

2変数 p -進 L -関数の値について

九大理 小塚和人 (Kazuhito Kozuka)

§1. 序

K を複素数体 $\mathbb{C}$ に含まれる類数 1 の虚 2 次体, $-d_K$ を K の判別式とする. E を K 上定義され, K の整数環 $\mathcal{O}$ による虚数乗法を持つ楕円曲線, ψ を E の K 上の量指標, ψ' を ψ の導手とする. E の Weierstrass model

$$(1.1) \quad y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$$

を, $g_2, g_3 \in \mathcal{O}$ かつ判別式 $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ が $6f$ の素因子のみで割り切れるように固定する. $p(z)$ を (1.1) に関する Weierstrass の p -関数, L を $p(z)$ の周期格子とし, $\Omega \in L$ を $L = \Omega \mathcal{O}$ となるようにとる.

p を $6d_K f$ と素で, K で $(p) = \mathfrak{p}\mathfrak{p}^*$ と完全分解する有理素数とし, $\pi = \psi(\mathfrak{p})$, $\pi^* = \psi(\mathfrak{p}^*)$ とおく. 各 $g \in \mathcal{O}$ に対し, E の g -分点全体のなす群を E_g と書くことにする. $E_{\pi^\infty} = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_{\pi^{n+1}}$, $E_{\pi^{*\infty}} = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_{\pi^{*n+1}}$ とおく.

以後 K の $\mathfrak{p}$ による完備化を, p -進有理数体 $\mathbb{Q}_p$ と同一視し, $\mathbb{Z}_p$ を $\mathbb{Q}_p$ の整数環とする.

$\mathfrak{p}_\infty$ を $\mathfrak{p}$ の上にある $K(E_{T^{\infty}})$ の素イデアル, $\mathfrak{P}_\infty$ を $K(E_{T^{\infty}})$ の $\mathfrak{p}_\infty$ による完備化, $\mathbb{Q}_p$ を $\mathfrak{P}_\infty$ の代数閉包の完備化とし, K の $\mathbb{C}$ における代数閉包を $\mathbb{C}_p$ に埋め込んでおく. $\mathfrak{P}_\infty, \mathbb{C}_p$ の整数環をそれぞれ $\mathcal{O}_\infty, \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ と書くことにする.

K の整イデアル $\mathfrak{q}$ に対し, $\mathcal{C}(\mathfrak{q})$ を K の ray class group mod $\mathfrak{q}$, $R(\mathfrak{q})$ を K の ray class field mod $\mathfrak{q}$ とする. 整数 $k \geq 1$ に対し, ψ^k の導手が $\mathfrak{q}$ を割り切るとき, $\sigma \in \text{Gal}(R(\mathfrak{q})/K)$ に対して, $L_{\mathfrak{q}}(\sigma, \psi^k, s)$ を部分 zeta 関数, 即ち,

$$L_{\mathfrak{q}}(\sigma, \psi^k, s) = \sum_{\substack{\alpha: K \text{ の 整イデアル} \\ (\alpha, \mathfrak{q})=1, (\alpha, R(\mathfrak{q})/K)=\sigma}} \psi^k(\alpha) N\alpha^{-s} \quad (\text{Re}(s) > 1 + k/2)$$

の全 s -平面への解析接続とする. $\mathcal{C}(\mathfrak{q})$ の指標 χ に対し,

$$L_{\mathfrak{q}}(\chi \psi^k, s) = \sum_{C \in \mathcal{C}(\mathfrak{q})} \chi(C) L_{\mathfrak{q}}(\sigma_C, \psi^k, s)$$

とおく. ここに σ_C は, Artin 対応によって $C \in \mathcal{C}(\mathfrak{q})$ に対応する $\text{Gal}(R(\mathfrak{q})/K)$ の元である. 特に, $\mathfrak{q}$ が $\overline{\chi \psi^k}$ の導手に等しいとき, $L_{\mathfrak{q}}(\chi \psi^k, s)$ は, $\chi \psi^k$ に関する primitive Hecke L -関数になる. これを単に, $L(\chi \psi^k, s)$ と書くことにする.

