素, τ を横断的接続形式という.

命題 3.1 $\{f, \xi\}$ と $\{\bar{f}, \bar{\xi}\}$ を M から $\mathbf{R}^{n+1}$ へのアファインはめ込みとし, ∇, h, S, τ と $\bar{\nabla}, \bar{h}, \bar{S}, \bar{\tau}$ をそれぞれ $\{f, \xi\}$ と $\{\bar{f}, \bar{\xi}\}$ から誘導される諸量とする. このとき $\{f, \xi\}$ と $\{\bar{f}, \bar{\xi}\}$ がアファイン的に合同であるための必要十分条件は

$$\nabla = \bar{\nabla}, \quad h = \bar{h}, \quad S = \bar{S}, \quad \tau = \bar{\tau}$$

が成り立つことである.

$\{f, \xi\}$ をアファインはめ込みとし、誘導された体積要素 ω を次で定義する.

$$\omega(X_1, \dots, X_n) = \det(f_*X_1, \dots, f_*X_n, \xi),$$

ただし $\det(*, \dots, *)$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ の標準体積要素である. ω の定義から, これは M 上の n -次微分形式である.

命題 3.2 $\{f, \xi\}$ を M から $\mathbf{R}^{n+1}$ へのアファインはめ込みとし, ∇ を誘導接続, τ を横断的接続形式, ω を誘導された体積要素とする. このとき, 次の式が成り立つ.

$$(\nabla_X \omega)(X_1, \dots, X_n) = \tau(X)\omega(X_1, \dots, X_n).$$

アファインはめ込み $\{f, \xi\}$ から誘導される幾何学的諸量の横断的ベクトル場 ξ への依存性は, 次で与えられる.

命題 3.3 $\{f, \xi\}$ を M から $\mathbf{R}^{n+1}$ へのアファインはめ込みとする. M 上の任意の関数 λ と任意のベクトル場 Z に対して, 横断的ベクトル場を

$$\bar{\xi} = e^{-\lambda}\{\xi + f_*(Z)\}$$

と取り換える. このとき誘導される諸量には次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\bar{h}(X, Y) &= e^\lambda h(X, Y), \\ \bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y - h(X, Y)Z, \\ \bar{\tau}(X) &= \tau(X) + h(X, Y) - d\lambda(X), \\ \bar{S}X &= e^{-\lambda}\{SX - \nabla_X Z + \bar{\tau}(X)Z + d\lambda(X)Z\}.\end{aligned}$$

したがって, アファイン基本形式 h が非退化であるという性質は, ξ の取り方に依らない. そこで, h が非退化のとき f を非退化という. また $\tau = 0$ のとき, $\{f, \xi\}$ を等積とよぶことにする.

アファインはめ込みの基本方程式は次のようになる.

$$\begin{aligned}\text{Gauss 方程式: } & R(X, Y)Z = h(Y, Z)SX - h(X, Z)SY, \\ \text{Codazzi 方程式: } & (\nabla_X h)(Y, Z) + \tau(X)h(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z) + \tau(Y)h(X, Z), \\ & (\nabla_X S)(Y) - \tau(X)SY = (\nabla_Y S)(X) - \tau(Y)SX, \\ \text{Ricci 方程式: } & h(X, SY) - h(Y, SX) = (\nabla_X \tau)(Y) - (\nabla_Y \tau)(X) \\ & = d\tau(X, Y).\end{aligned}$$

Codazzi 方程式と命題 3.3 から, 次が成り立つ.

命題 3.4 アファインはめ込み $\{f, \xi\}$ が非退化, 等積であれば, (M, ∇, h) は統計多様体であり, 特に 1-共形平坦である.

逆に統計多様体 (M, ∇, h) が単連結で双対接続 ∇^* が射影的に平坦であるとき (すなわち, 統計多様体 (M, ∇, h) が 1-共形平坦であるとき), 与えられた統計多様体 (M, ∇, h) を誘導するようなアファインはめ込み $\{f, \xi\}$ が構成できる [4], [6], [8].

