

Heegaard splittings のある不変量について

津田塾大 菅野仁子(Jinko Kanno)

本稿は、津田塾大の福原真二先生と著者との、Heegaard splittings の invariant についての共同研究を概括したものである。

M^3 を、連結可附向 3 次元閉多様体とすると、三角形分割可能なことから、 M^3 は、種数 g の Heegaard splitting を持つ。この時、Heegaard splittings に対する不変量が、以下のように定義できるが、いわゆる Heegaard diagram から計算可能な行列の class である。以下に、定義と、応用例を述べる。

§1 不変量の定義

まず、Heegaard splitting の定義をする。

定義 種数 g の可附向ハンドル体 T_1, T_2 に対し、 $M^3 = T_1 \cup T_2$, $T_1 \cap T_2 = \partial T_1 = \partial T_2$ と表わされる時、 M^3 は 種数 g の Heegaard splitting を持つ と言い、 $(M^3; T_1, T_2)$ 又は、 $\partial T_1 = \partial T_2 = \mathcal{F}$

として、 $(M^3, \mathcal{F})$ と書く。□

M^3 が、種数 g の Heegaard splitting $(M^3; T_1, T_2)$ を持つ時、包含写像から成る次のような可換な図式が、存在する。

$$\begin{array}{ccc}
 & \partial T_1 (= \partial T_2) & \\
 \alpha \swarrow & & \searrow i \\
 T_1 & \text{---} & T_2 \\
 \alpha' \searrow & & \swarrow i' \\
 & M^3 &
 \end{array}$$

又、次のような、群の準同型写像を考える。

$$\begin{array}{ccccc}
 & \pi_1(\partial T_1, p) & & & \\
 \alpha_* \swarrow & & & \searrow i_* & \\
 \pi_1(T_1, p) & & \pi_1(T_2, p) & & \\
 a \swarrow & & \searrow a & & \\
 H_1(T_1) & & H_1(T_2) & & \\
 \alpha'_* \searrow & \gamma & \swarrow \beta & i'_* \searrow & \\
 & H_1(M^3) & & &
 \end{array}$$

ここで、基本群の基点 p は、 $p \in \partial T_1 = \partial T_2$ に固定して考えるものとする。 a は、可換化準同型写像である。上の準同型写像について、群環への自然な拡張準同型写像も、同じ記号で、書くことにする。

次に、 T を種数 g のハンドル体、 D を ∂T 上のある 2-disk で、点 p を含まないとする時、 T の m - ℓ 系を次のように、定

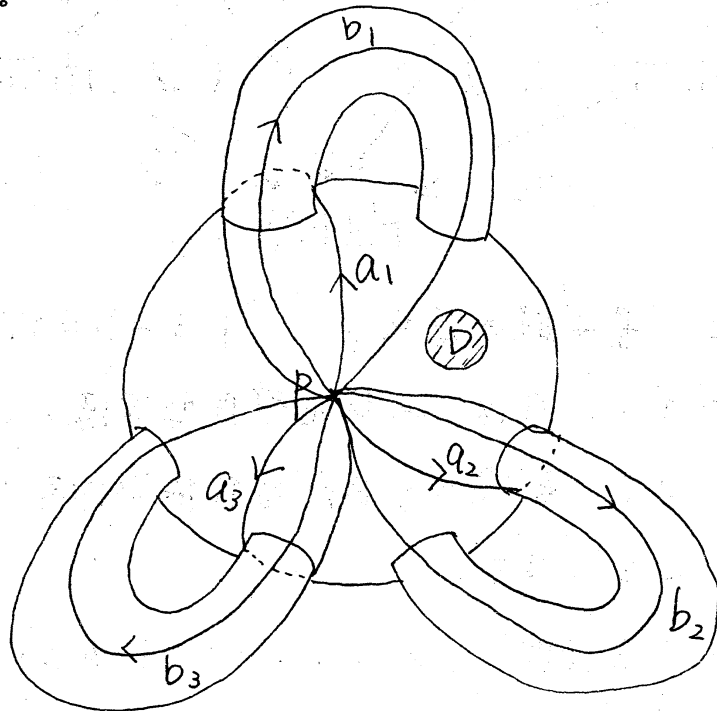
義する。

定義 T を、種数 g のハンドル体とする。 $\partial T - \bar{D}$ 上の P を通り、どの2つも P 以外には共通部分を持たない $2g$ 本の有向単純閉曲線 $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ が、次の条件を満たす時 $\{a_i, b_i\}_{i=1}^g$ を T の m - l 系 と呼ぶ。