u を $1+p\mathbb{Z}_p$ の位相的生成元とする. このとき, 各 $(i, j) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し, 次の補間的性質を持つ巾級数 $g_4^{(i, j)}(T_1, T_2) \in \mathcal{O}_\infty[[T_1, T_2]]$ が存在する ([5]);

$k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $0 \leq -k_2 < k_1$, $(k_1, k_2) \equiv (i_1, i_2) \pmod{p-1}$ のとき,

$$(1.2) \quad g_f^{(i_1, i_2)}(u^{k_1-1}, u^{k_2-1}) = (k_1-1)! \Omega_g^{k_2-k_1} (1-\psi(g)^{k_1-k_2}/Ng^{1-k_2}) \\ \times (1-\overline{\psi}(g^*)^{k_1-k_2}/Ng^{*k_1}) (2\pi/\sqrt{d_k})^{-k_2} \Omega_\infty^{-(k_1-k_2)} L_f(\psi^{k_1-k_2}, k_1)$$

ここに, Ω_g は §2 で定義する $\mathcal{O}_g^*$ の元, また (1.2) の右辺は,

Damerell の定理により, $\mathbb{C}_p$ の元とみなしている.

ここでは, $\mathbb{Z}_p^*$ の第 2 種指標 ψ, ψ' 及び整数 $k_1 > -k_2 \geq 0$ に対する $g_f^{(i_1, i_2)}(\psi(u)u^{k_1-1}, \psi'(u)u^{k_2-1})$ の値を調べ, [1] 系 2.4 の 2 変数の場合における類似の結果と, Dirichlet 指標に対する p -進 L -関数の $s=1$ での値に関する Leopoldt の公式の類似の結果を紹介する.

§ 2. Eisenstein 級数

整数 $k \geq 1$ に対し, $K_k(z, \rho)$ を

$$K_k(z, \rho) = \sum_{\omega \in L, \omega \neq -z} (\bar{z} + \bar{\omega})^k |z + \omega|^{-2\rho} \quad (\operatorname{Re}(\rho) > 1 + k/2)$$

の全 ρ -平面への解析接続とする. 整数 $k > j \geq 0$ に対し,

$$E_{jk}(z) = (k-1)! (2\pi/\sqrt{d_k})^j |\Omega_\infty|^{-2j} K_{k+j}(z, k)$$

とおく. さらに, $E_k(z) = E_{0,k}(z)$ とおく.

$\sigma(z)$ を格子 L に関する Weierstrass σ -関数とし,

$$\theta(z) = \Delta \exp(-6\Delta_2 z^2) \sigma(z)^{12}$$

とおく. ここに, $\Delta_2 = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \sum_{\omega \in L \setminus \{0\}} \omega^{-2} |\omega|^{-2\lambda}$ である.

I を $6p4$ と素な k の整イデアル全体の集合とする. 各 $n \in I$

に対し,

$$\Theta(z, n) = \theta(z)^{Nn} / \theta(\psi(n)z)$$

とおく. $\Theta(z, n)$, $E_k(z)$ に関して, 次の結果が成り立つ.

$$(2.1) \quad \Theta(z, n) \in K(p(z))$$

$k \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus L$ に対し,

$$(2.2) \quad \left(\frac{d}{dz} \right)^k \log \Theta(z+\alpha, n) \Big|_{z=0} = 12(-1)^{k-1} \{ Nn E_k(\alpha) - \psi(n)^k E_k(\psi(n)\alpha) \}.$$

$k > j \geq 0$, $g \in \mathcal{O}$ のとき, $\alpha \in g^{-1}L \setminus L$ に対し,

$$(2.3) \quad E_{j,k}(\alpha) \in K(E_g).$$

$\mathcal{L}$ が f 及び $\mathcal{A}$ -ヘル拡大 $K(E_g)/K$ の導手と素な K の整イデアルのとき,

$$(2.4) \quad E_{j,k}(\Omega_\infty/g)^{(\mathcal{L}, K(E_g)/K)} = E_{j,k}(\psi(\mathcal{L})\Omega_\infty/g).$$

$g = (g)$ が g^* 及び ψ^{k+j} の導手で割り切れるとき,

$$(2.5) \quad E_{j,k}(\psi(\mathcal{L})\Omega_\infty/g) = g^{k+j}/Ng^j (k-1)!(2\pi/\sqrt{d_k})^j \Omega_\infty^{-(k+j)} L_g(\sigma_g, \psi^{k+j}, k),$$

ここに, $\sigma_g = (\mathcal{L}, R(g)/K)$ である.