次に, アファインはめ込みと双対接続の関係についてまとめる.

$\{f, \xi\}$ を M から $\mathbf{R}^{n+1}$ へのアファインはめ込みとし, $\mathbf{R}_{n+1}$ を $\mathbf{R}^{n+1}$ の双対空間とする. ここで $\{f, \xi\}$ の余法線写像 $v: M \rightarrow \mathbf{R}_{n+1}$ を, M の各点 p に対し

$$\langle v(p), \xi_p \rangle = 1, \quad \langle v(p), f_* X_p \rangle = 0 \quad (11)$$

で定義する. この式の両辺を微分すると, 余法線写像の定義 (11), Gauss 方程式 (9), および Weingarten 方程式 (10) から

$$\langle v_* X_p, \xi_p \rangle = -\tau(X), \quad \langle v_* X_p, f_* Y_p \rangle = -h(X, Y) \quad (12)$$

となる. したがって h が非退化であれば v は M から $\mathbf{R}_{n+1}$ へのはめ込みであり, v は v 自身に横断的である. よって, $\{v, -v\}$ は M から $\mathbf{R}_{n+1}$ へのアファインはめ込み (特に中心アファインはめ込み) である.

$$\tilde{\nabla}_X v_* Y = v_*(\hat{\nabla}_X^* Y) - h^*(X, Y)v$$

によって $\{v, -v\}$ に関する誘導接続を定義すると, 次が成り立つ

$$Xh(Y, Z) = h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \hat{\nabla}_X^* Z) + \tau(Y)h(X, Z).$$

したがって, アファインはめ込み $\{f, \xi\}$ が非退化, 等積であれば余法線写像から h に関する ∇ の双対接続が誘導される. しかしながらアファイン基本形式は $h^*(X, Y) = h(SX, Y)$ で与えられるので, アファイン型作用素 S が $S = id$ でなければ, 双対統計多様体は誘導されない.

次に幾何学的ダイバージェンスを定義し, その性質を考える.

$\{f, \xi\}$ を非退化等積アファインはめ込み, v を $\{f, \xi\}$ の余法線写像とする. $M \times M$ 上の関数 D^G を

$$D^G(p, r) = \langle v(r), f(p) - f(r) \rangle$$

によって定義し, D^G を M の幾何学的ダイバージェンスとよぶ [8].

命題 3.5 幾何学的ダイバージェンス D^G は M 上のコントラスト関数である. さらにアファインはめ込み $\{f, \xi\}$ が誘導する統計多様体と幾何学的ダイバージェンス D^G が誘導する統計多様体は一致する.

(証明) $D^G(p, r)$ を M の幾何学的ダイバージェンスとすると, アファインはめ込み $\{f, \xi\}$ が非退化かつ等積であることから, 式 (12) を用いて

$$\begin{aligned} D^G(p, p) &= \langle v(p), f(p) - f(p) \rangle = 0, \\ X_p D^G(p, r)|_{p=r} &= \langle v(r), f_* X_p \rangle|_{p=r} = 0, \\ Y_r D^G(p, r)|_{p=r} &= \langle v_* Y_r, f(p) - f(r) \rangle|_{p=r} - \langle v(r), f_* X_p \rangle|_{p=r} = 0, \\ X_p Y_r D^G(p, r)|_{p=r} &= \langle v_* Y_r, f_* X_p \rangle|_{p=r} = -h_p(Y, X) \end{aligned}$$

である。よって D^G は M 上のコントラスト関数であり、誘導される計量はアファイン基本形式に一致する。さらに

$$\begin{aligned} X_p Y_p Z_r D^G(p, r)|_{p=r} &= \langle v_* Z_r, f_*(\nabla_X Y)_p + h_p(X, Y)\xi_p \rangle|_{p=r} \\ &= -h_p(Z, \nabla_X Y) \end{aligned}$$

