

トーラスの類数について

Johns Hopkins 大 小野 孝 (Takashi Ono)

有理数体 $\mathbb{Q}$ で定義された代数群 $G \subset GL_n$ があればその類数 h_G と double cosets の空間

$$G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}) / G(\mathbb{A})_\infty$$

の点の数として定義する二とが出来る. Borel と Harish-Chandra の仕事によりこの数は有限である. ここで $G(\mathbb{Q})$ は G の $\mathbb{Q}$ -有理点の作る部分群, $G(\mathbb{A})$ は G のアデール群として $G(\mathbb{A})_\infty = G(\mathbb{R}) \times \prod_{p \neq \infty} G(\mathbb{Z}_p)$, $\mathbb{R}$ = 実数体, $\mathbb{Z}_p$ = p 進整数環である.

さて, n 次の代数体 K が与えられたとき, 整数環 $\mathcal{O}_K$ の底 $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ を用いて正則表現

$$(x\omega_1, \dots, x\omega_n) = (\omega_1, \dots, \omega_n)P(x), \quad x \in K,$$

をとると $P(x) \in M_n(\mathbb{Q})$ で, P から自然に得られる $\mathbb{Q}$ で定義されたトーラスを $T \subset GL_n$ とすると P により $T(\mathbb{Q}), T(\mathbb{Z})$ は乗法群 $K^\times$, 単数群 $\mathcal{O}_K^\times$ と同

一視される. h_K は K の通常の意味での類数とすると
 $h_T = h_K$ が確かめられる. このトーラス T は Weil
 の functor を用いれば $T = R_{K/Q}(G_m)$ と書かれる.
 ただし $G_m = GL_1 = \Omega^\times$, 万有体 Ω の乗法群.

このように代数群 G があれば類数 h_G があるとゆ
 う見方をすれば任意の相対代数体 K/k に対して一種の
 Euler 数 $E(K/k)$ を定義することが出来る. すなわち,
 k の上のトーラスの完全系列

$$1 \rightarrow T_0' \rightarrow T_0 \xrightarrow{N} T_0'' \rightarrow 1,$$

ここで $T_0 = R_{K/k}(G_m)$, $T_0'' = G_m$, $N = K/k$ に関する
 ノルム, $T_0' = \text{Ker } N$, を考える. これらすべてに
 $R_{K/Q}$ をほどきして Q 上のトーラスの完全系列

$$1 \rightarrow T' \rightarrow T \rightarrow T'' \rightarrow 1$$

を得る. ここで $T = R_{K/Q}(G_m)$, $T'' = R_{k/Q}(G_m)$,
 $T' = R_{K/Q}(T_0')$ だから $h_T = h_K$, $h_{T''} = h_k$ で

$$(1) \quad \frac{h_T}{h_{T'} h_{T''}} = \frac{h_K}{h_{T'} h_k} = E(K/k)$$

は K/k のみに依存する正の有理数になる. $E(K/Q)$
 を単に $E(K)$ と書く. とくに $n=2$, すなわち K/Q
 が 2 次体の場合は

$$(2) \quad E(K) = 2^{t_K - e_K}$$

2

が成立つ. ここに

$$e_K = \begin{cases} 1, & K \text{ が虚か } K \text{ が実で } \exists \varepsilon \in \mathcal{O}_K^\times, N\varepsilon = -1, \\ 2, & K \text{ が実で } N\varepsilon = 1, \forall \varepsilon \in \mathcal{O}_K^\times, \end{cases}$$

$t_K = K$ の判別式の相異なる素因子の数.

(2) はいわゆる二元二次形式の Gauss の種の理論の主定理に他ならない.

(1) の第一項は任意のトーラスの完全系列に対して意味を持つその決定は h_T に関する公式 (通常の h_K に対する Dedekind の類数公式の拡張) およびトーラスの isogeny $\lambda: T \rightarrow T^*$ に関する整数論によってなされる.

とくに代数体の場合にもどり, K/k を巡回 Kummer 拡大とすると

$$(3) \quad E(K/k) = \frac{\prod_p e_p(K/k)}{\# H^1(G(K/k), \mathcal{O}_K^\times)}$$

が証明される. ここに $e_p(K/k)$ は k の素イデアル $\mathfrak{p}$ の K/k に関する分岐指数. とくに K/k が素数 l 次の場合 (3) は

$$(4) \quad E(K/k) = l^{t(K/k) - e(K/k)}$$

となる。ここに

$t(K/k) = K/k$ で分岐する k の素イデアルの数,
 $e(K/k)$ は $H^1(G(K/k), \mathcal{O}_K^\times) = (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^{e(K/k)}$ で定ま
 る整数. (2) は (4) で $l=2$, $k=\mathbb{Q}$ とし得られる.

(証明の詳細に関しては立教大学より出る講義
 録 参照)