

Complete intersection の Generic Torelli について.

学術振興会 寺松 友秀

§ 0 Introduction.

1. Generic Torelli Theorem.

まず, Generic Torelli Theorem とは, どのようなものか
かを述べたい。もともと Torelli の定理は, 曲線について
知られているものであつたが, その心は, "果して, 周期によ
つて, もとの代数多様体が復元できるのか" という様なもの
である。一応 Griffiths により, formalism だけでは,
存在するといつてもよいが必ずしも成り立つわけでもない (
Griffiths 流では) ので, あらたに formalism が必要とされて
いるのかも知れない。それは, 田井, 斎藤, 清水, 今野氏ら
の今後の研究が大変期待できる。

P^n 内の Complete intersection に限しては, 中間次元以外の
cohomology は, 周期としてみればもとの P^n に由来するま
たないものであるから, Torelli の定理を考える上で,
中間次元の cohomology のみを考えるという方向が自然で

あると思ひます。

今、 $d \geq 2$ とし、 $m \geq 1$ 以上とし、 $n \geq m+1$ より大きい自然数として、固定した時、 $\mathbb{P}^n$ 内の $(d, \dots, d)$ -
 $\underbrace{(m+1)}_{\text{個}} \mathbb{H}$
 complete intersection の moduli 空間 $\mathcal{M}$ を、

$$\mathcal{M} = \{ X \subset \mathbb{P}^n \mid X \text{ は } (d, \dots, d) \text{ complete } \underbrace{(m+1)}_{\text{個}} \mathbb{H} \text{ intersection} \} / (\text{projective equivalence})$$

で定義した時、周期写像を、以下定義する。 $p \in \mathcal{M}$ に対する complete intersection X_p として、 X_p の $(n-m-1)$ 次元 primitive cohomology $H_{\text{prim}}^{(n-m-1)}(X_p, \mathbb{Z})$ には、自然に polarized Hodge structure の構造がはいるので、これは、Hodge 構造の分類空間 D/Γ 上の点を決める。これにより、定義する写像 $\mathcal{M} \rightarrow D/\Gamma$ が周期写像である。Generic Torelli は、この写像が generic に injective である、ということの問題にするものである。

2. Main Theorem の Statement

Theorem. m, n, d を自然数とする。 $d \geq 2$ とする。

次の条件 (i) (ii) が成り立つ時、generic Torelli Theorem が成立する。

(i) $n > m+1$

(ii) $d \leq 2 \{ (m+1)d - (n+1) \} \leq \min \{ (d-1)m + (d-2), md \}$

(注) 実用上の定理は, Variational Torelliを示すというテクニックを使うのが。 (2.2.2) 完全交又 (ex. degree = 8 の $K3$ 曲線) については, Variational Torelli は成立しない。もちろん, $\mathbb{P}^5$ 内の (2.2.2) complete intersection は $K3$ 曲線であり, Torelli は成立する。)

3. Hyper surface の時の結果 (Donagi の方法)

$m=0$ にあたる時のことを代わりに超曲面の場合は, Donagi により, いくつかの例外を除いて, Generic Torelli が成立することが知られている。これを示すのは, いわゆる Variational Torelli を使うことである。大まか3つのステップに分けてみると, 次の様になる。1つめのステップは, 超曲面の Infinitesimal Variation of Hodge Structure (以下 IVHS と略記する。) を, 超曲面 X の方程式 F (ie $X = \{F=0\}$) のことばで書き表わす。すなわち, F の Jacobian ring が, わかれば, これを使って, IVHS が記述できることを考察する。第2ステップは, X の IVHS と, X' の IVHS が同型ならば, 超曲面 X の方程式 F の Jacobian ring と, X' の方程式 F' の Jacobian ring は同型になることを, 証明する。2つめの時, Symmetrizer Lemma は, 役に立つ。 F の Jacobian ring と, F' の Jacobian ring の同型性は, F と F' の projective equivalence を imply する。そして最後のステップは,

Variational Torelli, すなわち. IVHS の情報が. もとの多様体を復元するのに十分であることがわかれば. それから. Torelli の定理が従うことをみるのである.

4. Complete intersection の場合の方針

超曲面の場合. 1つの方程式が. 最終的に projective equivalent であるかどうかをみればよいわけだが. Complete intersection の時. 方程式が2個以上あるので. 少し工夫をしないとほならない. 以下. この報告で. やることを. 簡単に述べる.

