

原 啓明

した。

例えば,

$$f_1(x) = \frac{x}{3}, \quad f_2(x) = \frac{x+2}{3}$$

とおけば, それらの不変集合 X として, Cantor 集合を得るし, また

$$f_1(z) = \alpha \bar{z}, \quad f_2(z) = (1-\alpha) \bar{z} + \alpha, \quad \alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} i$$

とおけば, de Rham [2] が示したように, Koch 曲線が得られるという具合である。

de Rham は, 2つの縮小写像 f_1 と f_2 の間に, それぞれの唯一の不動点を p_1, p_2 として, $f_1(p_2) = f_2(p_1)$ という関係がある時に, 不変集合 X の parameterization を研究している。

de Rham の条件が満たされない場合でも, 数々の興味ある不変集合が得られている。例えば,

$$f_1(z) = \alpha \bar{z}, \quad f_2(z) = |\alpha|^2 + (1-|\alpha|^2) \bar{z},$$

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} i$$

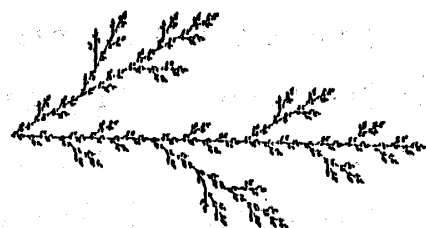


図 3

とおけば, 右図のような“樹木”が得られる。その他, 不変集合の連結性, 微分可能性, および, その Hausdorff 次元などが [1] で詳しく論じられている。

参考文献

- 1) M. Hata, Invariant sets of contraction mappings, to appear in Japan J. of Appl. Math.
- 2) G. de Rham, Sur quelques courbes definies par des équations fonctionnelles, Rend. Sem. Mat. Torino, 16 (1957), 101–113.
- 3) R. F. Williams, Composition of contractions, Bol. Soc. Brasil. Mat., 2 (1971), 55–59.

一般化されたランダム・ウォークの経路ゆらぎと分岐

東北大・工 原 啓 明

考える系のダイナミクスは確率過程として記述可能であり, その“力学系”の基礎方程式はプロセスに対する作用量 S が極値をとる条件式として得られるものとする。

確率過程は一般化されたランダム・ウォーク (GRW) の漸化式で表わす。

$$W(m, N) = \sum_{\alpha=\pm, 0} P_{N-1}^{\alpha}(m|m-\alpha \cdot 1) W(m-\alpha \cdot 1, N-1) \quad (1)$$

W は原点を出発したウォーカーが N ステップ後に位置 m に到達する確率, P_{N-1}^{α} は $m-\alpha \cdot 1$ から m へジャンプする確率を表わす。¹⁾ 以下の議論では P_N^{α} が

$$P_N^{\alpha}(m|m-\alpha \cdot 1) = P_0^{\alpha} + \frac{\alpha \cdot \lambda(N)}{2} e^{\xi m/M} \quad (2)$$

で特徴づけられた系のダイナミクスについて考える。 $\lambda(N)$ と ξ でウォーカーと環境の相関を表わし M はウォーカーの到達可能な領域の最大距離である。連続体近似をとると (1) はフォッカー・プランク (FP) 方程式になる。この FP 方程式の解は経路積分によって

$$w(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{K_2(x, t)} \int \frac{dx_{n-1}}{\tilde{A}} G(x|x_{n-1}, \Delta t) K_2(x_{n-1}, t_{n-1}) \times w_{\Delta t}(x_{n-1}, t - \Delta t), \quad (3)$$

$$G(x|0; t = N\Delta t) = \int \frac{dx_1}{\tilde{A}} \cdots \frac{dx_{N-1}}{\tilde{A}} e^{-\int_0^{N\Delta t} L(x, \dot{x}) dt} \quad (4)$$

$$L(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2K_2} - \dot{x} \frac{K_1}{K_2} + \frac{K_2}{2} \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{K_1}{K_2} \right) + \left(\frac{K_1}{K_2} \right)^2 \right]. \quad (5)$$

$\tilde{A} = 2\pi \Delta t K_2$ となる。^{2), 3)} (4) の指数部が初めに述べたプロセスに対する作用量 S である。(2) の P_N^{α} で特徴づけられる FP 方程式のモーメントは

$$K_1(x, t; \beta) \left(= \frac{a}{t_0} (p^+ - p^-) \right) = K_1^0 + J \quad (\beta = \lambda, \xi) \quad (6)$$

$$K_2(x, t) \left(= \frac{a^2}{t_0} (p^+ + p^-) \right) = K_2^0 = \text{一定}$$

ここで $J \left(= (a/t_0) \lambda(t) \exp(\xi x/Ma) \right)$ を ξ の大小で

$$J = \begin{cases} \frac{a}{t_0} \lambda(t) \left(1 + \frac{\xi x}{Ma} \right) & (\text{弱い結合}) \end{cases} \quad (7)$$

$$J = \begin{cases} \frac{a}{t_0} \lambda(t) e^{\xi x/Ma} & (\text{強い結合}) \end{cases} \quad (8)$$

と分けて調べる。(7) の場合は λ の正負にかかわらず S の極値 $\delta S = 0$ で決まるウォーカーの軌道 $x(t)$ には経路ゆらぎが生じ (4) の G は

$$G(x|0; t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi F(t)}} e^{-S[x(t)]} \quad (9)$$

原 啓明

となる。 $F(t)$ は K_2^0 , λ , ξ で決まる量で経路ゆらぎを表わす。⁴⁾ 多次元の確率過程でも, ある程度過程を制限すれば G は各成分の直積の形に書ける。^{4), 5)}

