

流出モデル定数の最適化手法

永井 明博・角 屋 睦

OPTIMIZATION TECHNIQUES FOR PARAMETER IDENTIFICATION OF RUNOFF MODELS

By Akihiro NAGAI and Mutsumi KADOYA

Synopsis

Several optimization techniques are examined experimentally for finding what technique can be utilized as a powerful tool for the parameter identification of three typical runoff models such as the series tanks model, the storage function model and the kinematic surface runoff model. The techniques examined here are as follows: The conjugate direction method proposed by Powell named here the Powell method for short. The conjugate gradient method developed by Davidson, Fletcher and Powell called as the DFP method. The QG method combined the techniques of quasi-linearization and golden section.

It is pointed out that the standardization of variables is very useful in applying the Powell and the DFP methods for the identification of a set of model parameters different in order. A technique for standardizing variables by a set of initial values is proposed and named as the SP and SD methods, respectively.

It is shown that both SP and SD methods are excellent for the optimal identification of the series tanks model with sixteen unknown parameters, and that both SP and Powell methods are very useful for finding optimal parameters of the storage function model with three unknown parameters and also of the kinematic surface runoff model with two unknown parameters.

Moreover, a simple method is proposed for estimating the lag time in the storage function, and the interrelation between the storage function and the kinematic surface runoff models is suggested based on the identified parameters.

1. ま え が き

これまで流出解析のためにいくつかの数値モデルが提案され実用に供されてきた。しかしこれらのモデル定数は、大なり小なり試行錯誤的検討を経て主観的に定められることが多く、決定的な方法論はなお確立されていない。流出解析が単一の目的で行われる場合にはそれでもさほど問題はないが、数少ないデータを有効に活用して普遍的なモデルを決定したい場合、流域の土地利用状態の変化を流出モデルに反映したい場合、あるいは流出モデル相互の関連を明確にしたい場合などには、従来のやり方では十分対処できない。

本文は、流出モデルの総合化を図るための基礎研究として行った数学的最適化手法の検討結果をまとめたものである。すなわち数学的最適化手法にはいくつかの方法があるが、流出モデルを対象とした場合どのような方法が利用できるか、効率がよいかについてはわかっていない。ここでは流出モデルとして現今主用されているタンクモデル、貯留関数法、表面流モデルをとりあげ、利用可能と思われる数種の最適化手法を適用してモデル定数最適値の探索を数値実験的に試み、興味ある有用な知見を得ることができたので、その概要を報告する。

2. 流 出 モ デ ル

流出解析法としてこれまで各種の方法が提案されているが、土地利用形態の変化に伴う流出特性の変化を

表現できる可能性があるのは、貯留法、雨水流法などの process モデルに限られる。ここではこれらの代表的なモデルと目されるタンクモデル、貯留関数法および表面流モデルを検討の対象とする。

2. 1 タンクモデル

これは Fig. 1 にみられるような直列多段モデルで、3 ないし 4 段モデルが実用に供されることが多い。これは出水解析にも長期間流出解析にも応用できる利点を持っている。出水解析モデルとして用いた場合、process モデルとみなしうるかどうかは議論のあるところであるが、分布型モデルとして用いる可能性も十分あると考えられよう。

さてこのモデルの最大の難点はモデル定数が多く、その同定が容易でないことである。考え方によれば数学的最適化手法が最大の効果を発揮しうるモデルともみることができる。事実小林ら¹⁾は、Fig. 1 に示す 4 段モデルの 16 個のモデル定数を、Powell の共役方向法を用いて同定し、好結果の得られることを示している。一方菅原ら^{2,3)}は独特の最適化手法を提示しているが、これは初期水深、流出孔高および第 4 段流出定数 a_5 を既知と仮定して、未知定数を比較的的同定しやすい 1, 2, 3 段の流出孔および浸透孔の係数の合計 7 個にしる特殊な方法である。

本研究では長期間流出を対象として一般的な形での同定法を攻究する。

2. 2 貯留関数法

このモデルの基礎式は次式で与えられる⁴⁾。

$$S_t = KQ_t^P \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{dS_t}{dt} = r_e - Q_t \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 r_e ：有効降雨強度、 $Q_t(t) = Q_0(t + T_l)$ ：遅れ時間 T_l を考慮した直接流出高で、Fig. 2 のように観測値 $Q_0(t)$ を左へ T_l だけ平行移動した流量波形。 S_t ：見かけの流域貯留高で $\int_0^t (r_e - Q_t) dt$ より求まる。 t ：時間、 K, P ：定数。

実用解析では流入係数 f を降雨強度 r に乗じて $r_e = f \cdot r$ と表現すること多いが、ここでは有効降雨強度の推定は流出モデルとは別途の問題として上記の表現をとることとする。

貯留関数と類似の Prasad モデルについて、Labadie と Dracup⁵⁾ は準線形化法、日野⁶⁾ は DP による同定を試みているが、いずれも指数 P の最適化は行っていない。その後 Tuffer と Labadie⁷⁾ は最大傾斜法により P も最適化する手法を示している。

貯留関数そのものに最適化を行った例はほとんどみられず、以前われわれ⁸⁾ は Powell の共役方向法を用いて最適定数を探索したが、 $T_l = 0$ とした特殊なものであった。本文では、 K, P および T_l の 3 定数の探索を試みる。

計算は (1), (2) 式から得られる次式を Runge-Kutta 法で解いていくことにする。

$$\frac{dQ_t}{dt} = \frac{1}{KP} (r_e - Q_t) Q_t^{1-P}, \quad Q_t(0) = \varepsilon_q \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 ε_q ：直接流出高の初期値。

最適化手法として Powell 法や DFP 法を適用するときには、 $Q_t(t)$ を右の方に T_l だけずらせて $Q(t)$ とし、 dt ごとの値には $Q(t)$ の線形補間値を用いる。また準線形化と黄金分割の組み合わせ法を適用するときには、計算の都合上有効降雨波形を右に T_l だけずらせて dt ごとの計算流量を求めることとする。なお

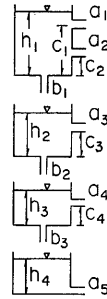


Fig. 1. Unknown parameters of the series tanks model.

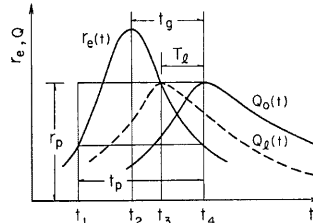


Fig. 2. A definition of the lag time, T_l , in the storage function model.