- a) Complete intersection の IVHS がある algebraic correspondence を通いて. $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ 内の hyper surface の IVHS と同型であることを見る. (μ -ring)
- b) Special な場合に帰着できることをみる.
- c) ν -ring という ring を考え. それに関する duality
- d) Fermat hyper surface の special to complete intersection の時の計算.

§ 1. Complete intersection of I.V.H.S. is as follows.

$d \in \mathbb{Z}$ with $d \geq 2$ a natural number. $n \in \mathbb{Z}$ with $n \geq m+2$ a natural number.

$X \subset \mathbb{P}^n$ is a $(d, \dots, d)$ complete intersection, that is,

$(m+1)$ d -times hyperplane $\mathbb{P}^1$ complete intersection of X is transversal. $\pm 1 = X$ is

smooth and so on. $F_0, \dots, F_m \in \text{degree } d \text{ of } X$ is the defining equation. That is, $X = \{F_0 = \dots = F_m = 0\}$ in $\mathbb{P}^n$ is represented. In this case, X is a subvariety of $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ is the hyperplane.

$X = \{(\mu, x) \in \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \mid \mu_0 F_0(x) + \dots + \mu_m F_m(x) = 0\}$ is defined. That is, $\text{pr}_1^* \mathcal{O}(1) \otimes \text{pr}_2^* \mathcal{O}(d)$ is a section $\mu_0 F_0(x) + \dots + \mu_m F_m(x)$ is the zero point.

Proposition 1 $\mathbb{P}^m \times X \hookrightarrow X$ induce the map

$$j^*: H^{n+m-1}(X, \mathbb{Q}) \longrightarrow H^{n-m-1}(X, \mathbb{Q}) \otimes H^{2m}(\mathbb{P}^m, \mathbb{Q})$$

is. Proof:

$$H_{\text{prim}}^{n+m-1}(X, \mathbb{Q}) \cong H_{\text{prim}}^{n-m-1}(X, \mathbb{Q}) \otimes H^{2m}(\mathbb{P}^m, \mathbb{Q})$$

is true. $\square$.

$$H_{\text{prim}}^{n+m-1}(X, \mathbb{Q}) := \text{Coker} (H^{n+m-1}(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{n+m-1}(X, \mathbb{Q}))$$

$$H_{\text{prim}}^{n-m-1}(X, \mathbb{Q}) := \text{Coker} (H^{n-m-1}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{n-m-1}(X, \mathbb{Q}))$$

is.

証明. 2nd projection から誘導される map $\varphi: X \rightarrow \mathbb{P}^n$

と可なり. $R^{2m}\varphi_*\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}_X$ と可なり. $\square = \square$ と可なり.

Leray の spectral sequence for φ から出る. //

これから complete intersection X の話. hyper surface X の話には帰着していいことが可なり. 次の long exact sequence を考えよう

$$\begin{aligned} \rightarrow H^{n+m}(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n, \mathbb{Q}) &\xrightarrow{\alpha} H^{n+m}(U, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{n+m+1}(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n, \mathbb{Q}) \\ &\rightarrow H^{n+m+1}(\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n, \mathbb{Q}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Lemma α は 0-map.

Corollary $H^{n+m}(U, \mathbb{Q}) \cong H^{n+m-1}_{\text{prim}}(X, \mathbb{Q})$ は同型.

ここで, 上の Corollary の同型を考察する, $H^{n+m}(U, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{C}$ は, De Rham の定理より $H^{n+m}_{\text{DR}}(U/\mathbb{C})$ と同型に可なり.

これには,

$$H^{n+m}_{\text{DR}}(U/\mathbb{C}) \cong H^0(U, \Omega^{n+m}) / dH^0(U, \Omega^{n+m-1})$$

可なり同型を通じよう. X に添って F = pole の order $\geq r$ なる filtration が可なり. ところで, これは, $H^{n+m}(U, \mathbb{Q})$ 上の Hodge Structure を定める. この Corollary の同型は, Hodge structure と可なり同型であることが容易に可なり. 以下, この Hodge Structure を計算する.

F を μ と x の多項式 $F = \mu_0 F_0(x) + \dots + \mu_m F_m(x)$ と可なり. $S \in \mathbb{C}[\mu_0, \dots, \mu_m, x_0, \dots, x_n]$ と可なり.

