

Nonstandard arithmetic of function fields over H -convex subfields of ${}^*\mathbb{Q}$

名大理 安本雅洋 (Masahiro Yasumoto)

$\mathbb{Q}$ を有理数体. ${}^*\mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}$ の nonstandard model. H を ${}^*\mathbb{Q}$ 上の height. すなわち.

$$H\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) = \max(|\alpha|, |\beta|) \quad (\alpha, \beta \in {}^*\mathbb{Z}, (\alpha, \beta) = 1)$$

とする.

${}^*\mathbb{Q}$ の部分体 Q_1 が H -convex であるとは. $x \in Q_1$ で $H(y) \leq H(x)$ ならば. $y \in Q_1$ が成立することとする.

H -convex subfield Q_1 は. ${}^*\mathbb{Q}$ の中で. 代数的に閉じている. (Lemma 1) 従って. $x \in {}^*\mathbb{Q} - Q_1$ とし. $y \in {}^*\mathbb{Q}$ を. $Q_1(x)$ 上. 代数的な元とすると. $Q_1(x, y)$ は. Q_1 を constant field とする. 一変数代数関数体になる. この論文においては. ${}^*\mathbb{Q}$ の divisor theory と. $Q_1(x, y)$ の divisor theory との関係についての結果を証明する. こゝらの結果の. 不定方程式論への応用については. [2] を参照されたい.

Lemma 1. ${}^*\mathbb{Q}$ の H -convex subfield Q_1 は.

${}^*\mathbb{Q}$ の中で代数的に閉じている。

[証明] $\alpha/\beta \in {}^*\mathbb{Q} - \mathbb{Q}$ とする。ただし $\alpha, \beta \in {}^*\mathbb{Z}$ で

$(\alpha, \beta) = 1$ 。そうすると $\alpha \notin \mathbb{Z}_1 = \mathbb{Q} \cap {}^*\mathbb{Z}$ か又は $\beta \notin \mathbb{Z}_1$ 。

$\alpha \notin \mathbb{Z}_1$ としても一般性を失わない。

α/β が $\mathbb{Q}_1$ 上代数的ならば $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z}_1$ が存在して

$$c_0 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + c_1 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} + \dots + c_n = 0$$

で $c_n \neq 0$ になる。

$$c_0 \alpha^n + c_1 \alpha^{n-1} \beta + \dots + c_n \beta^n = 0$$

$$c_n \beta^n \equiv 0 \pmod{\alpha}$$

$(\alpha, \beta) = 1$ であるから

$$c_n \equiv 0 \pmod{\alpha}$$

$\mathbb{Z}_1$ は convex で $\alpha \notin \mathbb{Z}_1$ だから $|c_n| < |\alpha|$ 。従って

$$c_n = 0$$

これは矛盾である。//

$R = \{ \beta/\alpha \in {}^*\mathbb{Q} \mid \alpha \in \mathbb{Z}_1, \beta \in {}^*\mathbb{Z} \}$, I を R の maximal ideal とする。そうすると I の local ring R_1 は valuation ring になる。実際 $\beta/\alpha \notin R_1, (\alpha, \beta) = 1$ とすると $\alpha \in I$ 。従って $(\alpha, \beta) = 1$ より $\beta \notin I$ となり

$\alpha/\beta \in R_1$ がいえる。

$$R_\infty = \{ \beta/\alpha \in {}^*\mathbb{Q} \mid |\beta/\alpha| < \delta \text{ for some } \delta \in \mathbb{Z}_1 \}$$

とおくと R_∞ は valuation ring で その maximal ideal は $\{\beta/\alpha \in {}^*\mathbb{Q} \mid |\beta/\alpha| < 1/|\alpha| \text{ for all } \alpha \in \mathbb{Z}_1\}$.

$F \subseteq {}^*\mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}_1$ を constant field とする. 一変数代数関数体とする. $F \cap R_\infty$ が trivial でないなら (すなわち $F \not\subseteq R_\infty$ なら) $F \cap R_\infty$ は valuation ring になる.

$\mathbb{Q}_1 \subset F \cap R_\infty$ より. これは F の functional prime P を引き越す. この時 P は archimedean prime になって引き越えられると呼ぶ.

I を R の maximal ideal とする. もし $F \cap R_I$ が trivial でないなら. 前と同様. これは F の functional prime P を引きおこす.

p を ${}^*\mathbb{Z}$ の素数とする.

$$I_p = \{\beta/\alpha \in R \mid |\beta/\alpha|_p < 1/|\alpha| \text{ for all } \alpha \in \mathbb{Z}_1\}$$

とおくと I_p は R の maximal ideal になる. functional prime P が I_p になって引きおこされる時. 単に P は p になって引き起こされるという.

Theorem 1. すべての functional prime P は archimedean prime か又は R の maximal ideal で引きおこされる.