1) 各 a_i は、 T 内に proper に埋蔵された 2-disk の境界になっている。

2) ∂T を、 $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ に沿って切り開くと、 P を頂点とする $4g$ 角形に PL 同相で、その辺は、 $a_1^{-1} b_1^{-1} a_1 b_1, \dots, a_g^{-1} b_g^{-1} a_g b_g$ の順に並んでいる。□

T の m - l 系を $g=3$ のとき、図で示すと、たとえば、下のようになる。



さて、代数的な定義を少ししておく。

定義 (Fox [4]) 群 H の群環 $\mathbb{Z}H$ の元 v に対し、 $\bar{v}$ を次のように定義する。 $v = \sum_{x \in H} r_x x$, $r_x \in \mathbb{Z}$ の時、 $\bar{v} \equiv \sum_{x \in H} r_x x^{-1}$ とする。□

定義 (Fox [3]) 自由群 $F(x_1, \dots, x_n)$ の群環 $\mathbb{Z}F(x_1, \dots, x_n)$ から自分自身への写像 $\partial/\partial x_j$ が、次の 1) 2) を満たす時、 $\partial/\partial x_j$ を $\mathbb{Z}F_n$ 上の x_j に関する自由微分と言う。

$$1) \quad \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \text{ (クロネッカーのデルタ)}$$

2) $u, v \in \mathbb{Z}F_n$ の時、

$$\frac{\partial(u+v)}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x_j} = \frac{\partial u}{\partial x_j} v^\circ + u \frac{\partial v}{\partial x_j}$$

ここで、 $v = \sum_{w \in F_n} r_w w$, $r_w \in \mathbb{Z}$ ならば、 $v^\circ = \sum_{w \in F_n} r_w \in \mathbb{Z}$ である。□

ここまでの準備のもとに、次のような行列を考えることができるが、後に述べる定理から、その行列のある class が Heegaard splittings の不変量になり、といることが、わかる。

定義 M^3 の種数 g の Heegaard splitting $(M^3; T_1, T_2) = (M^3, \mathcal{F})$ に対し、 T_1 の m - ℓ 系 $\{a_i, b_i\}_{i=1}^g$ と、 $\pi_1(T_2, p) \cong F(x_1, \dots, x_g)$ を定めることにより、 $\mathcal{F}$ で定義される。次の行列を $A_{\mathcal{F}}(a, b, \mathcal{F})$ と書く。ただし、 a_k^* は、 a_k を $\pi_1(T_1, p)$ の元と見た時の i_* による像 $i_*(a_k)$ のことである。又、行列の肩に書

いた β は、行列の各成分に施されるものとする。

$$A_{\mathcal{F}}(a, b, X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_k^{i*}}{\partial X_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial b_k^{i*}}{\partial X_j} \end{pmatrix}^{\beta} . \quad \square$$

注) $A_{\mathcal{F}}(a, b, X)$ は、 $\mathbb{Z} H_1(M^3)$ を係数とする、 $2g \times g$ 行列である。

M^3 のひとつの Heegaard splitting に対して、 a, b, X のとり方は、一意的ではないが、次の定理が成り立つ。

定理 1 M^3 の Heegaard splitting $(M^3; T_1, T_2) = (M^3, \mathcal{F})$ をひとつ固定した時、 $A_{\mathcal{F}}(a, b, X)$ と $A_{\mathcal{F}}(a', b', X')$ の間には、次の関係がある。

$\exists U, G$; $\mathbb{Z} H_1(M^3)$ を係数とする $g \times g$ 可逆行列で、
 $\det U, \det G \in \pm H_1(M^3)$

$$\text{s.t. } A_{\mathcal{F}}(a', b', X') = \begin{pmatrix} U & 0 \\ W & {}^*U^{-1} \end{pmatrix} A_{\mathcal{F}}(a, b, X) (G)$$

ここで、 $U = (u_{ji})$ の時、 ${}^*U = (\overline{u_{ji}})$ と定める。 $\square$

同様なことが、 M^3 の 2 つの強同値な Heegaard splittings から定義される行列 $A_{\mathcal{F}}, A_{\mathcal{F}'}$ についても成り立つ。