$\hat{E}$ を E の演算を parameter $t = -2\pi/g$ で展開して得られる形式群とし, $\lambda: \hat{E} \rightarrow G_a$ を E の logarithm とする. $\hat{E}$ から乗法的形式群 G_m への $\mathcal{O}_\infty$ 上の同型 η が存在する ([5]). $i: G_m \rightarrow \hat{E}$ を η の inverse とする.

命題 2.1. $g \in \mathcal{O}$, $(g, \pi^*) = 1$ とすると, 整数 $m \geq 0$ に対し, $\pi^{m+1} E_1(\Omega_\infty/g\pi^{m+1})$ は g -integral になる.

(証明) $\alpha = \Omega_\infty / g \pi^{*m+1}$ とおく. $\Theta(\lambda(t) + \alpha, \alpha)$ の t による巾級数展開は, 各係数が $K(E_\alpha)$ の g -integral な元で, 整級数になり, 定数項は g -unit になる. 従って,

$$d/dz \log \Theta(z + \alpha, \alpha) \Big|_{z=0} = \lambda'(t)^{-1} d/dt \log \Theta(\lambda(t) + \alpha, \alpha) \Big|_{t=0}$$

も g -integral になり, (2.2) により $\pi^{*m+1} E_1(\alpha)$ も g -integral になる.

命題 2.2. $g \in \mathcal{O}$, $(g, \pi^*) = 1$ とする. このとき, 整数 $k > j \geq 0$ に対し, 整数 $\delta(g, k, j) \geq 0$ が存在し, $\forall m \geq 0$ に対し,

$$(2.6) \quad \overline{(g \pi^{*m+1})^j} E_{j,k}(\Omega_\infty / g \pi^{*m+1}) \equiv \overline{(-g \pi^{*m+1})^j} E_k(\Omega_\infty / g \pi^{*m+1}) \pmod{g^{m+1-\delta(g,k,j)} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}}$$

となる.

(証明) $\eta(T) = \Omega_g T + \dots$ とする. $\alpha \in I$ に対し

$$h_\alpha(T) = \lambda'(w)^{-1} d/dw \log \Theta(\lambda(w) + \Omega_\infty / g \pi^{*m+1}, \alpha) \Big|_{w=i(T)} \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}[[T]]$$

とおく. $h_\alpha(T)$ に対応する $\mathbb{Z}_p$ 上の $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}$ -値 measure μ_{h_α} に対し,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Z}_p} x^{k-1} d\mu_{h_\alpha} &= ((1+T) d/dT)^{k-1} h_\alpha(T) \Big|_{T=0} \\ &= \Omega_g^{1-k} \cdot 12(-1)^{k-1} \{ N \alpha E_k(\Omega_\infty / g \pi^{*m+1}) \\ &\quad - \psi(\alpha)^k E_k(\psi(\alpha) \Omega_\infty / g \pi^{*m+1}) \} \end{aligned}$$

が成り立つ. f を f の生成元とし, $\alpha = (1 + bf g \pi^{*m+1})$ とおくことにより, $m \gg 0$ のとき, $p^{m \delta(g, \pi^{*(k-1)})} E_k(\Omega_\infty / g \pi^{*m+1})$ は g -integral になることがわかる.

$k > j \geq 0$, $k > 1$ のとき, $P_{j,k}(x_1, \dots, x_{k+j}) \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{k+j}]$ で,

$\deg P_{jk} \leq j+1$, $\deg_{X_k} P_{jk}(X_1, \dots, X_{k+j}) \leq j-1$, $E_{jk}(z) = (-E_1(z))^j E_k(z) + 2^{-j} P_{jk}(E_1(z), \dots, E_{k+j}(z))$ となるものが存在するから ([4]), (2.6) を満たす $\delta(g, k, j)$ が存在する.