[証明] Riemann-Roch の定理より P だけを pole に持つような $\beta/\alpha \in F$ が存在する. もし. すべての $\alpha \in \mathbb{Z}_1$

に対して, $|\beta/\alpha| > \delta$ ならば, $\beta/\alpha \notin R_\infty$ となり, 従って

$$\beta/\alpha \notin R_\infty \cap F.$$

よって archimedean prime によって引き起=される functional prime は, β/α の pole になるが, β/α のとり方より, これは P になる。

もし $|\beta/\alpha| < \delta$ となる, $\delta \in \mathbb{Z}_1$ が存在するならば,

$$\alpha \in {}^*\mathbb{Z} - \mathbb{Z}_1$$

となる。 I_α を α を含むような R の maximal ideal とする。すると

$$\beta/\alpha \notin R_{I_\alpha}.$$

従って

$$\beta/\alpha \notin R_{I_\alpha} \cap F.$$

よって, 前と同様, P が I_α によって, 引き起=されることになる。//

$\mathbb{Z}_1 = \mathbb{Z}$ の場合は, すべての functional prime が archimedean prime だ。又は ${}^*\mathbb{Z}$ の素数によって引き起=されることか知られている。[1] 一般には, 次のことが成立する。

Theorem 2. ある $x \in F$ が存在して

$$H(x) > e^c$$

が, すべての $c \in \mathbb{Q}_1$ に対して, 成立しているとする。

すべての functional prime P は, archimedean prime
か又は, ${}^*\mathbb{Z}$ の素数で引き起こされる。

まず始めに, 次の Lemma を証明する。

Lemma 2. ある $x \in F$ が存在して

$$H(x) > e^c$$

が, すべての $c \in \mathbb{Q}_1$ について成立するならば, すべての
 $x \in F - \mathbb{Q}_1$ に対しても, 同じことが成立する。

[証明] $Q_2 = \{x \in {}^*\mathbb{Q} \mid H(x) < e^c \text{ for some } c \in \mathbb{Q}_1\}$

とおく。 Q_2 は, H -convex subfield。従って, Lemma 1
より, Q_2 は, ${}^*\mathbb{Q}$ の中で代数的に閉じている。もし, Q_2 が
 $F - \mathbb{Q}_1$ の元を一つでも含んでゐれば, $F \subset Q_2$ となって, 仮定
に反する。従って, すべての $F - \mathbb{Q}_1$ の元は, Q_2 の元には
ならない。 //

Lemma 3. $2 \leq c \in \mathbb{Z}$ とする。

$$|x|_p \leq c$$

が, すべての prime p (∞ を含む) で成立するもの。

$$H(x) \leq e^{3c}$$

になる。

[証明] $S = \{p \mid p \text{ は素数で, } |x|_p > 1\}$

$\epsilon < \epsilon$.

$$H(x) = \prod_p \max(1, |x|_p) \leq \epsilon \cdot \prod_{p \in S} |x|_p$$

$p \in S$ なる素数 p に対して.

$$1 < |x|_p = p^{-v_p(x)} \leq \epsilon$$

$$0 < -v_p(x) \leq \log \epsilon / \log p$$

従って

$$p \leq \epsilon$$

$$\prod_{p \in S} |x|_p \leq \prod_{p \leq \epsilon} p^{\log \epsilon / \log p} = \prod_{p \leq \epsilon} e^{\log \epsilon}$$

$$\leq e^{\pi(\epsilon) \log \epsilon}$$

ただし, $\pi(\epsilon)$ は, $p \leq \epsilon$ なる素数 p の数とする.

素数定理より.

$$\pi(\epsilon) \log \epsilon < 2\epsilon.$$

従って

$$\prod_{p \in S} |x|_p < e^{2\epsilon}$$

$$H(x) < \epsilon e^{2\epsilon} < e^{3\epsilon} \quad //$$

[Theorem 2 の証明]

$x \in F - \mathbb{Q}_1$ とすると, Lemma 2 より, すべて $0 < c \in \mathbb{Z}_1$ に対して

$$H(x) > e^{3c}.$$

従って, Lemma 3 より, ある $\mathbb{Z}$ の prime p_c が存在して

$$|x|_{p_c} > c$$

従って ある $0 < c \in \mathbb{Z}_1$ に対して

$$|x|_p > c$$

となる. prime p が存在する。

P を任意の functional prime とし. $x \in F - \mathbb{Q}_1$ を P だけ
を pole に持つ元とする. そうすると P は上の p によって
引き起こされる. //

References.

- [1] A. Robinson - P. Roquette, On the finiteness
theorem of Siegel-Mahler concerning diophantine
equations. J. Number Theory 7 (1975), 121-176.
- [2] M. Yasumoto, Nonstandard arithmetic of function
fields over H -convex subfields of ${}^*\mathbb{Q}$ to appear
in Crelle's Journal).