定義 (Birman [2]) X_g を、種数 g の向き付けられたハンドル体とする。 X_g を、位相同型写像 τ で写した像 $\tau(X_g)$ を X_g'

と書き、 Xg からの向きを受け継いでいるものとせよ。その時、 ∂Xg と $\partial Xg'$ を向きを保たない位相同型写像 h で、同一視して得られる可附向3次元閉多様体 M^3 を、種数 g の Heegaard splitting によって表現されていると言い、 h を 貼り合わせ写像と呼ぶ。□

定義 (Birman [2]) M^3 の2つの Heegaard splittings $(M^3; T_1, T_2)$, $(M^3; T_1', T_2')$ が、強同値であるとは、それぞれの貼り合わせ写像を、 h, h' とする時、次の図式が可換で、しかも、 f_1, f_2 は、 T_1, T_2 への拡張位相同型写像をそれぞれ持つことである。

$$\begin{array}{ccc} \partial T_1 & \xrightarrow{h} & \partial T_2 \\ f_1 \downarrow & \curvearrowright & \downarrow f_2 \\ \partial T_1' & \xrightarrow{h'} & \partial T_2' \end{array}$$

□

定理 1' M^3 の2つの種数 g の Heegaard splittings $(M^3; T_1, T_2) = (M^3; \mathcal{F})$, $(M^3; T_1', T_2') = (M^3; \mathcal{F}')$ が、強同値ならば、それぞれに対応する行列 $A_{\mathcal{F}}, A_{\mathcal{F}'}$ には、次の関係がある。

$\exists U, G; \mathbb{Z}H_1(M^3)$ を係数とする $g \times g$ 可逆行列で、

$$\det U, \det G \in \pm H_1(M^3)$$

$$\text{s.t. } A_{\mathcal{F}'} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ W & *U^{-1} \end{pmatrix} A_{\mathcal{F}}(G)$$

□

従, z . A_g に定理 1' の条件を満たす任意の $\begin{pmatrix} U & 0 \\ W & U^{-1} \end{pmatrix}$ を
 左から (G) を右から掛けた行列全体は, M^3 の強同値な
 Heegaard splittings に対して不変である。これが、不変量の
 定義である。

定理 1' の証明は、定理 1 の証明と本質的に同じなので、
 定理 1 の証明を次の § で述べる。

§ 2 定理 1 の証明

T を種数 g のハンドル体とする時、次の 2 つの命題が
 成り立つ。点 $p \in \partial T$ とする。

命題 1 f を T から T への位相同型写像で、 $f(p) = p$ とする。

この時、 $\{a_i, b_i\}_{i=1}^g$ が、 T の m - l 系ならば、 $\{f(a_i), f(b_i)\}_{i=1}^g$
 も T の m - l 系である。□

命題 2 $\{a_i, b_i\}_{i=1}^g, \{a'_i, b'_i\}_{i=1}^g$ が、 T の 2 つの m - l 系ならば、

T から T への p を保つ位相同型写像 f が存在して、 $f(a_i) =$
 $a'_i, f(b_i) = b'_i \quad i=1, \dots, g$ となる。□

また、自由微分に関して、次の事実が知られている。

命題 3 ($F_0 X[3]$) λ を自由群 $F(y_1, \dots, y_n)$ から自由群 $F(x_1, \dots,$

$\dots, x_m)$ の中への準同型写像、 μ を群環 $\mathbb{Z} F(y_1, \dots, y_n)$ の元
 とすると次が成り立つ。

$$\frac{\partial v^\wedge}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^m \left(\frac{\partial v}{\partial y_k} \right)^\wedge \frac{\partial y_k^\wedge}{\partial x_j}, \quad j=1, \dots, m. \quad \square$$

命題4 (Birman [1]) 階数 n の自由群 F_n が、二組の自由基底 $x_1, \dots, x_n$ および $y_1, \dots, y_n$ を持つ時、 $\mathbb{Z} F_n$ の元 v は、2通りに表現できるが、次が成り立つ。

$$\frac{\partial v}{\partial y_j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial y_j} \quad j=1, \dots, n. \quad \square$$

