

差分方程式の非双曲型不動点の安定性

徳島大学・総合科学部 村上 公一 (Kouichi Murakami)

1. はじめに

m 次元の差分方程式

$$(1) \quad x_{n+1} = F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

を考える。ただし、 $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ は十分なめらかとする。不動点の安定性については、以下の定理がよく知られている。

定理 1.1. $\bar{x}$ を (1) の不動点とし、 $\bar{x}$ でのヤコビ行列の固有値を λ とする。

- (i) $|\lambda| < 1$ ならば $\bar{x}$ は漸近安定
- (ii) $|\lambda| > 1$ ならば $\bar{x}$ は不安定

$|\lambda| \neq 1$ である不動点を**双曲型不動点**といい、 $|\lambda| = 1$ である不動点を**非双曲型不動点**という。双曲型不動点であれば、上記の定理で安定判別できるが、 $|\lambda| \leq 1$ のような非双曲型不動点には適用できない。(非線形項の影響を調べる必要がある。) このような場合には、リヤプノフの方法や中心多様体理論などが使われる。

中心多様体理論によると、不動点でのヤコビ行列の固有値が

$$\begin{cases} |\lambda| = 1 & (c \text{ 個}) \\ |\lambda| < 1 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

であるとき、安定性は c 次元の方程式に帰着される。特に $c = 1$ の場合は、スカラー方程式に帰着される。

例 1.1. 2 次元の差分方程式

$$(2) \quad \begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n + \frac{3}{2}y_n - y_n^3 \end{cases}$$

を考える。不動点 $(0, 0)$ でのヤコビ行列は、

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

で、固有値は $\lambda = 1, \frac{1}{2}$ より、原点は非双曲型不動点となる。このとき、原点の近傍で中心多様体が存在して、

$$\begin{cases} x = u + 4u^3 + O(u^4) \\ y = u + 2u^3 + O(u^4) \end{cases}$$

と近似できる。図1において、実線が解軌道、破線が中心多様体を表す。中心多様体上の方程式は、

$$u_{n+1} = u_n - 2u_n^3 + O(u_n^4)$$

で与えられる。

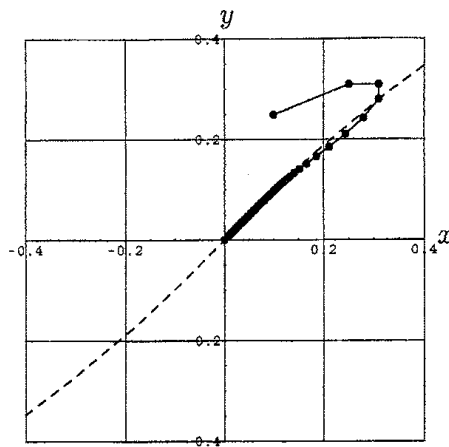


図 1. (2) の解軌道

例 1.2. 3次元の差分方程式

$$(3) \quad \begin{cases} x_{n+1} = -x_n + 3y_n z_n \\ y_{n+1} = -\frac{1}{2}y_n + 3x_n^2 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n - x_n y_n \end{cases}$$

を考える。原点 $(0,0,0)$ でのヤコビ行列の固有値は $\lambda = -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ となり、原点は非双曲型不動点となる。原点近傍で中心多様体が存在して、

$$\begin{cases} x = u \\ y = 2u^2 + O(u^4) \\ z = \frac{4}{3}u^3 + O(u^4) \end{cases}$$

と近似できる。中心多様体上の方程式は、

$$u_{n+1} = -u_n + 8u_n^5 + O(u_n^6)$$

で与えられる。

そこで、以下では、スカラー差分方程式

$$(4) \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

の安定性の条件を考える。ただし、不動点 $\bar{x}$ において $|f'(\bar{x})| = 1$ とする。これに関して、以下の定理が知られている。

[I] $f'(\bar{x}) = 1$ の場合

定理 1.2. [2] $f \in C^3$ とし、(4) の不動点 $\bar{x}$ において $f'(\bar{x}) = 1$ とする。

- (i) $f''(\bar{x}) \neq 0$ ならば $\bar{x}$ は不安定
- (ii) $f''(\bar{x}) = 0$ かつ $f'''(\bar{x}) > 0$ ならば $\bar{x}$ は不安定
- (iii) $f''(\bar{x}) = 0$ かつ $f'''(\bar{x}) < 0$ ならば $\bar{x}$ は漸近安定

例 1.1 では、中心多様体上の方程式は

$$u_{n+1} = u_n - 2u_n^3 + O(u_n^4)$$

で与えられたが、定理 1.2 の (iii) より原点は漸近安定となる。したがって、(2) の原点も漸近安定となる。

[II] $f'(\bar{x}) = -1$ の場合

定理 1.3. [2] $f \in C^3$ とし、(4) の不動点 $\bar{x}$ において $f'(\bar{x}) = -1$ とする。

- (i) $-3[f''(\bar{x})]^2 - 2f'''(\bar{x}) < 0$ ならば $\bar{x}$ は漸近安定
- (ii) $-3[f''(\bar{x})]^2 - 2f'''(\bar{x}) > 0$ ならば $\bar{x}$ は不安定

例 1.2 では、中心多様体上の方程式は、

$$u_{n+1} = -u_n + 8u_n^5 + O(u_n^6)$$

で与えられた。この場合は、定理 1.3 は適用できない。($\because f''(0) = f'''(0) = 0$)