$\partial F / \partial \mu_i$ ($i=0, \dots, m$), $\partial F / \partial x_j$ ($j=0, \dots, n$) で生成される。
 S an ideal, $R \in S/J$ とする。 J is a homogeneous ideal with respect to (μ, x) とする。

$R = \bigoplus_{a \geq 0, b \geq 0} R(a, b)$, ($R(a, b)$ is (μ, x) に属する degree a (a, b) とするもの),
 とする。 Differential の計算をする。 (これは)。 次の Proposition が得られる。

Proposition

$$\mathrm{Gr}_F^{h+m-p} H_{DR}^{h+m}(U/\mathbb{C}) \cong R_{(p-(m+1), p-(n+1))}$$

Corollary

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{prim}}^{p,q}(X) &\cong H_{\mathrm{prim}}^q(X, \Omega^p) \\ &\cong R(q, (m+q+1)d-(n+1)). \end{aligned}$$

次に $IVHS$ を記述する。 $H^1(X, \mathbb{Q}_X)$ を記述しよう。

Proposition

$$H^1(X, \mathbb{Q}_X) \cong R(1, d)$$

これは自然同型型がある。 Kodaira-Spencer map は

$$H^q(X, \Omega^p) \otimes H^1(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^{q+1}(X, \Omega^{p-1})$$

は ring R の ring multiplication を与える map

$$R(q, (m+q+1)d-(n+1)) \otimes R(1, d) \rightarrow R(q+1, (m+q+2)d-(n+1))$$

と compatible である。

Remark moduli 上の点 $X = \{F_0 = \dots = F_m = 0\}$ の

tangent $G = \mu_0 G_0(X) + \dots + \mu_m G_m(X) \in R_{(1,d)}$

方向への X の deformation として $F_0 + \varepsilon G_0 = \dots = F_m + \varepsilon G_m = 0$

で与えられる。

次に、cup product が induce される。polarization に対する記述はこの ring R の言葉で書けることに注意。

Proposition (Cup product)

標準的に $R_{(n-m-1, (n+m+1)d-2(n+1))}$ から $\mathbb{C}$ への map

$$tr: R_{(n-m-1, (n+m+1)d-2(n+1))} \rightarrow \mathbb{C}$$

が存在し、次の図式を commute する。 ($p+q=n-m-1$.)

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{prim}}^p(X, \Omega^q) \otimes H_{\text{prim}}^q(X, \Omega^p) & \rightarrow & H^{p+q}(X, \Omega^{p+q}) \cong \mathbb{C} \\ \parallel & & \uparrow tr \end{array}$$

$$R_{(p, (m+p+1)d-(n+1))} \otimes R_{(q, (n-q+1)d-(n+1))} \rightarrow R_{(n-m-1, (n+m+1)d-2(n+1))}$$

§ 2. Special case への reduction.

$S_{(1,d)}^0$ は $(1,d)$ polynomial であり、これに対応する 0 点の variety X は $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ で与えられる。smooth であることが知られている。

これは $GL(m+1) \times GL(n+1)$ が作用する。このとき、

$$\mathcal{M} = S_{(1,d)}^0 / GL(m+1) \times GL(n+1) \text{ とおける。}$$

§ 0 で定義した周期写像 $m \rightarrow D/T$ は, E.H. Peters に依り, quasi-finite にあることが知られている。

Variational Torelli と, Weak global Torelli (= generic Torelli) の関係は, 次の principle に依り, 知られている。

Principle M のある open set M^0 が存在して, 次の性質を満たすことができる。

(i) $M^0 \rightarrow D/T$ は étale 。

(ii) $X_1, X_2 \in M^0$ の I.V.H.S. $(H^1(X_i), H^{1,0}(X_i), \bar{v}_i, Q_i)$ が同型であれば, $X_1 \cong X_2$

この時, Weak global Torelli Theorem が成り立つ。

さて, 我々の場合 (i) が成り立つことが保証されているから, (ii) の条件を確かめなければならない。(ii) については, 次の reduction theorem が有効である。

Reduction Theorem m, d, n を前と同様に fix する。今,

$\lambda = (m+1)d - (n+1)$ とおいて, $d \leq 2\lambda$ が成り立つと仮定する。§ 1 で定義した ring R について,

$$(*) \quad R(0, 2\lambda) \longrightarrow \text{Hom}(R_{(n-m-1)(1,d)}, H^{n-m-1, n-m-1}(X))$$