以上のこと、特に、命題3から次の補題が導かれる。

補題1 $\{a_i, b_i\}_{i=1}^g$ を T_1 の m - l 系、 f を T_1 から T_1 への位相同型写像で、 p を保つとすると、 $f(a_i) = a_i'$, $f(b_i) = b_i'$, $\pi_1(T_2, p) \cong F(x_1, \dots, x_g)$ のとき、次が成り立つ。

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\partial a_i'^{i*}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial b_i'^{i*}}{\partial x_j} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial a_i'}{\partial a_k} & \frac{\partial a_i'}{\partial b_k} \\ \frac{\partial b_i'}{\partial a_k} & \frac{\partial b_i'}{\partial b_k} \end{array} \right)^{i*} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial a_k^{i*}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial b_k^{i*}}{\partial x_j} \end{array} \right) \quad \square$$

そして、次の定理2は、定理1の証明において、一番本質的である。

定理2 $\{a_i, b_i\}_{i=1}^g, \{a_i', b_i'\}_{i=1}^g$ を T_1 の m - l 系とする時、次が成り立つ。ここに、行列の成分は、 $\pi_1(T_1, p) \cong F(y_1, \dots, y_g)$ の群環の元である。

$$\left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial a'_i}{\partial a_k} & \frac{\partial a'_i}{\partial b_k} \\ \hline \frac{\partial b'_i}{\partial a_k} & \frac{\partial b'_i}{\partial b_k} \end{array} \right)^{\alpha*} = \left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline W & *U^{-1} \end{array} \right)$$

さらに、 $\det U \in \pm \pi_1(T_1, P)$ である。□

以下、定理2の証明に没頭する。

補題2

$$G_H \equiv \left\{ \begin{pmatrix} U & 0 \\ W & *U^{-1} \end{pmatrix}; U, W \text{ は } H \text{ を係数とする } g \times g \text{ 行列で } U \text{ は可逆行列.} \right\}$$

は、行列の積に関して群をなす。ここで H は任意の代数系とする。

補題3 記号は、補題2と同じ仮定のもとに、 φ を群環 H から

群環 H' への準同型写像で、 H の任意の元 x に対し、

$$\varphi(\overline{x}) = \overline{\varphi(x)} \text{ が成り立つものとする。}$$

この時、 $(*U^{-1})^\varphi = *(U^\varphi)^{-1}$ であって、特に

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ W & *U^{-1} \end{pmatrix}^\varphi = \begin{pmatrix} U^\varphi & 0 \\ W^\varphi & *(U^\varphi)^{-1} \end{pmatrix} \text{ より } \varphi(G_H) \subset G_{H'}$$

が成り立つ。□

T を、種数 g のハンドル体とすると、次が知られている。

命題5 (S. Suzuki [5]) T の写像類群は、次の6つの位相同型写像で生成される。

f_i : ハンドルの巡回的変換。

f_2 : knob の twisting

f_3 : ハンドルの twisting

f_4 : 2つの knobs の交換

f_5 : Sliding θ

f_6 : Sliding ξ □

これらの f_i について、次が成り立つことが、確かめられる。

補題 4 $\{a_i, b_i\}_{i=1}^g$ を T_1 の m -l 系とする。 f を T_1 から T_1 への位相同型写像で、 $f_1, \dots, f_6, f_1^{-1}, \dots, f_6^{-1}$ のいずれかとする。
 $a'_i = f(a_i)$, $b'_i = f(b_i)$ とすると次が成り立つ。

$$\left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial a'_i}{\partial a_j} & \frac{\partial a'_i}{\partial b_j} \\ \hline \frac{\partial b'_i}{\partial a_j} & \frac{\partial b'_i}{\partial b_j} \end{array} \right)^{a_*} = \left(\begin{array}{c|c} V & 0 \\ \hline \Omega & {}^*V^{-1} \end{array} \right), \quad \det V \in \pm \pi_1(T_1, p). \quad \square$$

上で、両辺は、 $\mathbb{Z} \pi_1(T_1, p)$ を係数とする $2g \times 2g$ 行列である。命題 5 より、 T_1 から T_1 への任意の位相同型写像 f は、
 $f = f_{i_1}^{e_1} \cdots f_{i_n}^{e_n}$, $i_1, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, 6\}$, $e_j = \pm 1$ と書けるから、 n に関する数学的帰納法より、定理 2 が導かれる。