が成り立つ。よって D^G の誘導するアファイン接続は、アファインはめ込み $\{f, \xi\}$ の誘導接続である。したがってアファインはめ込み $\{f, \xi\}$ の誘導する統計多様体と、コントラスト関数 D^G の誘導する統計多様体は一致する。□

統計多様体 (M, ∇, h) が 1-共形平坦であれば、それを誘導するようなアファインはめ込み $\{f, \xi\}$ が構成できた。この場合、幾何学的ダイバージェンス D^G はもとの統計多様体 (M, ∇, h) を誘導する。したがって、次が成り立つ。

定理 3.6 多様体 M を単連結で、 $\dim M \geq 2$ とする。このとき統計多様体 (M, ∇, h) が 1-共形平坦であれば、幾何学的ダイバージェンス D^G が一意的に存在し、統計多様体のアファイン空間への実現に依らない。

コントラスト関数 D^G を、特にダイバージェンスとよぶのは上記の理由による。幾何学的ダイバージェンスの詳細は [8], [11], [12] などを参照されたい。

さらに、統計多様体が平坦な場合には、幾何学的ダイバージェンスは正準ダイバージェンスに一致することを確認しておく。

命題 3.7 (M, ∇, h) を単連結な平坦統計多様体とし、 $\dim M \geq 2$ とする。このとき (M, ∇, h) の正準ダイバージェンスと幾何学的ダイバージェンスは一致する。

(証明) $\{\theta^i\}$ を ∇ -アファイン座標系とし、 $\{\eta_i\}$ を h に関する $\{\theta^i\}$ の双対座標系とする。 ψ を θ -ポテンシャル、 ϕ を η -ポテンシャルとすると、 (M, ∇, h) の正準ダイバージェンス $D(p, r)$ は次で与えられる。

$$D(p, r) = \psi(p) + \phi(r) - \sum_{i=1}^n \theta^i(p) \eta_i(r), \quad (p, q \in M).$$

一方、平坦な統計多様体 (M, ∇, h) は、次のグラフはめ込み $\{f, \xi\}$ によってアファイン空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ に実現される。

$$f: \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \vdots \\ \theta^n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \vdots \\ \theta^n \\ \psi \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

実際 $D_{\frac{\partial}{\partial \theta^i}} f_* \left(\frac{\partial}{\partial \theta^j} \right) = \left(0, \dots, 0, \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^i \partial \theta^j} \right)^T$ であり、Gauss の方程式 (9) は次で与えられる。

$$D_{\frac{\partial}{\partial \theta^i}} f_* \left(\frac{\partial}{\partial \theta^j} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^i \partial \theta^j} \xi.$$

ψ が θ -ポテンシャルであることから, 方程式 (5) よりアファイン基本形式はもとの統計多様体の計量 h に一致する. また, 誘導接続の接続係数を $\{\Gamma_{ij}^k\}$ とすると, $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$ ($i, j, k = 1, \dots, n$) も成り立ち, $\{\theta^i\}$ はもとのアファイン接続 ∇ のアファイン座標系である.

余法線写像 v は, 定義式 (11) と Legendre 変換 (4) から次で与えられる.

$$v(r) = (-\eta_1(r), \dots, -\eta_n(r), 1).$$

再び Legendre 変換 (4) を用いることで幾何学的ダイバージェンス D^G は

$$\begin{aligned} D^G(p, r) &= \langle v(r), f(p) - f(r) \rangle \\ &= \psi(p) + \sum_{i=1}^n v_i(r) \theta^i(p) - \psi(r) - \sum_{i=1}^n v_i(r) \theta^i(r) \\ &= \psi(p) + \phi(r) + \sum_{i=1}^n v_i(r) \theta^i(p) \\ &= \psi(p) + \phi(r) - \sum_{i=1}^n \eta_i(r) \theta^i(p) \\ &= D(p, r) \end{aligned}$$

となる. したがって, (M, ∇, h) が平坦な統計多様体の場合, 幾何学的ダイバージェンスと正準ダイバージェンスは一致する. $\square$

4 余次元 2 の中心アファインはめ込み

M を n -次元多様体 ($n \geq 3$), f を M から $\mathbf{R}^{n+2}$ へのはめ込み, ξ を f に沿ったベクトル場とする. . また, はめ込み f を $\mathbf{R}^{n+2}$ の位置ベクトルと同一視する.