(3) 式において、本来は $\varepsilon q = 0$ とすべきであるが、Runge-Kutta 法を用いる都合上、十分小さな初期流量 ($\varepsilon q = 10^{-6}$ mm/hr) を想定することとする。

2. 3 表面流モデル

基礎式は次式である。

$$\left. \begin{aligned} \text{斜面流: } h &= k_s q^{p_s}, & \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial y} &= r_e \\ \text{河道流: } W &= k_c Q^{p_c}, & \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial y} &= q_r \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 h : 水深、 q : 斜面単位幅流量、 r_e : 有効降雨強度、 W : 河道流積、 Q : 流量、 q_r : 河道単位長当り横流入量、 k_s , p_s : 斜面流定数、 k_c , p_c : 河道流定数、 t : 時間、 y : 距離。

このモデルの河道流定数 k_c , p_c は、径深 R と流積 W の間に

$$R = k_1 W^m \quad \dots\dots\dots (5)$$

なる関係があるとき、次式で与えられる。

$$k_c = \left(\frac{n_M}{k_1^{2/3} I_c^{1/2}} \right)^{p_c}, \quad p_c = \frac{3}{3+2m} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 n_M : Manning の粗度係数、 I_c : 河道勾配。

すなわち河道流定数は、河道の縦横断面形状や河床材料から容易に推定できかつ多少の変動があってもハイドログラフに大きな影響を与えないから、同定すべき未知のパラメータは斜面流定数 k_s , p_s のみとする。なおこの斜面流定数は、斜面上の雨水の流れに Manning 型抵抗則を想定すると、次のように表現される。

$$k_s = \left(\frac{N}{\sqrt{I_s}} \right)^{p_s}, \quad p_s = 0.6 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 I_s : 斜面勾配、 N : 等価粗度。

これまで雨水流モデルの最適値の吟味例はあまりみられず、角屋ら⁹⁾ が $p_s = 0.6$ あるいは 1 と仮定して他の斜面流定数の最適値を探索した例が見られる程度である。本来このモデルを物理的モデルと考えると、同定すべきモデル定数は、 k_s または N のみということになるが、近年貯留関数法との関連から抵抗則に関与する p_s そのものも未知とすべきとする考え方もある。

そこで本文では、 N および p_s の 2 定数の最適値探索法を攻究することとする。なお流出計算は周知の特性曲線法を利用する。

3. 最適化手法

前述した流出モデル定数の最適値を探索するための目的関数として次式を用いることにする。

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{M} \sum \frac{(Q_0 - Q_c)^2}{Q_0} \rightarrow \min \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 J : 目的関数、 Q_0 : 実測流量、 Q_c : 計算流量、 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$: 同定すべき n 個の流出モデル定数に対応する変数、 M : データ数。

流出モデル定数 $\mathbf{x}$ を同定するための最適化手法としては、非線形計画法あるいは最適制御の分野において、いくつかのすぐれた方法が開発されているが、本文では、黄金分割法、Powell の共役方向法、DFP 法および準線形化と黄金分割の組み合わせ法（以下 QG 法と略称）の 4 種の最適化手法を採用することにする。

3. 1 黄金分割法

黄金分割法は 1 変数あるいはある方向の直線上での関数の極小点を探索する方法である。各反復ごとに極小点を含む区間幅を一定比率 $\tau = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.618$ で減少させていく点が特徴で、5 回および 10 回の反復によって極小点を含む元の区間をそれぞれ 10% ($\tau^5 \approx 0.09$) あるいは 1% ($\tau^{10} \approx 0.008$) 以内に縮小できる。

黄金分割法のアルゴリズムは次のようにきわめて簡単である。

(i) 出発点から一定の増分ごとに目的関数 $J(\mathbf{x})$ を評価し, Fig. 3 のように最小点を (a^0, b^0) 内に囲い込む。ここに上側添字は反復回数 k であり, 最初は 0 とおく。

(ii) $x_a^0 = a^0 + (1-\tau)(b^0 - a^0)$, $x_b^0 = b^0 - (1-\tau)(b^0 - a^0)$ とする。

(iii) $|a^k - b^k| \leq \varepsilon$ なら収束したものとみなす。その他のときは (iv) または (v) へいく。ここに, ε は収束基準である。

(iv) $J(x_a^k) > J(x_b^k)$ のとき

$$\begin{aligned} a^{k+1} &= a^k, & b^{k+1} &= x_b^k, & x_a^{k+1} &= x_a^k \\ x_b^{k+1} &= a^{k+1} + (1-\tau)(b^{k+1} - a^{k+1}) \end{aligned}$$

とおいて, 目的関数 $J(x_a^{k+1})$ を求め, $k=k+1$ として (iii) へいく。

(v) $J(x_b^k) \leq J(x_a^k)$ のとき

$$\begin{aligned} a^{k+1} &= x_b^k, & b^{k+1} &= b^k, & x_b^{k+1} &= x_b^k \\ x_a^{k+1} &= b^{k+1} - (1-\tau)(b^{k+1} - a^{k+1}) \end{aligned}$$

とおいて $J(x_b^{k+1})$ を求め, $k=k+1$ として (iii) へいく。

3. 2 Powell の共役方向法

この方法は目的関数の微係数 $\partial J / \partial x_i$ を必要とせず, 変数 $\mathbf{x}$ に制約条件がない場合のすぐれた最適化手法として知られている。

一般に目的関数は最適値 $\mathbf{x}_{opt}$ の近傍において, 次の正值 2 次形式で近似できると考えてよい。

$$J(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{b}^T \mathbf{x} + c \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに, J : 目的関数, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$: n 個の流出モデル定数, $\mathbf{G}$: 正値行列 ($n \times n$), $\mathbf{b}$: 定数ベクトル (n 次元), c : 定数 (スカラー)。

(9) 式の正值 2 次形式では, n 個の共役方向に沿って順次降下を行えば最適値 $\mathbf{x}_{opt}$ を得ることができる。いま $n=2$ の場合について具体的に述べると次のようである。すなわちこの場合 (9) 式の $J=J_1$ は, Fig. 4 に示すように, ある一つの楕円面に対応するが, 点 B_1 における接線方向 $\overrightarrow{A_1 B_1}$ と, 中心(最適値) $\mathbf{x}_{opt}$ と B_1 を結ぶ方向 $\overrightarrow{B_1 B'_1}$ とは互いに共役な関係にある。同図中に点 B_1 での最大傾斜方向 $-\mathbf{g} = -[\partial J / \partial x_1, \partial J / \partial x_2]^T$ を併示しているが, これよりは共役な方向に進んでいく方が効果的なことが理解されよう。

Powell 法では Fig. 4 の異なる 2 点 A_1, A'_1 から同じ方向 $\overrightarrow{A_1 B_1}$ ($\overrightarrow{A_1 B_1} // \overrightarrow{A'_1 B'_1}$) に正值 2 次形式の最小点 B_1, B'_1 を求めると, $\overrightarrow{B_1 B'_1}$ は $\overrightarrow{A_1 B_1}$ と共役であるという性質を利用する。すなわち各回の反復で $\overrightarrow{B_1 B'_1}$ に相当する新しい共役方向を採用することにより, 順次共役方向の集合を作っていく最小点を探索する手法であり, k を反復回数とすると具体的な計算手順は次のようになる¹⁰⁾。

(i) $k=0$ とし出発点 $\mathbf{x}^0$, 探索方向 $\mathbf{t}_i$ ($i=1, \dots, n$) を与える。最初 $\mathbf{t}_i$ は各座標軸 x_i に平行な単位ベクトルを用いる。

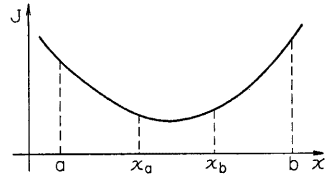


Fig. 3. An example of the minimum along a line.

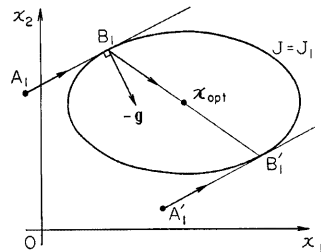


Fig. 4. An example of conjugate directions in two dimensional space.