定理 2 によ、て、定理 1 の左から掛ける行列については解決したが、右から掛ける行列については、次の補題で解決する。補題 5 の証明は、命題 4 と、Birman [1] から明らかで

ある。

補題 5 $\{a_i, b_i\}_{i=1}^g$ を T_1 の m -元系, $\pi_1(T_2, p) \cong F(x_1, \dots, x_g) \cong F(x'_1, \dots, x'_g)$ とすると, 次が成り立つ。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a_i^{i*}}{\partial x'_j} \\ \frac{\partial b_i^{i*}}{\partial x'_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_i^{i*}}{\partial x_k} \\ \frac{\partial b_i^{i*}}{\partial x_k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_k}{\partial x'_j} \end{pmatrix}$$

しかも, $\det\left(\frac{\partial x_k}{\partial x'_j}\right) \in \pm F(x'_1, \dots, x'_g)$ である。□

§3 応用

§1 で定義された Heegaard splittings の不変量を使, レンズ空間のあるものは区別することができる。定理の形で正確に述べると、次のようになる。

定理 3 $L(p, 1) \cong L(p, q) \Rightarrow q \equiv \pm 1 \pmod{p}$ □

証明は、連結可附向る次元関多様体 M^3 の任意の Heegaard splittings は、いくつかの自明な分解をつけ加えることによって、強同値な分解になる (Reidemeister-Singer) ことを使う。以下、具体的に証明を述べる。

レンズ空間の定義から、 $L(p, 1)$, $L(p, q)$ という書き方は、種数 1 の Heegaard splitting をそれぞれ与えている。今、 $(q-1)$ 個の自明な分解をつけ加えることによって、 $L(p, 1)$

と $L(p, g)$ は、強同値な Heegaard splittings になつたと仮定する。それぞれの Heegaard splittings を記号で次のように書くとする。

$$L(p, 1) = T_1 \cup T_2, \quad T_1 \cap T_2 = \partial T_1 = \partial T_2$$

$$L(p, g) = T_1' \cup T_2', \quad T_1' \cap T_2' = \partial T_1' = \partial T_2'$$

$\{a_i, b_i\}_{i=1}^g, \{a_i', b_i'\}_{i=1}^g$ を T_1, T_1' の m - l 系,

$\pi_1(T_2, p) \cong F(x_1, \dots, x_g), \pi_1(T_2', p) \cong F(x_1', \dots, x_g')$ とする

時、次のようにみなすことができる。

$$a_1^{i*} = x_1^p, a_j^{i*} = x_j \quad (j=2, \dots, g), \quad b_1^{i*} = x_1, b_j^{i*} = 1 \quad (j=2, \dots, g)$$

$$a_1^{i' *} = x_1'^p, a_j^{i' *} = x_j' \quad (j=2, \dots, g), \quad b_1^{i' *} = x_1'^g, b_j^{i' *} = 1 \quad (j=2, \dots, g)$$

従つて、自由微分を行なうと次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a_k^{i*}}{\partial x_j} \\ \frac{\partial b_k^{i*}}{\partial x_j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |1+x_1+\dots+x_{g-1}| & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1^\beta = t^r, (p, r) = 1$$

$$H_1(M^3) \cong \langle t | t^p = 1 \rangle$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a_k^{i' *}}{\partial x_j'} \\ \frac{\partial b_k^{i' *}}{\partial x_j'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |1+x_1'+\dots+x_{g-1}'| & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \\ |1+x_1'+\dots+x_{g-1}'| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1^{\beta'} = t$$

$$H_1(M^3) \cong \langle t | t^p = 1 \rangle$$

各成分にそれぞれ β, β' を施した行列を $\begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R' \\ S' \end{pmatrix}$ と書くことにすると次が成り立つ。

$$R=R'=\left(\begin{array}{c|c} \alpha & \\ \hline & E \end{array}\right), \alpha=1+t+\dots+t^{p-1}, E \text{ は } (q-1)\text{-次単位行列}$$

$$S=\left(\begin{array}{c|c} s & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), s=1, \quad S'=\left(\begin{array}{c|c} s' & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), s'=1+t+\dots+t^{q-1}$$