組 $\{f, \xi\}$ が M から $\mathbf{R}^{n+2}$ への余次元 2 の中心アファインはめ込み [17] であるとは, M の各点 p に対して, 接空間 $T_{f(p)}\mathbf{R}^{n+2}$ に以下の分解が成り立つことをいう.

$$T_{f(p)}\mathbf{R}^{n+2} = f_*(T_p M) \oplus \mathbf{R}\{\xi_p\} \oplus \mathbf{R}\{f(p)\}.$$

ベクトル場 ξ を 横断的ベクトル場 という.

$\tilde{\nabla}$ を $\mathbf{R}^{n+2}$ の標準アファイン接続とし, f に沿った共変微分も同じく $\tilde{\nabla}$ で表すとする. 次の式で, 幾何学的諸量が M に誘導される.

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X f_* Y &= f_* \nabla_X Y + h(X, Y) \xi + k(X, Y) f, \\ \tilde{\nabla}_X \xi &= -f_* S X + \tau(X) \xi + \mu(X) f. \end{aligned}$$

∇ を誘導接続, h をアファイン基本形式, S をアファイン型作用素, τ を横断的接続形式という.

$\{f, \xi\}$ を余次元 2 の中心アファインはめ込みとすると、誘導された体積要素 ω を次で定義する.

$$\omega(X_1, \dots, X_n) = \widetilde{\det}(f_*X_1, \dots, f_*X_n, \xi, f).$$

ただし $\widetilde{\det}(*, \dots, *)$ は $\mathbf{R}^{n+2}$ の標準体積要素である. アファインはめ込みの場合と同様に

$$(\nabla_X \omega)(X_1, \dots, X_n) = \tau(X)\omega(X_1, \dots, X_n)$$

という関係式が成り立つ.

余次元 2 の中心アファインアファインはめ込みから誘導される幾何学的諸量の横断的ベクトル場への依存性は次で与えられる.

命題 4.1 $\{f, \xi\}$ を M から $\mathbf{R}^{n+1}$ へのアファインはめ込みとする. M 上の任意の関数 λ および a と任意のベクトル場 Z に対して, 横断的ベクトル場を

$$\bar{\xi} = e^{-\lambda}\{\xi + af + f_*(Z)\}$$

と取り換える. このとき誘導される諸量には次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\bar{h}(X, Y) &= e^\lambda h(X, Y), \\ \bar{k}(X, Y) &= k(X, Y) - ah(X, Y), \\ \bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y - h(X, Y)Z, \\ \bar{\tau}(X) &= \tau(X) + h(X, Y) - d\lambda(X), \\ \bar{\mu}(X) &= e^{-\lambda}\{\mu(X) + da(X) + k(X, Z) - ah(X, Z) - a\tau(X)\}, \\ \bar{S}X &= e^{-\lambda}\{SX - \nabla_X Z + \bar{\tau}(X)Z + d\lambda(X)Z - aX\}.\end{aligned}$$

命題 4.1 から, アファイン基本形式 h が非退化という性質は, ξ の取り方に依らない. したがってアファイン超曲面論の場合と同様に h が非退化のとき f を非退化という. また $\tau = 0$ のとき $\{f, \xi\}$ を等積とよぶことにする.

はめ込み f の射影変形については, 誘導される幾何学量は次の変形を受ける.