(ii) 点 $\mathbf{x}^{i-1}$ から $\mathbf{t}_i$ 方向に進んでいって、 $J(\mathbf{x}^{i-1} + \lambda \mathbf{t}_i)$ が最小となるような λ を求め、 $\mathbf{x}^i = \mathbf{x}^{i-1} + \lambda \mathbf{t}_i$ を再び出発点として、 $i=1, 2, \dots, n$ まで繰り返す。

(iii) $\{J(\mathbf{x}^{m-1}) - J(\mathbf{x}^m)\}$ が最大となるような整数 m ($1 \leq m \leq n$) を見つけ、 $d = J(\mathbf{x}^{m-1}) - J(\mathbf{x}^m)$ とおく。

(iv) $J_3 = J(2\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^0)$ を求め、 $J_1 = J(\mathbf{x}^0)$ 、 $J_2 = J(\mathbf{x}^n)$ とする。

(v) $J_3 \geq J_1$ あるいは $(J_1 - 2J_2 + J_3)(J_1 - J_2 - d)^2 \geq d(J_1 - J_3)^2/2$ のどちらかが満たされれば、次の反復で古い方向 $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_n$ を用い、 $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^n$ とおく。そうでないならば (vi) に移る。

(vi) $\mathbf{t} = (\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^0)$ として、 $J(\mathbf{x}^n + \lambda \mathbf{t})$ が最小となるような λ を求め、次の反復では、新しい方向として $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \dots, \mathbf{t}_{m-1}, \mathbf{t}_{m+1}, \dots, \mathbf{t}_n, \mathbf{t}$ 、新しい出発点として $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}^n + \lambda \mathbf{t}$ を用い、 $k=k+1$ として (ii) へいく。

(ii) あるいは (vi) で λ は直線上の極小化法によって求めるが、Powell 法では Fig. 3 の x 軸上の 3 点の目的関数値に放物線をあてはめ、 $\mathbf{t}_i$ 方向上で極小点を探索している。(vi) で上述の $\overrightarrow{B_1B_1'}$ に相当する新しい共役方向 $\mathbf{t}$ を採用しているわけであるが、この方向を常に採用するものとする、 $\mathbf{t}_i$ と従属な方向が選択される可能性がある。その点 Powell 法では、(v) の基準を設けて、各反復で作られた方向が有効であるかどうかを判断している。

3.3 DFP 法

この方法は Powell 法と同じく $\mathbf{x}$ に制約条件のない場合の有力な最適化手法であるが、目的関数の微係数 $\partial J / \partial \mathbf{x}_i$ を必要とする点が異なっている。

目的関数が (9) 式で表わされる時、Newton-Raphson 法を用いる場合の探索方向は次式である。

$$\mathbf{t}^k = -\mathbf{G}^{-1} \mathbf{g}^k \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 $\mathbf{t}$: 探索方向、 k : 反復回数、 $\mathbf{g} = [\partial J / \partial x_1, \dots, \partial J / \partial x_n]^T$: 勾配ベクトル。

これに対し DFP (Davidon-Fletcher-Powell) 法では、 k 回目の探索方向として次式を採用している。

$$\mathbf{t}^k = -\mathbf{H}^k \mathbf{g}^k \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $\mathbf{H}^k$: k の増加に伴い逆行行列 $\mathbf{G}^{-1}$ に収束するような正値行列。すなわち Fig. 4 の最大斜傾方向 $-\mathbf{g}^k$ を $\mathbf{H}^k$ で修正して新しい方向 $\mathbf{t}^k$ を作り出していることがわかる。さらに探索方向 $\mathbf{t}^j$ ($j < k$) と $\mathbf{t}^k$ が $\mathbf{G}$ に関して互いに共役になることも証明される¹¹⁾が、具体的な計算手順は次のようである。

(i) $k=0$ とし出発点 $\mathbf{x}^0$ 、その点の勾配 $\mathbf{g}^0$ を求め、 $\mathbf{H}^0$ を単位マトリクスとする。すなわち最初の反復は最大傾斜法と同じになる。

(ii) $\mathbf{t}^k = -\mathbf{H}^k \mathbf{g}^k$ を求める。

(iii) $\mathbf{x}^k$ から出発して $\mathbf{t}^k$ 方向の極小点を求める。すなわち $J(\mathbf{x}^k + \lambda \mathbf{t}^k)$ が最小となる λ を求める。

(iv) $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \lambda \mathbf{t}^k$ とし、 $J(\mathbf{x}^{k+1})$ とその点の勾配 $\mathbf{g}^{k+1}$ を求める。

(v) $\mathbf{H}^{k+1} = \mathbf{H}^k + d\mathbf{H}^k$ を求める。ここに、

$$d\mathbf{H}^k = \frac{d\mathbf{x}^k (d\mathbf{x}^k)^T}{(d\mathbf{x}^k)^T d\mathbf{g}^k} - \frac{\{\mathbf{H}^k d\mathbf{g}^k\} \{(\mathbf{H}^k d\mathbf{g}^k)^T \mathbf{H}^k\}}{(\mathbf{H}^k d\mathbf{g}^k)^T \mathbf{H}^k d\mathbf{g}^k}, \quad d\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \quad d\mathbf{g}^k = \mathbf{g}^{k+1} - \mathbf{g}^k.$$

$k=k+1$ として (ii) へいく。

(iii) の λ は直線上の極小化法によって求められるが、DFP 法では Fig. 3 の x 軸上の 2 点の関数値と勾配を用いて、3 次曲線をあてはめ $\mathbf{t}^k$ 方向の極小点を求めている。

また目的関数の微係数が求めにくい場合には、 x_i の増分 Δx_i を用いて次の中央差分で近似できる。

$$\frac{\partial J(\mathbf{x})}{\partial x_i} \approx \frac{J(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - J(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}{2 \cdot \Delta x_i} \quad \dots\dots\dots (12)$$

この場合、目的関数は余分に $2n$ 回計算しなければならない。

3.4 QG 法

これは準線形化 (QL) 法と黄金分割 (GS) 法の組み合わせ法である。後者については 3.1 で述べたから、ここでは準線形化法と組み合わせ法について述べる。

(1) 準線形化法

この方法は、これまでの数値計画手法とは異なり、非線形常微分方程式の2点境界値問題を線形常微分方程式の初期値問題に直し¹²⁾、線形微分方程式の解の重ね合わせの性質を用いて、モデル定数を推定する方法である。

実際には貯留関数の定数 K だけを準線形化法により同定しているの、以下ではこの場合について具体的に話を進める。

基礎式は次の連立方程式となる。

$$\frac{dQ_c}{dt} = \frac{1}{KP}(r_e - Q_c)Q_c^{1-P}, \quad Q_c(0) = \varepsilon q \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$\frac{d}{dt}(1/K) = 0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

ここに、 Q_c : 直接流出計算値、 r_e : 有効降雨強度、 K, P : 定数、 εq : 直接流出高の初期値。

⑬式の変数を Q_c, K のみとみなして、古い値を Q_c, K 、新しい値を Q'_c, K' として Taylor 展開を行い、高次の項を無視すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{dQ'_c}{dt} &\approx f(Q_c, K) + (Q'_c - Q_c) \frac{\partial f}{\partial Q_c} + \left(\frac{1}{K'} - \frac{1}{K}\right) \frac{\partial f}{\partial (1/K)} \\ &= G(Q'_c - Q_c) + \frac{1}{K'} \frac{r_e - Q_c}{P} Q_c^{1-P} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(15)$$