は injective

が成り立つ様だ。 $F = \mu_0 F_0 + \dots + \mu_m F_m$ が $S(1, d)$ 中に存在してよい。

二つの時. Principle a (ii) が成立する。

$$(1^*) \text{ 18. } R(1, d)^{\otimes (n-m-1)} \rightarrow \text{Hom}(R(2, \lambda), R_P),$$

$P = (n-m-1, (n+m+1)d-2(n+1))$ が surjective であることは言える。(十分である。)

証明. $X \xrightarrow{f} S$ は smooth 18. $\mathbb{P}^n$ 内の $(\underbrace{d, \dots, d}_{n-m+1})$ complete intersection の family がある。 $s \in X$ の fiber は X_s と書く。 $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ である。 $R^1 f_* \mathcal{O}_{X/S}$ は locally free sheaf である。ゆえに。

$$(R^1 f_* \mathcal{O}_{X/S})^{\otimes (n-m-1)} \rightarrow \text{Hom}(f_* (\omega_{X/S}^{\otimes 2}), R^{n-m-1} f_* \omega_{X/S})$$

が s で surjective である。ある s を含み open set U があり、

任意の $s' \in U$ 上で surjective。二つの条件の成立するとき。

$$\ker(\text{Sym}^2 H^0(X_s, \Omega^{n-m-1}) \rightarrow \text{Hom}(H^1(X_s, \mathcal{O})^{\otimes (n-m-1)}, \mathbb{C}))$$

$$\cong \ker(\text{Sym}^2 H^0(X_s, \Omega^{n-m-1}) \rightarrow H^0(X_s, (\Omega^{n-m-1})^{\otimes 2}))$$

であり。 $\Omega^{n-m-2} \cong \mathcal{O}(\lambda)$ である。今、 $d \leq 2\lambda$ である。

X の λ -ple embedding の relation は $\mathcal{O}(\lambda)$ の kernel である。

主成分である。ゆえに、二つから X_s は recover できる。

Q.E.D.

ゆえに以下、ある特殊なものについて reduction

theorem を示す。まず V 及 W は V -ring 及び W は a duality について考察しよう。

§ 3 V -ring & duality theorem

$n, m \in \mathbb{N}$ (自然数), $n > m+1$ とする。 $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

$\mathbb{C}$ 上の T の元と見做す。 $L_j, f_i \in \mathbb{C}$.

$$L_j = \sum_{i=0}^m \lambda_j^i \mu_i, \quad f_i = \sum_{j=0}^n \lambda_j^i u_j$$

と置く。 $S = \mathbb{C}[\mu_0, \dots, \mu_m, u_0, \dots, u_m]$, $\tilde{R} = S / (L_j u_j, f_i)_{i=0, \dots, m, j=0, \dots, n}$ とする。 $(L_j u_j, f_i)$ は homogeneous ideal である。 $\tilde{R}$ は bigraded with respect to (μ, u) である。

$$\tilde{R} = \bigoplus_{a \geq 0, b \geq 0} \tilde{R}(a, b) \quad (= \mathbb{C} \text{ 上の } \tilde{R}(a, b) \text{ は } (\mu, u) \text{ に関する degree } a, b \text{ の部分})$$

Definition-Proposition (Residue-map)

$\xi_i = \prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j) u_i$ と置く。 $\tilde{r} : \tilde{R}(n-m-1, m) \rightarrow \mathbb{C}$ とする。

$$\tilde{r} \left(\prod_{i=0}^n L_i^{a_i} \prod_{j=0}^m \xi_j^{b_j} \right) = \prod_{i \neq j} (\lambda_i - \lambda_j)^{a_i b_j} \quad \left(\begin{array}{l} \sum a_i = n-m-1 \\ \sum b_i = m \end{array} \right)$$

で定義すると、well-defined であり、しかも $\tilde{r}$ は isomorphism である。

証明 これは λ_i ($i=0, \dots, n$) の対称式に関する関係式を用いて直接計算により、得られる。

±2. $\tilde{R}(n-m-1, 0)$ (resp $\tilde{R}(0, m)$) は, $(m+1)$ 変数, $(n-m-1)$ 次 (resp $(n-m)$ 変数, m 次) 多項式の空間と同型でありかつ同じ次元である。

Theorem (duality)

自然に pairing $\tilde{R}(n-m-1, 0) \otimes \tilde{R}(0, m) \rightarrow \tilde{R}(n-m-1, m) \cong \mathbb{C}$ が, $\tilde{R}$ の積から induce されるが, これは perfect.