命題 2.3. $g \in \mathcal{O}$, $(g, \pi^*) = 1$ とする. このとき, 極限值

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{g \pi^{*m+1}} E_1(\Omega_\infty / g \pi^{*m+1})$$

が $\mathcal{O}_g$ において存在する. さらにこれは, g には無関係で, $\mathcal{O}_\infty$ に属する.

命題 2.3 は, [6] 定理 4.3 の証明と同様の方針で証明される. [5] 定理 15 の証明も考慮すると, $\eta: \hat{E} \rightarrow G_m$ は, $\Omega_g = \eta'(0) = \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{g \pi^{*m+1}} E_1(\Omega_\infty / g \pi^{*m+1})$ を満たすようにとれることがわかる. 以下, η はこの条件も満たすものとする.

§3. 2変数 p -進 L -関数への応用

整数 $m \geq 0$ に対し, $B_m \subset I$ を $\{(\mathcal{L}, R(fg^{*m+1})/k), \mathcal{L} \in B_m\}$ がちょうど $\text{Gal}(R(fg^{*m+1})/k(E_{\pi^{*m+1}}))$ と一致するようにとる.

$\alpha \in I$ に対し,

$$\Lambda_m(z, \alpha) = \prod_{\mathcal{L} \in B_m} \odot (z + \psi(\mathcal{L}) \Omega_\infty / f \pi^{*m+1}, \alpha)$$

とおく. これは $k(E_{\pi^{*m+1}})$ -係数の $f(z)$ と $f'(z)$ の有理関数になり, B_m のとり方にはよらない. $\Lambda_m(z, \alpha)$ を z の中級数に展開し,

λ を $\pi^{r-(m+1)}\lambda(T)$ で置き換えることにより, $K(E_{\pi^{r+m+1}})$ -係数の T を不定元とする整級数が得られる。これを $C_{m,a}(T)$ と書く。

$C_{m,a}(T)$ の各係数は g -integral, $C_{m,a}(0)$ は g -unit になるから,

$C_{m,a}(T)$ は $(\bigcup_{\infty} [[T]])^{\times}$ に属するとみることが出来る。

$$g_{m,a}(T) = \lambda'(T)^{-1} d/dT \log C_{m,a}(T) \in \bigcup_{\infty} [[T]]$$

と置く。

$a, m, l \in \mathbb{Z}$, $(a, p) = 1$, $m, l \geq 0$, $\sigma \in \text{Gal}(R(\sqrt[m]{g})/K)$, $\mathcal{L} \in I$ のとき, $A(a, m, l, \sigma, \mathcal{L}) \in \bigcup$ を, $A(a, m, l, \sigma, \mathcal{L}) \equiv af \pmod{g^l}$,

$A(a, m, l, \sigma, \mathcal{L}) \equiv \psi(\mathcal{L} \alpha_{\sigma}) \pi^l \pmod{fg^{r+m+1}}$ を満たすようにとる。こ

こに α_{σ} は, $(\alpha_{\sigma}, R(\sqrt[m]{g})/K) = \sigma$ を満たす K の整イデアルである。

$g_{m,a}(T)$ の各係数は, $K(E_{\pi^{r+m+1}})$ に属するから, F を $K(E_{\pi^{r+m+1}})$ を含む K のガロア拡大とするとき, $\tau \in \text{Gal}(F/K)$ に対し, $g_{m,a}^{\tau}(T)$ が自然に定義され, $g_{m,a}^{\tau}(T) \in \bigcup_{\infty} [[T]]$ となる。

以下, 整数 $n \geq 0$ に対し, 1 の原始 p^{n+1} -乗根 $\zeta_{p^{n+1}}$ は,

$$i(\zeta_{p^{n+1}} - 1) = -2p(\zeta_{\infty}/\pi^{n+1})/p'(\zeta_{\infty}/\pi^{n+1})$$