ここに、 $G = \frac{1-P}{KP}(r_e - Q_c)Q_c^{-P} - \frac{1}{KP}Q_c^{1-P}$

上式は Q'_c, K' に関して線形常微分方程式であり、一般解は次のようになる。

$$Q'_c = Z_1 + \frac{1}{K'} Z_2 \quad \dots\dots\dots(16)$$

Z_1 および Z_2 は次式より求められる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dZ_1}{dt} &= G(Z_1 - Q_c), & Z_1(0) &= \varepsilon q \\ \frac{dZ_2}{dt} &= GZ_2 + \frac{1}{P}(r_e - Q_c)Q_c^{1-P}, & Z_2(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(17)$$

⑭式の直接流出高 Q'_c に地下水流出高 Q_g を加えて計算流出高とし、これを目的関数(8)式に代入して、 $\partial J / \partial (1/K) = 0$ より新しい定数を次式から推定する。

$$\frac{1}{K'} = \frac{\sum Q_0^{-1} Z_2 (Q_0 - Q_g - Z_1) / \sum Q_0^{-1} Z_1^2}{\dots\dots\dots(18)}$$

(2) QG法

この方法の計算手順は非常に簡単であって次のようである (Fig. 5)。

- (i) T_b, P, K に初期値を与える。
- (ii) T_l を黄金分割法により探索する。
- (iii) T_l を固定し、 P を黄金分割法により探索する。
- (iv) T_b, P を固定し、 K を準線形化法で同定する。
- (v) P が収束したならば(vi)へ、そうでないならば(iii)へいく。
- (vi) T_l が収束したならば計算終了、そうでないならば(ii)へいく。

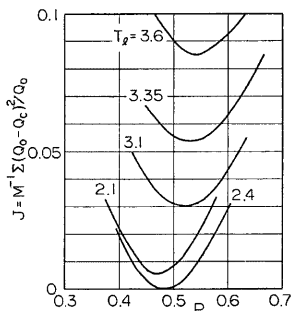


Fig. 5. Graphical illustration of the QG method.

4. 定 式 化

4. 1 タンクモデル

16個の未知モデル定数の最適値を探索するには Powell 法, DFP 法, およびこれらの手法に対して後述の基準化を行った S P 法, S D 法を用いる。他の最適化手法の適用も試みるのが望ましいが, 黄金分割法は 1 変数の場合の手法であるため効率がよいとは思われないし, 準線形化法ではすべての未知定数について初期値を適切に推定しないと解が収束しないため, これらの手法は用いないことにする。

前述の最適化手法によってモデル定数の最適値を探索する場合, 原理的には各定数を直接変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ として計算を行えばよいが, 探索すべきモデル定数のオーダーが極端に異なる場合には必ずしも計算が効率よく実行されず, あるいは収束解が得られない場合もある。このような障害はとくにタンクモデルでは顕著に現われやすい。すなわちタンクモデルの場合, 4 段目の初期水深 h_4 は一般に 10^2 のオーダー, 一方 4 段目の流出定数 a_5 は 10^{-3} のオーダーであって, その間に 10^5 のオーダーの開きがある。このように値の大きく異なるモデル定数を直接扱うと, 定数の存在範囲は非常に細長くなって, 目的関数の応答面形状が極端に偏平となり, 最適値の探索が効率よく行えなくなる。このような障害を改善する一つの方法は, たとえば h_4 に相当する x 軸を縮小, a_5 に相当する x 軸を拡大して, 応答面を円に近い形状に変換することである。この際どの程度の尺度変換が適切かは不明であるが, われわれが同定の対象とするモデル定数として最初に仮定する初期値は, 少なくともオーダーとしては正しいと考えてよいであろうから, われわれは次の規準化方式を提案する。

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{a_1}{a_1^0}, \quad x_2 = \frac{c_1}{c_1^0}, \quad x_3 = \frac{a_2}{a_2^0}, \quad x_4 = \frac{c_2}{c_2^0}, \quad x_5 = \frac{b_1}{b_1^0}, \quad x_6 = \frac{h_1}{h_1^0} \\ x_7 &= \frac{a_3}{a_3^0}, \quad x_8 = \frac{c_3}{c_3^0}, \quad x_9 = \frac{b_2}{b_2^0}, \quad x_{10} = \frac{h_2}{h_2^0} \\ x_{11} &= \frac{a_4}{a_4^0}, \quad x_{12} = \frac{c_4}{c_4^0}, \quad x_{13} = \frac{b_3}{b_3^0}, \quad x_{14} = \frac{h_3}{h_3^0}, \quad x_{15} = \frac{a_5}{a_5^0}, \quad x_{16} = \frac{h_4}{h_4^0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

ここに, x_i : 規準化されたモデル定数 ($i=1, \dots, 16$), a_i, b_i, c_i : タンクモデル定数 (Fig. 1), h_i : i 段目の初期水深。上側添字 0 は初期値を表わす。

すなわち規準化方式は, 最初 $x_i = 1$ ($i=1, \dots, 16$) から出発して, 目的関数が最小となるように初期値に対する比率を探索する方式である。これに対し最適化手法を直接適用する従来の方式は, 上式の実分母をすべて 1 としたことと相当する。⑨ 式はスケールリングあるいは尺度変換と呼ばれる方式であるが, 本文では初期値に対してスケールの変更を行っていることから規準化 (Standardization) と呼ぶことにする。また規準化を行った Powell 法を S P 法 (Standardized or Scaled Powell Method), 同じく DFP 法を S D 法 (Standardized or Scaled DFP Method) と仮称する。

またモデル定数は, 次の制約条件を満たす必要がある。

$$\left. \begin{aligned} x_i &\geq 0, \quad i=1, \dots, 16 \\ c_1 - c_2 &> 0 \\ a_1 + a_2 + b_1 &\leq 1, \quad a_3 + b_2 \leq 1, \quad a_4 + b_3 \leq 1, \quad a_5 \leq 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

規準化の有無にかかわらず Powell 法および DFP 法は $\mathbf{x}$ に制約条件のない場合の最適化手法であるため, 次のペナルティ関数¹⁾を用いることにする。たとえば $c_1 - c_2 > 0$ の条件については次のようにする。

$$J_F = \begin{cases} 0 & \text{for } c_1 - c_2 > 0 \\ (c_2 - c_1 + 0.01) \times 10^6 & \text{for } c_1 - c_2 \leq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (21)$$

他の制約条件も同様に処理できて, 目的関数は次のように改められる。

$$J(\mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^m \frac{(Q_0 - Q_i)^2}{Q_0}, & \text{when constraints are satisfied} \\ \sum_{i=1}^m J_{P,i}, & \text{when constraints are not satisfied} \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots(22)$$

ここに、 J : 目的関数、 $\mathbf{x}$: モデル定数、 Q_0 : 実測流出高、 Q_i : 計算流出高、 M : データ数、 J_P : ペナルティ関数、 m : ②式を満足しない条件数。

なお SD 法および DFP 法では目的関数の微係数 $\partial J / \partial x_i$ ($i=1, \dots, 16$) を ⑫ 式で近似し、モデル定数の増分 Δx_i は x_i の 1% を用い、他の流出モデルの場合も同様とする。