Remark $\mathbb{C}^2$ を $sl(2, \mathbb{C})$ の表現と見たとき, $S^n S^m(\mathbb{C}^2)$ と $S^m S^n(\mathbb{C}^2)$ は同型であるが, この間にある同型は, 上の duality は関係がある様に見える。 (実は著者は, この同型を使, 上の duality が示されるが, 上は, と思, ている)。

§4. Special complete intersection of Fermat hyper surface

$\lambda_0, \dots, \lambda_n$ を 3 と同様に, $\mathbb{C}$ の相異なる元と可る。

Special to. Fermat hyper surface の complete intersection X は,

$$X : \begin{cases} x_0^d + \dots + x_n^d = 0 \\ \lambda_0 x_0^d + \dots + \lambda_n x_n^d = 0 \\ \vdots \\ \lambda_0^m x_0^d + \dots + \lambda_n^m x_n^d = 0 \end{cases} \quad (\text{in } \mathbb{P}^n)$$

で定義する。 X の d 個の性質がわかっている。 $\mathbb{C}$ について。
 拙著、博士論文を見てもいい。
 $F_i = \sum_{j=0}^n \lambda_j^i x_j^d$, $F(\mu, x) = \sum_{i,j} \lambda_j^i \mu_i x_j^d$ とし、

S で計算し $T = \text{ring } R$ で計算する。 $\mathbb{C} = \mathbb{C}$. R は、
 $\mathbb{C}[\mu_0, \dots, \mu_m, x_0, \dots, x_n] / J$ であり J は、 F_i の $\mathbb{C}$ 。
 $L_j x_j^{d-1}$ ($L_j = \sum_{i=0}^m \lambda_j^i \mu_i$, $j=0, \dots, n$) で生成された T ideal
 である。以下、条件 $\#$ の $T = R(0, 2\lambda) \rightarrow \text{Hom}(R(n-m-1)(1, d), R_p)$
 ($p = (n-m-1, (n+m+1)d - 2(n+1))$) が injective であること
 を示したい。

$$\# \quad d \leq 2\lambda \leq \min((d-1)m + (d-2), md)$$

$\mathbb{C}[\mu_0, \dots, \mu_m, x_0, \dots, x_n]$ 上に $\mathbb{C}$ は、 x_i に 1 の d 乗根
 を加えることによる。 $G = (\mu_d)^{n+1}$ の action が定義される。

この時、 ideal J は、 G -stable である。 $\mathbb{C}$ は、 R の
 action による。 G の action は degree preserving である。

$R(a, \lambda) = \bigoplus_{\chi \in \hat{G}} R(a, \lambda)(\chi)$, $\mathbb{C} = \mathbb{C}$. $\hat{G}$ は G の character
 group, $R(a, \lambda)(\chi) = \{r \in R(a, \lambda) \mid g(r) = \chi(g)r \forall g \in G\}$
 である。 $\chi_0 \in \hat{G} \cong (\mathbb{Z}/d)^{n+1}$ とし、 $\chi_0 = (-2, \dots, -2)$ で定義す
 る。 $R_p \cong R_p(\chi_0) \cong \mathbb{C}(\chi_0)$ とする。 以下、可なり
 の $\chi \in \hat{G}$ について、

$$R(0, 2\lambda)(\chi) \rightarrow \text{Hom}(R(n-m-1)(1, d)(\chi^{-1}\chi_0), R_p(\chi_0))$$

が injective であることを見せたい。

$$\begin{array}{ccc}
 & \times (\text{is monomial}) & \\
 \tilde{R}_{(0,a)} & \longrightarrow & \text{Hom}(\tilde{R}_{(n-m-1,l)}, \tilde{R}_{(n-m-1,m)}) \\
 \times (\text{is monomial}) \downarrow & & \downarrow \times (\text{is monomial}) \\
 \tilde{R}_{(0,m)} & \xrightarrow[\cong]{} & \text{Hom}(\tilde{R}_{(n-m-1,0)}, \tilde{R}_{(n-m-1,m)})
 \end{array}$$

= a 可換図式 84. $\tilde{R}_{(0,a)} \rightarrow \text{Hom}(\tilde{R}_{(n-m-1,l)}, \tilde{R}_{(n-m-1,m)})$

is injective 7 あり。 = 42. Main theorem の 証明 3 終 20