を満たすものとする。(2.2), (2.4), (2.5), 命題 2.2, 2.3 から次の命題が導かれる。

命題 3.1. $a, m, l \in \mathbb{Z}$, $(a, p) = 1$, $m, l \geq 0$, $\sigma \in \text{Gal}(R(\sqrt[m]{g})/K)$ とする。このとき, $\alpha \in I$ 及び整数 $k_1 > -k_2 \geq 0$ に対し,

$$((1+T)d/dT)^{k_1-1} g_{m,a}^{\sigma}(i(\zeta_{p^l}(1+T)-1)) \Big|_{T=0}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv 12(-\Omega_g)^{1-k_1+k_2} f^{k_1} (\psi^{k_1} \bar{\psi}^{k_2}) (g^{\ell}) \bar{\psi}^{k_2}(\alpha_\sigma) (k-1)! \sum_{\mathbf{z} \in B_m} (2\pi/\sqrt{d_k})^{-k_2} \Omega_\infty^{-(k_1-k_2)} \\
&\quad \times \left\{ N\alpha L_{fg^{\ell}g^{r+m+1}}(\sigma_{A(a,m,\ell,\sigma,\mathbf{z})}), \bar{\psi}^{k_1-k_2}, k_1 \right\} \\
&\quad - \psi^{k_1}(\alpha) \bar{\psi}^{k_2}(\alpha) L_{fg^{\ell}g^{r+m+1}}(\sigma_{A(a,m,\ell,\sigma,\mathbf{z})\alpha}, \bar{\psi}^{k_1-k_2}, k_1) \} \bmod g^{m+1-\delta(\ell, k_1-k_2)} \\
&\text{となる.}
\end{aligned}$$

$\kappa: \text{Gal}(K(E_{\pi^\infty})/K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times$ を, $\text{Gal}(K(E_{\pi^\infty})/K)$ の E_{π^∞} への作用を表す指標, $\kappa^*: \text{Gal}(K(E_{\pi^{r+m}})/K) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times$ を, $\text{Gal}(K(E_{\pi^{r+m}})/K)$ の $E_{\pi^{r+m}}$ への作用を表す指標とする. 各 $\sigma \in \text{Gal}(K(E_{\pi^{r+m}})/K)$ に対し, $\kappa^*(\sigma)$ が $\bmod g^{m+1}$ で定まり, 従って, $(1+T)^{\kappa^*(\sigma)}$ が $\bmod ((1+T)^{p^{m+1}}-1)\mathcal{O}_\infty[[T]]$ で定まる. $\mu: I \rightarrow \mathbb{Z}$ を, $\mu(\alpha)=0$ for almost all $\alpha \in I$, $\sum_{\alpha \in I} \mu(\alpha)(N\alpha-1)=0$ を満たす写像とする. μ に対し,

$$g_{m,\mu}(T) = \sum_{\alpha \in I} \mu(\alpha) g_{m,\alpha}(T)$$

とおく. このとき,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{\sigma \in \text{Gal}(K(E_{\pi^{r+m}})/K)} g_{m,\mu}^\sigma(T_1) (1+T_2)^{\kappa^*(\sigma)} \in \mathcal{O}_\infty[[T_1, T_2]]$$

が存在する ([5] 定理 5, 10). この巾級数を $g_\mu(T_1, T_2)$ と書くことにする. さらに,

$$h_\mu(T_1, T_2) = g_\mu(i(T_1), T_2)$$

$$(U_i h_\mu)(T_1, T_2) = h_\mu(T_1, T_2) - 1/p \sum_{j \geq 1} h_\mu(I^j(1+T_1)-1, T_2)$$

とおく. $U_i h_\mu$ は, $\mathbb{Z}_p^2$ 上の $\mathcal{O}_\infty$ -値 measure $\mu_{U_i h_\mu}$ を定義する. ω を Teichmüller character とし, $\alpha \in \mathbb{Z}_p^\times$ に対し, $\langle \alpha \rangle = \omega(\alpha)$ とおく. このとき, 各 $(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ に対し, Γ -変換 $\Gamma_{U_i h_\mu}^{(i_1, i_2)}: \mathbb{Z}_p^2 \rightarrow \mathcal{O}_\infty$