4. 2 貯留関数法

準線形化法を用いて、 K , P , T_i の同定問題を前もって検討したところ、 P , T_i を既知として K だけなら同定可能であるが、 T_i を既知とした場合の K , P の同定、あるいは K , T_i を既知とした場合の P だけの同定は困難なこと、 T_i については ⑩ 式に相当する一般解の解析的表現ができないことがわかった。このことを考慮して 3.4 では K を準線形化法、 P , T_i を黄金分割法で同定する QG 法を提示したのであった。そこでモデル定数 K , P , T_i の最適値の探索には、SP 法、SD 法、Powell 法、DFP 法および QG 法を用いることにする。

SP 法と SD 法では変数 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ を次のような基準化変数とする。

$$x_1 = \frac{K}{K_0}, \quad x_2 = \frac{P}{P_0}, \quad x_3 = \frac{T_i}{T_0} \quad \dots\dots\dots(23)$$

制約条件は $K > 0$, $P > 0$ の他に次の計算上の安定条件を考える必要がある。

$$\tau \leq 2KQP_{\max}^{P-1}, \quad \tau \leq KQP_{\max}^{P-1} \quad \dots\dots\dots(24)$$

ここに、 $Q_{\max}$: 実測ピーク流量、 τ : 計算上の時間きざみ。

これらの制約条件についてはペナルティ関数で処理することとする。この他にも遅れ時間についても $T_i \geq 0$ の条件が必要であるが、これを上述のようなペナルティ関数で扱えば、 $T_i = 0$ の場合には最適値の探索が困難になることが予想される。そこで次式の T_i' を遅れ時間に用いる。

$$T_i' = \begin{cases} T_i & \text{for } T_i \geq 0 \\ -T_i + 2t_g & \text{for } T_i < 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots(25)$$

ここに、 t_g : 雨量ピークと実測流量ピークとの時間差 (Fig. 2)。

次に QG 法の場合には、 P と T_i に関しては上述の扱いをするが、 K および安定条件については考慮しない。なおこの方法では一変数ずつ最適値を探索するため基準化の必要はない。

4. 3 表面流モデル

等価粗度 N の最適値の探索には黄金分割法、Powell 法および DFP 法を、 N と p_s を同時に同定する場合には SP 法、SD 法、Powell 法および DFP 法を用いる。また準線形化法の適用も考えられるが、その際には斜面流、河道流に関する偏微分方程式を、距離について離散化して常微分方程式に直す必要があるなど取り扱いが煩雑になることが予想されるので、表面流モデル定数の最適値の探索には準線形化法は用いないことにする。

SP 法と SD 法では変数 $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$ を次のような基準化変数とする。

$$x_1 = \frac{N}{N_0}, \quad x_2 = \frac{p_s}{p_s^0} \quad \dots\dots\dots(26)$$

なお、 $N > 0$, $p_s > 0$ の制約条件については、上述のペナルティ関数で処理することにする。

5. 最適モデル定数の探索

5. 1 タンクモデル

最適モデル定数の探索に利用できる実測ハイドログラフとして Fig. 6 を想定する。このハイドログラフは

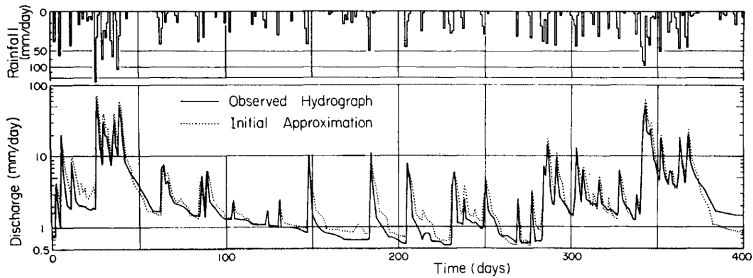


Fig. 6. Hydrographs used for parameters identification of the series tanks model.

Fig. 7 のタンクモデル (mm-day 単位) を用いた計算値である。この計算には、日雨量は京都西南部大枝での実測値を、無降雨日の蒸発散量は 2.5 mm/day の一定値を用いた。**Fig. 7** において、水面上の値は初期水深を、カッコ内の数値は流出孔高であり底からの値を表わしている。ここでは、前述の最適化手法によって、どの程度真の構造に近いものが探索されるかを問題とする。

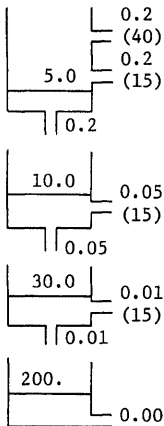


Fig. 7

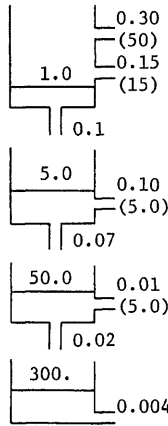


Fig. 8

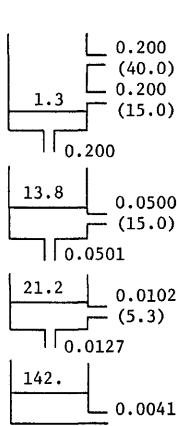


Fig. 9(a)

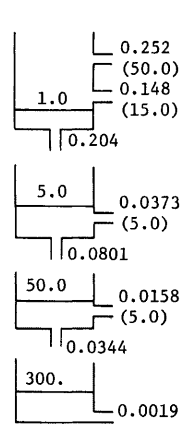


Fig. 9(b)

Fig. 7. True parameters of the series tanks model.

Fig. 8. Initial approximations of the series tanks model parameters.

Fig. 9. Parameters of the series tanks model estimated by (a) the SD and (b) DFP methods under a given computation time ($M=200$ days).

最初はデータ数 $M=200$ 日として、規準化により収束性がどの程度改善されるか検討した。**Fig. 8** のモデル定数を初期値として、同一計算時間に対する SD 法、DFP 法による探索結果をそれぞれ **Fig. 9(a), (b)** に例示する。下段になるほど真値からのずれは大きくなるが、それでも基準化の効果は歴然としている。**Fig. 10** は各方法の収束状況を示している。目的関数としては (8) 式を用いているが、同図では理解しやすいように誤差は相対誤差で表示してある。同図において同一計算時間に対する相対誤差を対比すると、SD 法は DFP 法よりも 2 オーダ、SP 法は Powell 法より 1 オーダ減少しており、規準化の効果が非常に大きいこ

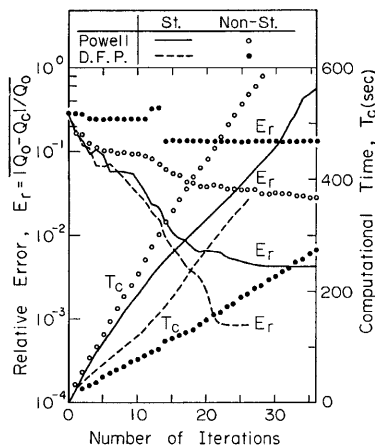


Fig. 10

Fig. 10. Identification processes of parameters of the series tanks model ($M=200$ days).

