

不分岐主系列表現の既約性について

東大. 理. 加藤 信一

P 進体上の reductive 群の不分岐主系列表現の理論は.

Matsumoto (Springer Lecture Note #590) によつて affine Weyl 群の Hecke 環の表現 — これも (不分岐) 主系列表現とよぶ — の理論に拡張された。ここでは、この表現の既約性について論じる。

(⁰) affine Weyl 群の Hecke 環 以下.

$\Delta = \text{root 系}$ $\Delta^+ = \text{正 root 系}$ $\Pi = \text{単純 root 系}$,

$W = \Delta$ の Weyl 群

$T = \mathbb{Z}\Delta^\vee$ (co-root lattice : 但し $\alpha^\vee \in \Delta^\vee$ に対して $t_\alpha \in T$ と書くことにする。)

$\tilde{W} = \Delta$ の affine Weyl 群

$\cong W \ltimes T$ (半直積)

とする。ここで $\alpha \in \Delta$ に対して対応する鏡映を $w_\alpha \in W$

と書く。 $S = \{w_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$, $\tilde{S} = S \cup \{w_{-\tilde{\alpha}}\}$
 ($-\tilde{\alpha}$ は Δ の最大 root) とおく。 $(\tilde{W}, \tilde{S})$,
 (W, S) は共に Coxeter 系となる。 ± 2 . $q: \tilde{S} \rightarrow \mathbb{C}^\times$
 $\pm q(s) = q(s')$ ($\tilde{W}$ の S 共役 s') とおき、
 この時、この q に付随した $\tilde{W}$ の Hecke 環 $\mathcal{H}(\tilde{W}, q)$ が
 次のように定まる:

$\mathcal{H}(\tilde{W}, q)$ は基底 $\{\varepsilon_w \mid w \in \tilde{W}\}$ を持つ $\mathbb{C}$ 上の多元環で、
 $w \in \tilde{W}$, $s \in \tilde{S}$ に対して

$$\varepsilon_s \cdot \varepsilon_w = \begin{cases} \varepsilon_{sw} & l(sw) > l(w) \\ q(s) \varepsilon_{sw} + (q(s) - 1) \varepsilon_w & l(sw) < l(w) \end{cases}$$

により与えられるもの ($\varepsilon_e = 1$ (単位元)). (但し、

$l(\cdot)$ は $(\tilde{W}, \tilde{S})$ の length function である。

$\mathcal{H}(\tilde{W}, q)$ は $\{\varepsilon_s \mid s \in \tilde{S}\}$ で生成されることを注意しておく。

2° 主系列表現 まず $\sqrt{q(s)}$ を $s \in S$ に対して
 選んでおく。 (但し $q(s) = q(s')$ ならば $\sqrt{q(s)} = \sqrt{q(s')}$ と
 なるものとする。 また $\alpha \in \Delta$ に対して

$$\begin{aligned} \sqrt{q_\alpha} &= \sqrt{q(s)} \quad (\text{if } w_\alpha \xrightarrow{W\text{-共役}} s \in S) \\ \sqrt{q'_\alpha} &= \sqrt{q(s')} \quad (\text{if } w_\alpha t_\alpha \xrightarrow{\tilde{W}\text{-共役}} s' \in \tilde{S}) \end{aligned}$$

と定め、 $\delta^{1/2} \in \text{Hom}(T, \mathbb{C}^\times)$ を $\delta^{1/2}(t_\alpha) = \sqrt{q_\alpha q'_\alpha}$

$(=\sqrt{q_\alpha} \cdot \sqrt{r'_\alpha} : \alpha \in \Pi)$ に $\delta > 2$ 定義する。

$\lambda \in \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^\times)$ に対し

$$M_\lambda = \overline{\text{alg}} \left\{ f: \tilde{W} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(wt) = (\lambda \delta^k)(t) f(w) \right. \\ \left. (t \in T; w \in \tilde{W}) \right\}$$

と置く。 $\pm 2, \alpha_s \in \Delta (s \in \tilde{S})$ を

$$\alpha_s = \begin{cases} \beta & (\exists s = w_\beta \in S : \beta \in \Pi) \\ \tilde{\alpha} & (\forall s \notin S) \end{cases}$$

とし、 Σ_s の M_λ への作用を

$$(\pi(\Sigma_s)f)(wt) = \begin{cases} f(swt) + (q(s)-1)f(wt) & (w^{-1}(\alpha_s) > 0) \\ q(s)f(swt) & (w^{-1}(\alpha_s) < 0) \end{cases} \\ (f \in M_\lambda; w \in W; t \in T)$$

で定めると、これは $\mathcal{H}(\tilde{W}, q)$ の M_λ への作用に延長されることを示す。この表現 (もしくは M_λ) を、主系列表現 とよぶ。 ($\dim M_\lambda = |W| < \infty$)。

定理 (Matsumoto) 任意の $\mathcal{H}(\tilde{W}, q)$ の有限次元既約表現は、 $\exists \lambda \in \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^\times)$ s.t. M_λ の部分表現となる。

3° 既約性 $\alpha \in \Delta$ に対し、 $\text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^\times) \simeq (\mathbb{C}^\times)^\ell$ ($\ell = \#\Pi$) 上の有理函数、 $\mathbb{C}$ -函数を

$$c_\alpha(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(1 - \sqrt{b_\alpha b'_\alpha}^{-1} \lambda (t_\alpha)^{-1})(1 + \sqrt{b'_\alpha / b_\alpha} \lambda (t_\alpha)^{-1})}{1 - \lambda (t_\alpha)^{-2}}$$

$$(\lambda \in \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^\times))$$

で定義する。この表示は分母・分子が互いに素な有理数
 である。約分した分母・分子をそれぞれ $d_\alpha(\lambda), e_\alpha(\lambda)$
 とおく。(e.g. $b \equiv 1$ ならば $d_\alpha(\lambda) = e_\alpha(\lambda) \equiv 1$)。
 W は $\text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^\times)$ に自然に作用する $\mathbb{C}^\times$ 。 $\lambda \in \text{Hom}(\Gamma, \mathbb{C}^\times)$
 の固定化群を W_λ と書くことにすると、

定理 (Matsumoto) $W_\lambda = \{e\}$ ならば

$$M_\lambda \text{ が 既約} \iff e(\lambda) = \prod_{\alpha \in \Delta} e_\alpha(\lambda) \neq 0.$$

$W(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \langle w_\alpha (\alpha \in \Delta^+) \mid d_\alpha(\lambda) = 0 \rangle$ とおく。直ちに
 $W_\lambda \supset W(\lambda)$ がわかるが、このとき上の定理の一般化が
 決まらうに思われる。

定理 M_λ が既約 $\iff \begin{cases} (i) & e(\lambda) \neq 0 \\ (ii) & W_\lambda = W(\lambda). \end{cases}$

(注) (i) 講演では $\Delta = \text{右典型}$ の場合について述べたが、その後
 一般的に証明された。(ii) 上の定理は p -adic reductive 群について同様。