命題 4.2 $\{f, \xi\}$ を M から $\mathbf{R}^{n+1}$ へのアファインはめ込みとする. M 上の任意の関数 φ に対して, $\bar{f} = e^\varphi f$ と取り換え, $\{\bar{f}, \xi\}$ を考える. このとき誘導される諸量には次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\bar{h}(X, Y) &= e^\varphi h(X, Y), \\ \bar{k}(X, Y) &= (\nabla_X d\varphi)(Y) - d\varphi(X)d\varphi(Y) + k(X, Y), \\ \bar{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + d\varphi(Y)X + d\varphi(X)Y, \\ \bar{\tau}(X) &= \tau(X), \\ \bar{\mu}(X) &= e^{-\varphi}\{\mu(X) + d\varphi(SX)\}, \\ \bar{S} &= e^{-\varphi}S.\end{aligned}$$

余次元 2 の中心アファインはめ込みの基本方程式は次のようになる。

Gauss 方程式:

$$R(X, Y)Z = h(Y, Z)SX - h(X, Z)SY - k(Y, Z)X + k(X, Z)Y,$$

Codazzi 方程式:

$$(\nabla_X k)(Y, Z) + \mu(X)h(Y, Z) = (\nabla_Y k)(X, Z) + \mu(Y)h(X, Z),$$

$$(\nabla_X h)(Y, Z) + \tau(X)h(Y, Z) = (\nabla_Y h)(X, Z) + \tau(Y)h(X, Z),$$

$$(\nabla_X S)(Y) - \tau(X)SY + \mu(X)Y = (\nabla_Y S)(X) - \tau(Y)SX + \mu(Y)X,$$

Ricci 方程式:

$$k(X, SY) - k(Y, SX) = (\nabla_X \mu)(Y) - (\nabla_Y \mu)(X) + \tau(Y)\mu(X) - \tau(X)\mu(Y),$$

$$h(X, SY) - h(Y, SX) = (\nabla_X \tau)(Y) - (\nabla_Y \tau)(X).$$

アファイン基本形式 h に関する Codazzi 方程式と命題 4.1, 命題 4.2 から, 次が成り立つ。

命題 4.3 余次元 2 の中心アファインはめ込み $\{f, \xi\}$ が非退化, かつ等積であれば, (M, ∇, h) は統計多様体であり, 特に共形射影平坦である。

逆に統計多様体 (M, ∇, h) が単連結で共形射影平坦であるとき, 与えられた統計多様体 (M, ∇, h) を誘導するような, 余次元 2 の中心アファインはめ込み $\{f, \xi\}$ が構成できる [9], [11].

次に, 余次元 2 の中心アファインはめ込みの双対写像についてまとめる。

$\{f, \xi\}$ を M から $\mathbf{R}^{n+2}$ への余次元 2 の中心アファインはめ込みとする。 $\mathbf{R}_{n+2}$ を $\mathbf{R}^{n+2}$ の双対空間とし, 必要に応じてベクトル空間 $\mathbf{R}^{n+2}$ と同一視する。このとき $\{f, \xi\}$ の双対写像 $\{v, w\}: M \rightarrow \mathbf{R}_{n+2}$ を M の各点 p で

$$\begin{aligned} \langle v(p), \xi_p \rangle &= 1, & \langle w(p), \xi_p \rangle &= 0, \\ \langle v(p), f(p) \rangle &= 0, & \langle w(p), f(p) \rangle &= 1, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\langle v(p), f_* X_p \rangle = 0, \quad \langle w(p), f_* X_p \rangle = 0 \quad (14)$$

と定義する。(14) を微分すると $\langle v_* X, f_* Y \rangle = -h(X, Y)$ となり, f が非退化であれば v は M から $\mathbf{R}_{n+2}$ へのはめ込みである。また, v は v 自身に横断的であることも示すことができ, $\{v, w\}$ を M から $\mathbf{R}_{n+2}$ への余次元 2 の中心アファインはめ込みとなる。そこで $\{v, w\}$ を $\{f, \xi\}$ の双対写像とよぶことにする。