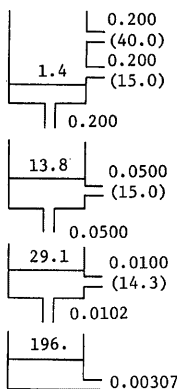


Fig. 11

Fig. 11. Parameters of the series tanks model estimated by the SD method ($M=400$ days).

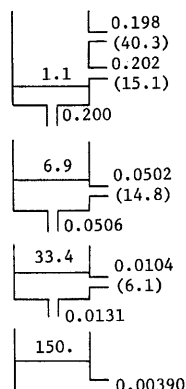


Fig. 12

Fig. 12. Parameters of the series tanks model estimated by the SD method under the same computation time as Fig. 9(a) ($M=400$ days).

とを示している。この効果は別途検討していくつかの例でも明白であった。

いま一度 **Fig. 9(a)** のモデル定数をみると、1, 2 段の流出孔の係数と、その高さ、および浸透孔の係数はほとんど真値に等しいが、初期水深、3, 4 段の定数は真値とは若干異なっている。これはデータ数が 200 日では短かすぎるためと考え、期間を 400 日に延長し上例と同じく **Fig. 8** のモデル定数を初期値として、基準化方式による探索を試みて **Fig. 11** のモデル定数を得た。3, 4 段の定数はかなり真値に近づいており同定期間を長くすると真値に収束すると期待できそうである。この場合の収束状況は **Fig. 10** に比べて同一反復回数に対する計算時間はほぼ 2 倍となっているが、相対誤差の減少傾向はほとんど同一である。なお参考のため、 $M=400$ 日のデータを用いて **Fig. 9(a)** と同一計算時間で推定されたモデル定数を **Fig. 12** に示すが、反復回数がほぼ半減しているためあって、**Fig. 9(a)** に比べて真値からのズレは大きく、再現性もよくない。モデル定数を探索するための適当なデータ期間長については、今後なお検討の必要がありそうである。

上述の例では、いずれも最適値は得られておらず、タンクモデル定数の探索は非常にむづかしいようである。しかしながら実用上は計算値が、ある程度の誤差以内となるようにモデル定数を推定すれば十分であるとすると、S P 法あるいは S D 法は十分実用になると考えてよい。

5. 2 貯留関数法

実測値は、 $K=48$, $P=0.48$, $T_I=2.4$ (mm-hr 単位) の貯留関数による計算値に地下水流出高を加算した値とする (**Fig. 13**)。なお有効降雨強度 r_e (mm/hr) は既知、流出高は $\Delta t=1$ hr ごとに整理した 50 時間分の値が与えられているものとする。

初期値を真値の 1.5 倍 ($K=72$, $P=0.72$, $T_I=3.6$) として、SP 法、SD 法、Powell 法、DFP 法および QG 法により最適定数を探索した。その結果はいずれの場合も、3 定数とも上位 4 ケタまで真値に一致しているため、あえて結果は示していないが、その時の収束状況を **Fig. 14** に示す。規準化により DFP 法の効率が改善されることがわかる。

Table 1 は初期値あるいは真値を変えた場合の収束判定例である。DFP 法では初期値が真値から離れるに従い収束しにくくなっているが、規準化によりこの難点が若干解消されることが注目される。これに対し QG 法は、Fig. 14 より類推されるように、他の方法に比べて計算時間が長すぎるようである。今後改良の余地があるかどうか、要検討事項としたい。この中では SP 法、Powell 法が最も強力と推察されるが、いずれの方法とも実用には使えそうである。

5. 3 表面流モデル

Fig. 15 の流域モデルを想定し、Manning 型表面流定数 $p_s=0.6$ 、等価粗度 $N=2 \text{ m}^{-1/3}\text{sec}$ としたモデルによる計算値に地下水流出量を加えた値を実測流量とする (Fig. 16)。ただし有効降雨強度 r_e (mm/hr) は既知、出水資料は $dt=1 \text{ hr}$ ごとに50時間分利用できるものとする。数値実験により次の2つの場合を検討した。

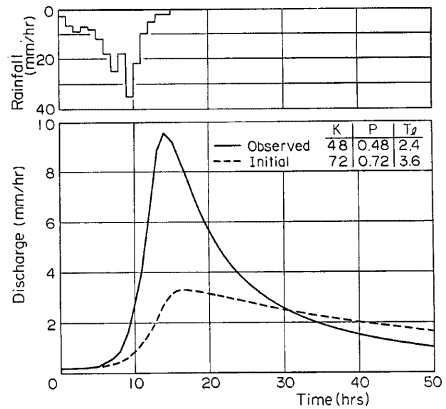


Fig. 13. Hydrographs used for parameters identification of the storage function model.

Table 1. Possibility of parameters identification of the storage function model.

Initial approximations			True parameters			Possibility of identification				
K	P	T_l	K	P	T_l	Powell		DFP		QG
						Non-St.	St.	Non-St.	St.	
72	0.72	3.6	48	0.48	2.4	○	○	○	○	○
96	0.96	4.8	"	"	"	○	○	×	×	○
50	0.5	1.5	20	0.6	1.0	○	○	○	○	○
"	0.8	0.5	"	"	"	○	○	○	○	○
"	0.3	2.0	"	"	"	○	○	×	○	○
100	0.8	"	"	"	"	○	○	×	○	○

(1) N の同定

初期値を $N=10$ とした場合の収束状況を Fig. 17 に例示する。各手法とも上位5ケタまでは真値と一致する結果が得られた。なおここでは1変数の最適値を探索しているため規準化については検討していない。

(2) N と p_s の同定

初期値を $N=10$ 、 $p_s=0.8$ とした場合の収束状況を Fig. 18 に示す。SP 法、Powell 法の方が SD 法、DFP 法より若干効率のよい結果となっている。いずれにせよ各手法とも上位3ケタまで真値と一致するモデル定数を推定しており、実用性は十分であろう。

この例では規準化による効果はほとんど見られない。これは、 N と p_s の最適値が同じオーダーであるにもかかわらず、オーダーの異なる初期値から出発したため、規準化によって応答面形状があまり改善されなかったためと推察される。

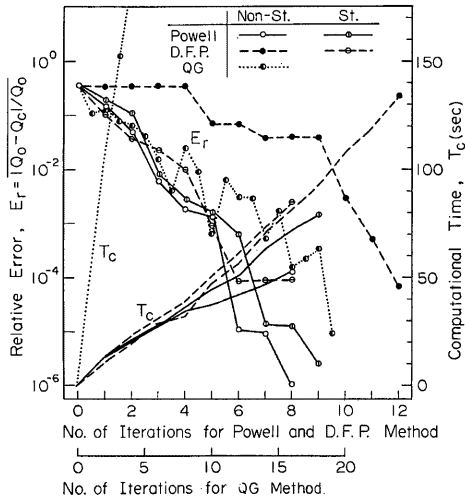


Fig. 14. Identification processes of parameters of the storage function model.

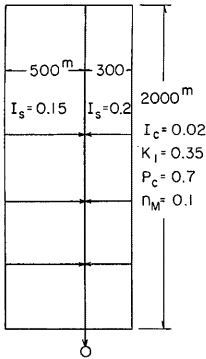


Fig. 15. Model of a watershed.