この研究では、定理 1.2, 定理 1.3 を拡張し、高階の導関数 $f^{(k)}(\bar{x})$ を使った安定性の条件を求めることを目標とする。

2. 結果

今回は、以下の結果が得られた。

[I] $f'(\bar{x}) = 1$ の場合

定理 2.1. $f \in C^k$ とする。(4) の不動点 $\bar{x}$ において $f'(\bar{x}) = 1$ とし、

$$\begin{aligned} f^{(i)}(\bar{x}) &= 0 \quad (i = 2, 3, \dots, k-1) \\ f^{(k)}(\bar{x}) &\neq 0 \end{aligned}$$

とする。

- (i) $k : \text{odd}$ かつ $f^{(k)}(\bar{x}) > 0$ ならば $\bar{x}$ は不安定
- (ii) $k : \text{odd}$ かつ $f^{(k)}(\bar{x}) < 0$ ならば $\bar{x}$ は漸近安定
- (iii) $k : \text{even}$ ならば $\bar{x}$ は不安定

[II] $f'(\bar{x}) = -1$ の場合

定理 2.2. $f \in C^{2k-1}$ とする。(4) の不動点 $\bar{x}$ において $f'(\bar{x}) = -1$ とし、

$$\begin{aligned} f^{(i)}(\bar{x}) &= 0 \quad (i = 2, 3, \dots, k-1) \\ f^{(k)}(\bar{x}) &\neq 0 \end{aligned}$$

とする。

- (i) $k : \text{odd}$ かつ $f^{(k)}(\bar{x}) > 0$ ならば $\bar{x}$ は漸近安定
- (ii) $k : \text{odd}$ かつ $f^{(k)}(\bar{x}) < 0$ ならば $\bar{x}$ は不安定
- (iii) $k : \text{even}$ かつ $\exists l < k$ s.t.

$$\begin{aligned} f^{(j)}(\bar{x}) &= 0 \quad (j = k+1, k+3, \dots, 2l-3) \\ f^{(2l-1)}(\bar{x}) &\neq 0 \end{aligned}$$

とする。

- (a) $f^{(2l-1)}(\bar{x}) > 0$ ならば $\bar{x}$ は漸近安定
- (b) $f^{(2l-1)}(\bar{x}) < 0$ ならば $\bar{x}$ は不安定
- (iv) $k : \text{even}$ かつ $f^{(j)}(\bar{x}) = 0 \quad (j = k+1, k+3, \dots, 2k-3)$ とする。

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{k}{2} \left(\frac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!} \right)^2 + \frac{f^{(2k-1)}(\bar{x})}{(2k-1)!} > 0 \text{ ならば } \bar{x} \text{ は漸近安定} \\ \text{(b)} \quad & \frac{k}{2} \left(\frac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!} \right)^2 + \frac{f^{(2k-1)}(\bar{x})}{(2k-1)!} < 0 \text{ ならば } \bar{x} \text{ は不安定} \end{aligned}$$

3. 応用例

例 3.1. 例 1.2 の方程式 (3) を再考する。中心多様体上の方程式は,

$$u_{n+1} = -u_n + 8u_n^5 + O(u_n^6)$$

であったが, 定理 2.2 の (i) より, 原点は漸近安定となる。したがって, (3) についても, 原点は漸近安定となる。図 2 に解軌道と中心多様体を示す。この図より, 解が原点に近づいていることが確認できる。

例 3.2. 例 1.2 の方程式 (3) の右辺の非線形項の一部を変更した

$$(5) \quad \begin{cases} x_{n+1} = -x_n - 2x_n^2 y_n \\ y_{n+1} = -\frac{1}{2}y_n + 3x_n^2 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n - x_n y_n \end{cases}$$

を考える。この場合の中心多様体は,

$$\begin{cases} x = u \\ y = 2u^2 + 32u^5 + O(u^6) \\ z = \frac{4}{3}u^3 + O(u^6) \end{cases}$$

で, 中心多様体上の方程式は,

$$u_{n+1} = -u_n - 4u_n^4 - 64u_n^7 + O(u_n^8)$$

となるが, 定理 2.2 の (iv)(b) より, 原点は不安定となる。したがって, (5) についても, 原点は不安定となる。図 3 より, 解が原点より離れていくことが確認できる。

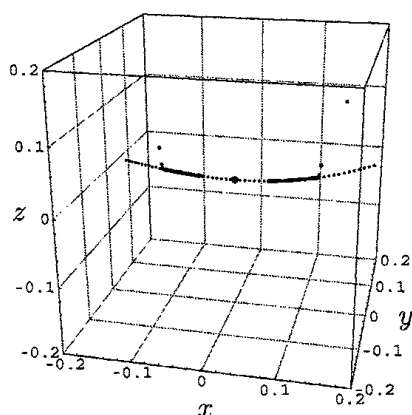


図 2. (3) の解軌道

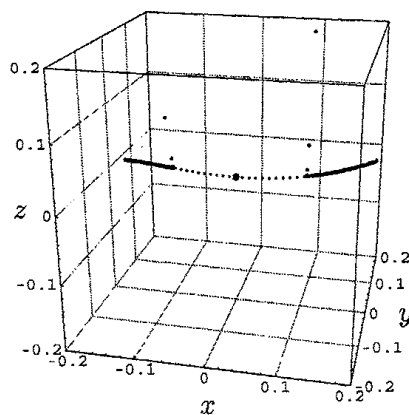


図 3. (5) の解軌道

REFERENCES

- [1] J. Carr, Applications of Centre Manifold Theory, Springer-Verlag, 1981.
- [2] S. Elaydi, An Introduction to Difference Equations, Springer-Verlag, 1995.
- [3] S. Wiggins, Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Springer-Verlag, 1990.