が,

$$\Gamma_{U, h_\mu}^{(i_1, i_2)}(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{Z}_p^\times} \langle \alpha_1 \rangle^{\alpha_1} \langle \alpha_2 \rangle^{\alpha_2} \omega^{i_1}(\alpha_1) \omega^{i_2}(\alpha_2) d\mu_{U, h_\mu}$$

により定義される. さらに, $(U, h_\mu)^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) \in \mathcal{O}_\infty[[T_1, T_2]]$ が存在して,

$$\Gamma_{U, h_\mu}^{(i_1, i_2)}(\alpha_1, \alpha_2) = (U, h_\mu)^{(i_1, i_2)}(u^{\alpha_1}-1, u^{\alpha_2}-1)$$

となる.

$$g_\mu^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) = (U, h_\mu)^{(i_1-1, i_2-1)}(u^{-1}(1+T_1)-1, (1+T_2)^{-1}-1)$$

とおく.

(1.2) を満たす補間級数 $g_4^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2)$ は, $g_\mu(T_1, T_2)$ から容易に構成される([5]).

χ を $\mathbb{Z}_p^\times$ の有限位数の指標とすると, $\chi \circ k$ は $\text{Gal}(K(E_\infty)/K)$ の有限位数の指標となるから, 類体論により, $\chi \circ k$ の kernel の固定体の K 上の導手で割り切れる K の整イデアル $\mathfrak{q}$ に対し, $\chi \circ k$ は, $\text{mod } \mathfrak{q}$ の類指標を定義する. これを $\chi_{\mathfrak{q}}$ と書くことにする. 同様に, $\mathfrak{q}$ が $\chi \circ k^*$ の kernel の固定体の K 上の導手で割り切れるとき, $\chi \circ k^*$ から $\text{mod } \mathfrak{q}$ の類指標が定義される. これを $\chi_{\mathfrak{q}^*}$ と書くことにする.

命題 3.1 と, Γ -変換の性質 ([2], [5]) から, 次の結果が得られる.

定理 3.2. $(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, $k_1 > -k_2 \geq 0$ とする.

ψ, ψ' を $\mathbb{Z}_p$ の第 2 種指標, $\chi = \psi \omega^{i_1 - k_1}$, $\chi' = \psi' \omega^{i_2 - k_2}$ とおく. p^{n_1} , p^{n_2} をそれぞれ χ , χ' の導手とする. このとき,

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad & g_f^{(i_1, i_2)}(\psi(u)u^{k_1-1}, \psi'(u)u^{k_2-1}) \\
 &= (-1)^{i_1+i_2} (-\Omega_g)^{k_2-k_1} (\psi^{k_1} \overline{\psi}^{k_2} \chi'_{g^*})(g^{n_1}) \tau(\chi^{-1}, J_{p^{n_1}})^{-1} (k_1-1)! \\
 &\quad \times (2\pi/\sqrt{d_k})^{-k_2} \Omega_\infty^{-(k_1-k_2)} (1 - (\psi^{k_1-k_2} \chi_g \chi'_{g^*})(g)/N_g^{-k_1+1}) (1 - (\overline{\psi}^{k_1-k_2} \overline{\chi}_g \overline{\chi}'_{g^*})(g^*)/N_{g^*}^{k_1}) \\
 &\quad \times L_{f, g^{n_1} g^{*n_2}}(\overline{\chi}_g \overline{\chi}'_{g^*} \overline{\psi}^{k_1-k_2}, k_1)
 \end{aligned}$$

となる. ここに, $\tau(\chi^{-1}, J_{p^{n_1}})$ は, χ^{-1} と $J_{p^{n_1}}$ に対するガウス和である.