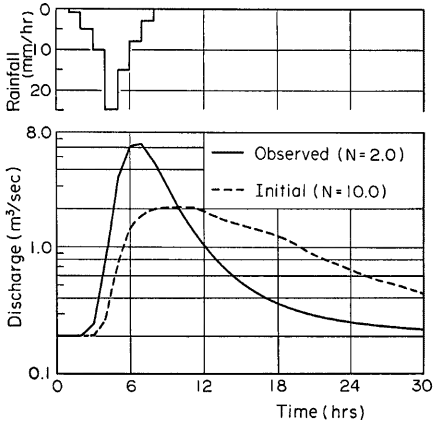


Fig. 16. Hydrographs used for parameters identification of the kinematic surface runoff model.

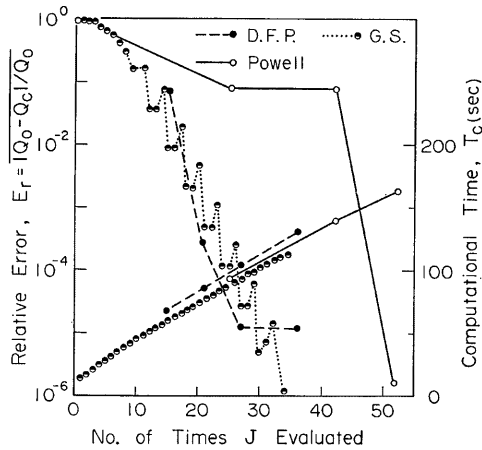


Fig. 17. Identification processes of parameter of the kinematic surface runoff model.

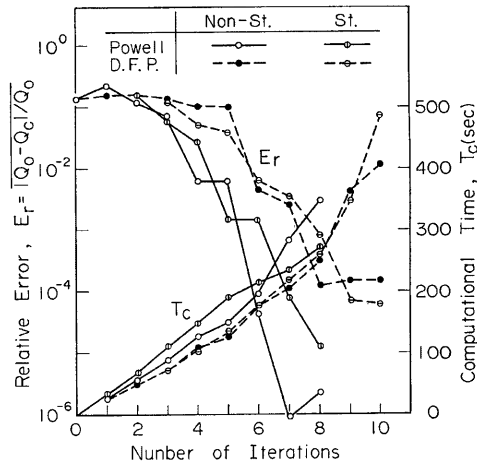


Fig. 18. Identification processes of parameters of the kinematic surface runoff model.

6. 貯留関数法のモデル定数

貯留関数はこれまでかなり実用に供されてきているが、そのモデル構成が表面流モデルに近いことから、そのモデル定数が表面流モデルとの対比でしばしば議論され、また逆に表面流モデル定数を $p_s=0.6$ に固定することの可否も議論されている。ここでは貯留関数法の一つの特徴である遅れ時間 T_l の推定法として一つの方法を提案するとともに、表面流モデルとの関連でモデル定数について若干の考察を加えてみたい。

6. 1 遅れ時間 T_l について

Fig. 19 は 5.2 の計算例において、 T_l を固定した場合の K, P の最適定数をプロットしたものである。同図は、 T_l を過小に評価すると貯留関数の定数 P は小さく、 K は大きく推定されることを示しており、各種流出モデルの相互関係を議論する上で、 T_l の値が重要な要素になることを示唆している。以下では T_l の簡単な推定法を提案したい。

貯留関数は (3) 式で表現されるが、ピーク流量に着目すると、 $dQ_l/dt = 0$ より次の関係が得られる。

$$r_e(t) = Q_l(t) \quad \dots\dots\dots (27)$$

ここに、 $r_e(t)$: 有効降雨強度、 $Q_l(t) = Q_0(t + T_l)$: 遅れ時間 T_l を考慮した直接流出高。

上式は Fig. 2 のように直接流出高の実測ハイドログラフを、負の時間軸方向に移動させ、ピーク流出高と同じ有効降雨強度を示す時刻 t_3 を求めれば、実測ハイドログラフのピーク時刻を t_4 として、 $t_4 - t_3$ が遅れ時間 T_l になることを意味している。実際には、 $r_e(t)$ は dt ごとの一定強度で与えられるから、2 点ないし 3 点の移動平均をとり t_3 を推定する必要がある。

このように T_l が推定できるものとする、 T_l は雨量波形に影響されることになるが、近似的には有効降雨波形ハイトグラフと直接流出ハイドログラフの両者のピーク時間差 $t_g = t_4 - t_2$ のほぼ 1/2 と扱えよう。そこで、洪水到達時間 t_p が同図の $t_4 - t_1$ で推定でき、平均的に t_p は t_g の 2 倍とすれば次式が得られる。

$$T_l = t_g/2 = t_p/4 \quad \dots\dots\dots (28)$$

周知のように t_p は表面流モデルではピーク流量の関数であること、あるいは角屋・福島¹³⁾ の提案した洪水到達時間式では流域面積の関数でもあることを考えると、貯留関数の遅れ時間 T_l は、有効降雨波形、ピーク流量および流域面積に左右されようである。

さらに、 K, P も洪水到達時間に関連づけられる^{8,14)} ことを考えると、貯留関数の 3 定数 K, P, T_l は洪水到達時間に集約されているといえよう。

6. 2 表面流モデル定数と貯留関数法のモデル定数

実測値として 5.3 の雨水流モデル ($N=2, p_s=0.6$) による計算値を採用し、これを貯留関数法によって流出解析することにする。このときのモデル定数 K, P, T_l の最適値は、Powell 法で探索することとし、目的関数は (8) 式も含めた次の形式について吟味することにする。

$$J_{i,j}(K, P, T_l) = \frac{1}{M} \sum \frac{(Q_0 - Q_c)^i}{Q_0^j} \rightarrow \min \quad \dots\dots\dots (29)$$

ここに、 J : 目的関数、 Q_0 : 実測流量、 Q_c : 計算流量、 M : データ数、 i, j : 定数で目的関数の種類を表すパラメータ。

$i=1, 2$ および $j=0, 1/2, 1$ の 6 通りの目的関数を設定したときの最適定数 K, P, T_l を Table 2 に示す。最適値は目的関数ごとに異なり、 $K=5.3 \sim 6.3$ 、 $P=0.60 \sim 0.67$ 、 $T_l=0.66 \sim 0.89$ (mm-hr 単位) とかなりの範囲にわたっている。これまでは $P=p_s$ (ここでは $p_s=0.6$) とみられているが、目的関数によって必ずしもこの関係が成立しないことは注目されよう。

貯留関数の遅れ時間 T_l を (27) 式から推定すると、 $T_l=0.75$ hr が得られ、まず問題はなさそうである。

次に K, P について考察してみる。流域を Fig. 15 のような単一斜面ブロックに集中化し、一定降雨強度

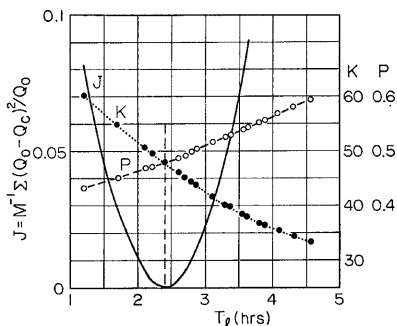


Fig. 19. An example of the relation between the objective function J and the optimal values of K and P for a given value of T_l in identifying parameters of the storage function model.

Table 2. Optimal parameters of the storage function model for various objective functions.