双対写像 $\{v, w\}$ から誘導される諸量を ∇^*, h^*, τ^* などと表すことにすると, 次が成り立つ。

命題 4.4 $\{f, \xi\}$ を非退化な余次元 2 の中心アファインはめ込みとし, その双対写像を $\{v, w\}$ とする。 $\{v, w\}$ から誘導される諸量を ∇^*, h^*, τ^* と表すと, 次が成り立つ。

$$h^*(X, Y) = h(X, Y),$$

$$Xh(Y, Z) = h(\nabla_X Y, Z) + h(Y, \nabla_X Z) + \tau(Y)h(X, Z),$$

$$\tau^* = 0.$$

したがって, $\{f, \xi\}$ が非退化かつ等積で統計多様体 (M, ∇, h) を誘導するとすると, 双対写像 $\{v, w\}$ は双対統計多様体 (M, ∇^*, h) を誘導する.

最後に, 幾何学的ダイバージェンスを定義する.

$\{f, \xi\}$ を余次元 2 の中心アファインはめ込みで, 非退化かつ等積, $\{v, w\}$ を $\{f, \xi\}$ の双対写像とする. $M \times M$ 上の関数 D^G を

$$D^G(p, q) = \langle v(q), f(p) \rangle$$

によって定義し, D^G を M の幾何学的ダイバージェンスとよぶ. 余次元 1 の場合と同様に, 幾何学的ダイバージェンスは $M \times M$ 上のコントラスト関数であり, D^G から M 上に統計構造 (∇, h) が誘導される [11]. さらに (M, ∇, h) が単連結な共形射影平坦統計多様体の場合には, 幾何学的ダイバージェンスは (M, ∇, h) の $\mathbf{R}^{n+2}$ の実現に依らず一意的に定まる.

最後に, 双対写像を与える変換が Legendre 変換の一般化であり, 平坦な統計多様体の場合には, 余次元 2 の中心アファインはめ込みから定まる幾何学的ダイバージェンスは正準ダイバージェンスに一致することを確認しておく.

(M, ∇, h) を平坦な統計多様体とする. このとき (M, h, ∇) は次のグラフはめ込みによって $\mathbf{R}^{n+2}$ に実現される.

$$f: \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \vdots \\ \theta^n \\ \psi \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \vdots \\ \theta^n \\ \psi \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

多様体 M の像 $f(M)$ は $\mathbf{R}^{n+2}$ の原点を通らない超平面上にあり, f は $f(M)$ に横断的である. したがって, $\{f, \xi\}$ は余次元 2 の中心アファインはめ込みである. 余次元 1 のアファインはめ込みの場合と同様の計算で, このグラフはめ込み $\{f, \xi\}$ からもとの統計多様体 (M, h, ∇) が誘導されることが確認できる.

$\{f, \xi\}$ の双対写像 $\{v, w\}$ は

$$\begin{aligned} v(q) &= (-\eta_1(q), \dots, -\eta_n(q), 1, \phi(q)), \\ w &= (0, \dots, 0, 0, 1) \end{aligned}$$

によって与えられる. はめ込み f と v をそれぞれ微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \theta^i} &= \left(0, \dots, 1, \dots, 0, \frac{\partial \psi}{\partial \theta^i}, 0 \right)^T, \\ \frac{\partial v}{\partial \eta_i} &= \left(0, \dots, 1, \dots, 0, 0, \frac{\partial \phi}{\partial \eta_i} \right) \end{aligned}$$

となる. (13) の左側にある式を微分すると, (14) 式も利用して

$$\langle v_* X_p, f(p) \rangle = 0 \tag{15}$$

が得られる. (14) の左側にある式と (15) 式を局所座標系を用いて表示すると

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta^i} = \eta_i, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \eta_i} = \theta^i$$

となる. さらに $f(p)$ と $v(p)$ を (13) 式に代入すると, 次が得られる.

$$-\sum_{i=1}^n \eta_i(p) \theta^i(p) + \psi(p) + \phi(p) = 0.$$

これらのことから, (M, ∇, h) が平坦な統計多様体の場合には, 双対写像の定義式は Legendre 変換に一致する. したがって, 余次元 2 の中心アファインはめ込みと双対写像の間に成り立つ変換は, Legendre 変換の一般化である.