$\begin{pmatrix} R' \\ S' \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}$ は定理1'の関係を満たすことから次が成り立つ。

$$\exists U, G \quad U=\left(\begin{array}{c|c} u_{11} & u_{12} \\ \hline u_{21} & u_{22} \end{array}\right), G=\left(\begin{array}{c|c} g_{11} & g_{12} \\ \hline g_{21} & g_{22} \end{array}\right)$$

$\det U, \det G \in \pm H_1(M^3)$

$$\text{s.t.} \quad \begin{pmatrix} U & 0 \\ W & *U^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R' \\ S' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix} (G)$$

$$\text{ゆえに} \quad \textcircled{1} UR = RG \quad (\because R=R') \quad \textcircled{2} *UWR + S' = *USG \quad (\because R=R')$$

$$\textcircled{1} \text{より} \quad \textcircled{3} \quad u_{11} \equiv \pm t^l g_{11} \pmod{\alpha} \quad \because \det U = \pm t^k, \det G = \pm t^m$$

③の(1,1)成分を $\text{mod } \alpha$ で比較することを考えて

$$s' \equiv \overline{u}_{11} s g_{11} \pmod{\alpha} \text{ となるから } 1+t+\dots+t^{q-1} \equiv \overline{u}_{11} g_{11} \pmod{\alpha}$$

$$\textcircled{3} \text{ を代入して } \overline{g}_{11} g_{11} \equiv \pm t^l (1+t+\dots+t^{q-1}) \pmod{\alpha}$$

$$\text{ゆえに } \overline{g}_{11} g_{11} \pm t^l (1+t+\dots+t^{q-1}) + f(t) (1+t+\dots+t^{p-1}) = 0$$

$$\text{両辺に } (1-t) \text{ を掛けて } \quad \textcircled{4} \quad \overline{g}_{11} g_{11} (1-t) = \pm t^l (1-t^q)$$

$$\textcircled{4} \text{ で } t = t^{-1} \text{ を代入すると } \quad \textcircled{5} \quad \overline{g}_{11} g_{11} (1-t) = \pm t^{-l-q+1} (1-t^q)$$

$$\textcircled{4} \text{ と } \textcircled{5} \text{ を比較して } \quad \textcircled{6} \quad 2l \equiv 1-q \pmod{p}$$

$$\textcircled{4} \text{ で } g_{11} = \sum_{i=0}^{p-1} a_i t^i, a_i \in \mathbb{Z} \text{ を代入すると左辺の定数項は}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{p-1} (a_i - a_{i+1})^2, \text{ ただし } a_p = a_0, \text{ となる。}$$

④において⑥を考慮しながら、右辺の定数項と比較すると、次のように場合分けできる。

- 1) $l \equiv 0 \pmod{p}$ ならば $g \equiv 1 \pmod{p}$ である。
- 2) $l+g \equiv 0 \pmod{p}$ ならば $g \equiv -1 \pmod{p}$ である。
- 3) $l \not\equiv 0, l+g \not\equiv 0 \pmod{p}$ ならば、右辺の定数項は、0に等しい。ゆえに、 $a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1}$ である。

この時、④の左辺 $= \overline{g_1} g_1 (1-t) = a_0^2 (1-t) \sum_{i=0}^{p-1} t^i \sum_{j=0}^{p-1} t^{-j} = 0 \because t^p = 1$
 従って④の右辺を考えると、 $g \equiv 0 \pmod{p}$ となければならぬが、これは仮定に反するので、3)は起こらないことがわかる。//

References

- [1] J.S. Birman, An inverse function theorem for free groups, Proc. of the Amer. Math. Soc. (1973), 634-638.
- [2] ———, On the equivalence of Heegaard splittings of closed, orientable 3-manifolds, In Knots, groups, and 3-manifolds (L. P. Neuwirth, Editor). Princeton Univ. Press, Annals of Math. Studies No. 84 (1975), 137-164.
- [3] R. H. Fox, Free differential calculus. I, Ann. of Math. 57 (1953), 547-560.
- [4] ———, Free differential calculus. II, Ann. of Math.

59(1954), 196-210.

[5] S. Suzuki, On homeomorphisms of a 3-dimensional handlebody, Can. J. Math. (1977), 111-124.

[5'] ———, 閉曲面の写像類群, 数理解析研究所講究録 297 (1977), 1-23.