$g^{(i_1, i_2)}(T_1, T_2) \in \mathcal{O}_\infty[[T_1, T_2]]$ を, $k_1 > -k_2 \geq 0$, $(k_1, k_2) \equiv (i_1, i_2) \pmod{p-1}$ のとき,

$$\begin{aligned}
 g^{(i_1, i_2)}(u^{k_1-1}, u^{k_2-1}) &= (k_1-1)! \Omega_g^{k_2-k_1} (1 - \psi(g)^{k_1-k_2}/N_g^{1-k_2}) (1 - \overline{\psi}(g^*)^{k_1-k_2}/N_{g^*}^{k_1}) \\
 &\quad \times (2\pi/\sqrt{d_k})^{-k_2} \Omega_\infty^{-(k_1-k_2)} L(\overline{\psi}^{k_1-k_2}, k_1)
 \end{aligned}$$

となる巾級数とする. このとき, [2] (7.4) により, 次の系が成立する.

系 3.3. 定理 3.2 の仮定の上に, 更に $(k_1, k_2) \equiv (0, 0) \pmod{p-1}$ とする. このとき, $g^{(i_1, i_2)}(\psi(u)u^{k_1-1}, \psi'(u)u^{k_2-1})$ は, (3.1) の右辺で, $L_{f, g^{n_1} g^{*n_2}}(\overline{\chi}_g \overline{\chi}'_{g^*} \overline{\psi}^{k_1-k_2}, k_1)$ を $L(\overline{\chi}_g \overline{\chi}'_{g^*} \overline{\psi}^{k_1-k_2}, k_1)$ におきかえて得られる値に一致する.

K の整イデアル $\mathfrak{q} \neq (1)$ と, $C \in \mathcal{C}(\mathfrak{q})$ に対し, $\varphi_{\mathfrak{q}}(C) \in R(\mathfrak{q})$ を, [3] で定義された ray class invariant とする. $\mathcal{C}(\mathfrak{q})$ の原始指標 χ に対し,

$$S^{(p)}(\chi) = \sum_{C \in \mathcal{C}(\mathfrak{q})} \chi^{-1}(C) \log_p \varphi_{\mathfrak{q}}(C)$$

とおく. ここに, $\log_p$ は $\mathbb{Q}_p^\times$ 上定義された p -進対数である.

$k_{\mathfrak{q}} > 0$ を, $\mathfrak{q} \cap \mathbb{Z}$ の生成元とする. このとき, [2] 定理 5.1 は次のように表される.

定理 3.4. $(i_1, i_2) \in (\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z})^2$ とし, φ, φ' を $\mathbb{Z}_p$ の第 2 種指標, p^{n_1}, p^{n_2} をそれぞれ, $\varphi \omega^{i_1}, \varphi' \omega^{i_2}$ の導手とする. $n_1' = \max\{n_1, 1\}$

とおく. さらに, $(\varphi \omega^{i_1})_g (\varphi' \omega^{i_2})_{g^*} \neq 1$ と仮定する. このとき,

$$S^{(i_1, i_2)}(\varphi(u)-1, \varphi'(u)-1) = \frac{(-1)^{1+i_1-i_2} (\varphi' \omega^{i_2})_{g^*} (g^{n_1'})}{12 k_f(i_1, i_2) g^{n_1} g^{n_2} \tau(\varphi' \omega^{-i_2}, J_{p^{n_1}})} \cdot \left(1 - \frac{((\varphi \omega^{i_1})_g (\varphi' \omega^{i_2})_{g^*}) (g)}{p} \right)$$

$$\times \left(1 - ((\varphi \omega^{i_1})_g (\varphi' \omega^{i_2})_{g^*}) (g^*) \right) S^{(p)}((\varphi \omega^{i_1})_g (\varphi' \omega^{i_2})_{g^*})$$

となる.

参考文献

- [1] C. Goldstein, Courbes elliptiques et theorie d'Iwasawa, Pub. Math. D'orsay, 82-01
- [2] K. Kozuka, Elliptic units and two variable p -adic L -functions, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 40 (1986), 77-90.

- [3] G. Robert, Unités elliptiques, Bull. Soc. Math. France Mémoire, 36 (1973).
- [4] A. Weil, Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker, Berlin-Heidelberg-New York, Springer 1976.
- [5] R. Yager, On two variable p -adic L -functions, Ann. of Math., 115 (1982), 411-449.
- [6] R. Yager, p -adic measures on Galois groups. Invent. Math 76 (1984), 331-343.