以上のように, 余次元 2 の中心アファインはめ込みは, 双対写像によって双対統計多様体の実現でき, 双対写像を定める変換が Legendre 変換の一般化になっている. 情報幾何学におけるアファイン接続や統計多様体の双対性を議論することに関しては, 通常の余次元 1 のアファインはめ込みの理論よりも有用である.

参考文献

- [1] S. Amari and H. Nagaoka, *Method of information geometry*, Amer. Math. Soc., Providence, Oxford University Press, Oxford, 2000.
- [2] S. Amari, A. Ohara and H. Matsuzoe, *Geometry of deformed exponential families: invariant, dually-flat and conformal geometry*, Physica A., **391**(2012), 4308–4319
- [3] O. Calin, H. Matsuzoe and J. Zhang, *Generalizations of conjugate connections*, Trends in Differential Geometry, Complex Analysis and Mathematical Physics, World Sci. Publ., (2009), 24–34.
- [4] F. Dillen, K. Nomizu and L. Vrancken, *Conjugate connections and Radon's theorem in affine differential geometry*, Monatsh. Math., **109**(1990), 221–235.
- [5] S. Eguchi, *Geometry of minimum contrast*, Hiroshima Math. J., **22**(1992), 631–647.
- [6] S. Ivanov, *On dual-projectively flat affine connections*, J. Geom., **53**(1995), 89–99.
- [7] M. Kumon, A. Takemura, and K. Takeuchi, *Conformal Geometry of Statistical Manifold with Application to Sequential Estimation*, Sequential Anal., **30**(2011), 308–337.
- [8] T. Kurose, *On the divergences of 1-conformally flat statistical manifolds*, Tôhoku Math. J., **46**(1994), 427–433.
- [9] T. Kurose, *Conformal-projective geometry of statistical manifolds*, Interdiscip. Inform. Sci., **8**(2002), 89–100.

- [10] S. L. Lauritzen, *Statistical manifolds*, Differential Geometry in Statistical Inferences, IMS Lecture Notes Monograph Series 10, Institute of Mathematical Statistics, Hayward California, (1987), 96–163.
- [11] H. Matsuzoe, *On realization of conformally-projectively flat statistical manifolds and the divergences*, Hokkaido Math. J., **27**(1998), 409–421.
- [12] H. Matsuzoe, *Geometry of contrast functions and conformal geometry*, Hiroshima Math. J., **29**(1999), 175 – 191.
- [13] H. Matsuzoe, *Geometry of semi-Weyl manifolds and Weyl manifolds*, Kyushu J. Math., **55**(2001), 107–117.
- [14] H. Matsuzoe, *Computational Geometry from the Viewpoint of Affine Differential Geometry*, Lecture Notes in Comp. Sci., **5416**(2009), 103–123.
- [15] H. Matsuzoe, *Statistical manifolds and affine differential geometry* Adv. Stud. Pure Math., **57**(2010), 303–321.
- [16] K. Nomizu, *Affine connections and their use*, Geometry and Topology of Submanifolds VII, ed. F. Dillen, World Scientific, (1995), 197–203.
- [17] K. Nomizu and T. Sasaki, *Centroaffine immersions of codimension two and projective hypersurface theory*, Nagoya Math. J., **132**(1993), 63-90.
- [18] K. Nomizu and T. Sasaki, *Affine differential geometry – Geometry of Affine Immersions –*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [19] I. Okamoto, S. Amari and K. Takeuchi, *Asymptotic theory of sequential estimation: differential geometrical approach*, Ann. Statist., **19**(1991), 961–981.
- [20] A. Ohara, *Geometric study for the Legendre duality of generalized entropies and its application to the porous medium equation*, Euro. Phys. J. B., **70**(2009), 15–28.
- [21] H. Shima, *The Geometry of Hessian Structures*, World Scientific, 2007.