次に (8) の場合 $\delta S = 0$ で決まる軌道は λ の符号によっていろいろな分岐がおこる。軌道を決める式は

$$\ddot{x} - \left(\lambda \frac{a}{t_0}\right)^2 r e^{2rx} - \frac{K_2^0}{2} \left(\lambda \frac{a}{t_0}\right) r^2 e^{rx} = 0 \quad (10)$$

$r (= \xi/Ma)$ となる。更に $x(t)$ が第 1 項と第 2 項で決まる場合 (I), 第 1 項と第 3 項で決まる場合 (II) に分けて考えると, 適当に変数変換した後では (I) は

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} \pm 2e^X = 0 \quad \left(\begin{array}{l} + : \lambda < 0 \\ - : \lambda > 0 \end{array} \right) \quad (11)$$

(II) は

$$\frac{d^2 X}{d\tau^2} - 2e^X = 0 \quad (12)$$

となる。(11) の $\lambda < 0$ の場合は, ある τ_{cr} が存在して, τ と τ_{cr} との大小関係で経路の分岐がおこる。しかし条件 $\delta^2 S > 0$ で決まる最確定軌道はこのうちの 1 つである。同様な議論が (11) の $\lambda > 0$, (12) の場合についても可能で定性的にはウォーカーの軌道は分岐するが最確定軌道はそのうちの 1 つである。図 1 (a) は, 各場合の最確定軌道を示し, (b) は対応する離散的な経路を示す。

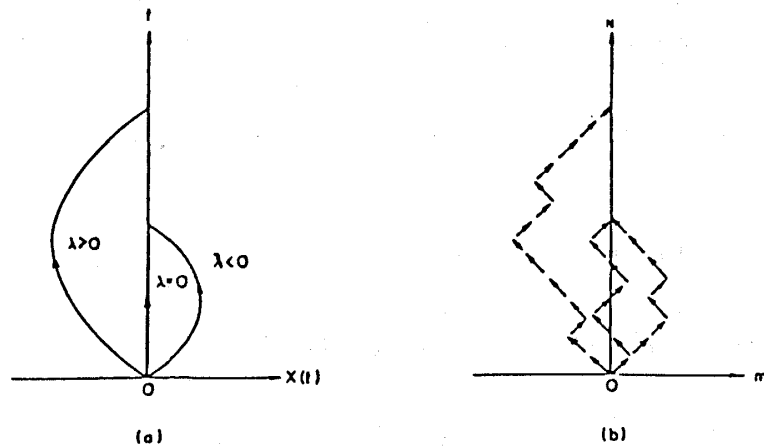


図 1

最後に (2) を以前の左右のジャンプの差 $Q_N (= P_N^+ - P_N^-)$ の形で記憶する過程

$$P_N^\alpha = P_0^\alpha + \frac{\alpha \cdot b}{2} F(Q_{N-1}), \quad (b : \text{定数}) \quad (13)$$

では $Q_N = b_{\text{eff}}(q) F(Q_{N-1})$, $(b_{\text{eff}}(q) = 1 + \sqrt{(b-1)^2 + 4bq}, q = P_0^+ - P_0^-)$ となり軌道の周

境界競合による Frustrated Instability と初等数論的秩序
 期倍化分岐がおこる。しかし最確定軌道はそのうちの 1 つである。

(なお、本研究の一部は小幡常啓氏との共同研究に基づくものである。)

参考文献

- 1) H. Hara, Phys. Rev. **B20** 4062 (1979).
- 2) H. Hara, Z. Physik **B29** 159 (1981).
- 3) H. Hara and T. Obata, Phys. Rev. **B28** 4403 (1983).
- 4) 原 啓明：研究会「確率過程，場の理論と統計力学」数理研，1983年3月。
- 5) T. Morita and H. Hara, Physica, **125A** 607 (1984).

境界競合による Frustrated Instability と初等数論的秩序

京大・理 水野正彦，池田研介

複合共振器からなる光学系は，発振モードが共振器の長さに敏感に依存するという性質を持っている。たとえば，半導体レーザーでは，ファイバー等を接続すると，その端面が自然のミラーの働きをするため，モードホッピングが容易におこることが知られており，現在，工学の分野で問題になっている。

レーザーとは異なるが，図 1 に示す光学系において，共振器の長さと言振モードとの関係を調べたので，その結果について報告する。図 1 のシステムは，共振器内に非線形誘電媒質が挿入されており，左方よりレーザー光が入力されると，その光は 2 のミラーを透過した後，2 つの経路 ($2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$) をとお

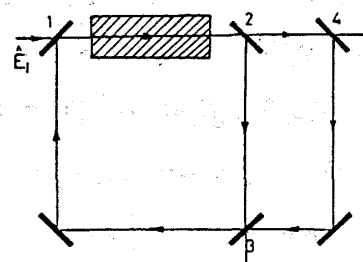


図 1

り非線形媒質にフィードバックされるという構造をもっている。入力するレーザー光の強度が低ければ，糸内に生じる電場の振幅は定常値に緩和するのであるが，入力光の強度を増してゆくと，この定常解はある点で不安定になり，かわって振動解が出現する。このときの発振モードは定常解の線形安定性を調べることによって求めることができ，それを示したのが図 2 である。

図 2 の横軸 χ は重合する 2 つの共振器の長さの比 $r = l_1/l_2$ (l_1, l_2 は図 1 の 2 つの閉じた