Objective function	Optimal parameters		
	K	P	T_l
$J_{1,0}$	5.3	0.65	0.89
$J_{1,05}$	5.3	0.67	0.70
$J_{1,1}$	5.3	0.67	0.70
$J_{2,0}$	5.7	0.62	0.82
$J_{2,1}$	6.3	0.60	0.68
$J_{2,2}$	5.7	0.64	0.66

r_p が洪水到達時間以上にわたって継続するものとする、ピーク流量時の斜面の貯留高と流出高の関係は栗林ら¹⁵⁾によって得られているが、それに河道の貯留高も加味すると、近似的に次式となる。

$$S = \frac{k_s B^{p_s}}{1 + p_s} \left(1 + \frac{1 + p_s}{1 + p_c} \frac{t_c}{t_s} \right) r_p^{p_s} \quad \dots\dots\dots (30)$$

これより貯留関数 $S_l = KQ_l^P$ との関係として次の関係が推論される。

$$P = p_s, \quad K = \alpha \cdot \beta \frac{k_s B^{p_s}}{1 + p_s} \left(1 + \frac{1 + p_s}{1 + p_c} \frac{t_c}{t_s} \right) \quad \dots\dots\dots (31)$$

ここに、 S ：遅れ時間を考慮しない貯留高、 r_p ：有効降雨強度、 B ：斜面長、 k_s 、 p_s ：斜面流定数、 p_c ：河道流定数、 t_s 、 t_c ：斜面および河道の伝播時間、 α ：単位換算係数で、 B を m、 S_l 、 Q_l を mm-hr 単位で計算するとき、 $\alpha = (3.6 \times 10^6)^{-p_s} \times 10^3$ 。

β は T_l を考慮したことによる K の修正係数で、 $T = 0$ のときは $\beta = 1$ 、 $T_l > 0$ では $0 < \beta < 1$ である。**Fig. 2** のように実測流量ハイドログラフを T_l だけ移動した場合のピーク流量時 t_3 の見かけの流域貯留高 S_l は、 $T_l = 0$ とみなす場合のピーク流量時 t_4 の貯留高 S に比べて、 $R_l = \int_{t_3}^{t_4} r_e dt$ だけ少なくなるはずである。そこで β の第 1 次近似値は、洪水到達時間内の総有効雨量 $R_p = \int_{t_1}^{t_4} r_e dt$ に占める R_l の割合を考慮して次式から推定できる。

$$\beta \approx 1 - R_l / R_p \quad \dots\dots\dots (32)$$

一方 P については、 β を一定値として扱う際には変化しない。

そこで一応 $P = p_s = 0.6$ を用いることにして (31) 式から K を求めると、 $T_l = 0$ ($\beta = 1$) では、 $K = 8.4$ 、 $P = 0.6$ が得られ **Table 2** の最適値とかなり異なり問題があるが、 $T_l = 0.75$ ($\beta = 0.81$) では、 $K = 6.8$ 、 $P = 0.6$ (mm-hr 単位) と最適値に近い定数が推定できる。後者のモデル定数はピーク流量のみに注目して推定した値であり、最適値との若干のズレは止むを得ないと思われるが、詳細な検討は今後実測値を解析する際の研究課題の一つにしたい。

7. まとめと考察

以上の各節では、タンクモデル、貯留関数法および表面流モデルの最適定数を、いくつかの最適化手法を用いて数値実験的に探索した結果について述べた。一般的結論を得るにはなお若干の検討が必要であるが、一応ここで得た成果に考察を加えて要約すると以下のようである。

(1) 最適化手法として S P 法、S D 法、Powell 法、DFP 法、黄金分割法および Q G 法を用いているが、この中で効率のよい手法をみてみると、タンクモデル定数の探索には S P 法、S D 法が、貯留関数法および雨水流モデル定数の探索には S P 法、Powell 法がそれぞれ有力なようである。

(2) 最適定数を効率よく探索するため、変数の基準化方式を提案した。この方式では初期値が最適値と同

一オーダーとなるように推定される場合には、従来の方式に比べて収束性がかなり改善される。とくにタンクモデル定数の探索に威力を発揮するようである。

(3) 貯留関数法の遅れ時間 T_l の簡便な推定法を提示し、貯留関数法と表面流モデルの相互関係について、数値実験的に吟味した。これから両モデルの関連性を適切に評価するためには、貯留関数の P は表面流モデルの p_s を用いてもよいが、 K は T_l を考慮する分だけ小さく推定すべきことを示した。

今後、各モデルに適應した最適化手法の明確化、あるいは流出モデル定数の同定に必要なデータ長などの基本問題を解決し、流出モデル間の相互関係を明確にしていきたいと考えている。

なおここに示した計算には本学化学研究所 FACOM 230-48 及び大型計算機センター FACOM M-190 を利用したことを付記する。

参 考 文 献

- 1) 小林慎太郎・丸山利輔：Powell の共役方向法によるタンクモデル定数の探索，農業土木学会論文集，第65号，1976，pp. 42-47.
- 2) 菅原正巳・尾崎睿子・渡辺一郎・勝山ヨシ子：タンク・モデルの構造を自動的に定める計算機プログラムの開発（第1報），国立防災科学技術センター研究報告，第17号，1977，pp. 43-89.
- 3) 菅原正巳・尾崎睿子・渡辺一郎・勝山ヨシ子：タンク・モデルの構造を自動的に定める計算機プログラムの開発（第2報），国立防災科学技術センター研究報告，第20号，1978，pp. 157-216.
- 4) 木村俊晃：貯留関数法，土木技術資料，No. 4，Vol. 1，1962，pp. 41-51.
- 5) Labadie, J.W. and Dracup, J.A.: Optimal Identification of Lumped Watershed Models, W.R.R., Vol 5, No. 3, 1969, pp. 583-590.
- 6) 日野幹雄：洪水予測における同定問題と適応制御について，第15回水理講演会講演集，1971，pp. 67-72.
- 7) Tuffer, S. and Labadie, J.W.: A Nonlinear Time Variant Rainfall-Runoff Models for Augmenting Monthly Data, W.R.R., Vol. 10, No. 6, 1974, pp. 1161-1166.
- 8) 永井明博・角屋 睦：洪水流出モデルの適用比較，京大防災研究所年報，第21号B 2，1978，pp. 235-249.
- 9) 角屋 睦・福島晟・佐合純造：丘陵山地流域モデルと洪水流出モデル，京大防災研究所年報，第21号B 2，1978，pp. 219-233.
- 10) Powell, M.J.D.: An Efficient Method for Finding the Minimum of a Function of Several Variables without Calculating Derivatives, The Computer Journal, Vol. 7, 1964, pp. 155-162.
- 11) Fletcher, R. and Powell, M.J.D.: A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization, The Computer Journal, Vol. 6, 1963, pp. 163-168.
- 12) Bellman, R.E. and Kalaba, R.E. 著，小田中敏夫・中山隆訳：準線形化とその応用，東京図書，1972，pp. 65-72.
- 13) 角屋 睦・福島 晟：中小河川の洪水到達時間，京大防災研究所年報，第19号 B 2，1976，pp. 143-152.
- 14) 星畑国松：降雨流出について，水工学におけるラングム事象と最適化に関する諸問題，1972，pp. 87-107.
- 15) 栗林宗人・定道成美：水系の流出解析法とその特性，第22回建設省技術研究会報告，1969，pp. 739-743.