

巡回ブロックのカルタン行列の固有値について

東京医科歯科大学教養部 清田正夫

(Tokyo Medical and Dental Univ., Masao Kiyota)

1 序文

G を有限群、 F を標数 $p > 0$ の代数閉体とする。群環 FG は直既約な両側イデアル B_i 達の直和に分解され、各 B_i は FG のブロックと呼ばれている。ブロック B の主要な不変量として、

$l(B)$: B に属す単純 FG 加群の個数、

$k(B)$: B に属す通常既約指標の個数、

$|D|$: B の不足群 D の位数、

カルタン行列 C の単因子

等があり、これらの不変量の間の関係について様々な研究がなされてきた。ここではブロック B の新しい不変量としてカルタン行列 C の固有値をとり上げ、 C の単因子との関係を調べる。まず最初にカルタン行列 C の定義を復習する。

$S_1, \dots, S_l$ ($l = l(B)$) を B に属す単純 FG 加群とし、 P_i を S_i の射影被覆とする。整数 $c_{ij} = \dim_F \text{Hom}_{FG}(P_i, P_j)$ をカルタン不変数と呼び、 $l \times l$ 行列 $C = (c_{ij})$ をブロック B のカルタン行列という。

カルタン行列 C の単因子や固有値については次の事実がよく知られている。

(事実1) C の行列式 $\det C$ は p べきである。

(事実2) C の最大の単因子は $|D|$ と一致していて、他の単因子はすべて $|D|$ より小さい。

(事実3) C の固有値はいずれも正の実数で、その最大固有値は単根である。

これを C の Frobenius 固有値と呼び、 $\rho(C)$ で表す。

C の固有値について、村井、和田、清田は [K-M-W] で次の2つを予想した。

(予想1) もし $\rho(C) = |D|$ ならば C の固有値全体と C の単因子全体は一致するか？

(予想2) もし $\rho(C)$ が整数ならば、 $\rho(C) = |D|$ となるか？

[K-M-W] において (1) G が p 可解群のとき、(2) $D \trianglelefteq G$ のとき、(3) B が有限型や tame 型のときには (予想1) が成立することが確かめられている。また (予想2) は (2), (3) の場合には正しい。 G が p 可解群のときでも (予想2) は証明されていない。

2 問題

さて（予想2）をさらに推し進めて、 C の固有値全体と C の単因子全体にかんする新たな研究問題を考えることができる。この問題の具体的記述やこれまでに得られている結果については、本報告集の和田俱幸氏の原稿を参照してください。ここでは、問題を巡回ブロックの場合に特化して述べる。

（問題A） 不足群 D が巡回群とする。 C の固有多項式 $f_C(x)$ の $\mathbb{Z}[x]$ における既約分解を

$$f_C(x) = f_1(x) \cdots f_t(x)$$

とする。ここで $f_i(x)$ は monic で、 $\rho(C)$ は $f_1(x) = 0$ の根とする。このとき次の (1), (2) が成立するか？

$$(1) \deg f_i \leq \deg f_1 \quad (i = 1, \dots, t)$$

$$(2) f_1(0) = \pm |D|, f_i(0) = \pm 1 \quad (i = 2, \dots, t)$$

上の問題の (1) は一般のブロックでは最近、反例が見つかったが、巡回ブロックでは反例がないのでそのまま問題として残しておく。

3 命題

以下、不足群 D は巡回群とする。このとき $l = l(B)$ は $p-1$ の約数となり、等式

$$ml + 1 = |D|$$

から (B の重複度と呼ばれる) 整数 m が定まる。巡回ブロック B には Brauer tree と呼ばれる l 本の辺をもつ tree T が付随していて、 B の構造に関する不変量の多くが、とくにカルタン行列 C が T から計算できる。 $m > 1$ のとき T は exceptional vertex と呼ばれる特別な頂点をひとつ持つ。可解群では星型の Brauer tree (exceptional vertex はあれば中心にくる) のみが現れる。Brauer tree T の形を決めて (問題A) を取り扱うことは、自然なことである。この方向の計算例を2、3紹介する。

命題A B の Brauer tree が星型 (star) のとき、

$$f_C(x) = (x - |D|)(x - 1)^{l-1}, \text{ or } (x^2 - (m + l + 1)x + |D|)(x - 1)^{l-2}$$

となる。ここで前者は $m = 1$ か exceptional vertex が中心にある場合で、後者は $l > 1$ で exceptional vertex が端点にある場合。

命題 B B の Brauer tree が open polygon (path) で $m = 1$ のとき、
 $l = p - 1$, $|D| = p$ となり、 C の固有値は

$$\lambda = 4 \cos^2 \frac{k\pi}{2p} \quad (k = 1, 2, \dots, p-1)$$

で与えられる。また $f_C(x)$ は 2 つの同じ次数の既約多項式の積となる。

命題 C B の Brauer tree が open polygon (path) で $m = 2$ の exceptional vertex を端点に持つとき、

$l = (p-1)/2$, $|D| = p$ となり、 C の固有値は

$$\lambda = 4 \cos^2 \frac{k\pi}{2p} \quad (k = 1, 3, \dots, p-2)$$

で与えられる。また $f_C(x)$ は既約多項式となる。

命題 B、命題 C において固有多項式 $f_C(x)$ を 2 項係数を用いて表すことができる。多項式 $f_{n,m}$ を

$$f_{n,m}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} ({}_{n+k}C_{2k} + m {}_{n+k}C_{2k+1}) x^k$$

で定義すれば、命題 B では $p \geq 3$ のとき $f_C = f_{p-1,1} = f_{(p-1)/2,2} f_{(p-1)/2,0}$ と分解し、命題 C では $f_C = f_{(p-1)/2,2}$ となっている。また数値例から、次の問題が予想されている。

(問題 B) B の Brauer tree が open polygon (path) で $m \geq 3$ の exceptional vertex を端点に持つとき、 $f_C(x)$ は既約多項式となるか？

(問題 B) は $m \geq 3$ のとき $f_{n,m}$ は既約になるかという問いである。

参考文献

[K-M-W] M. Kiyota, M. Murai and T. Wada, Rationality of eigenvalues of Cartan matrices in finite groups, J. of Algebra, 249 (2002), 110-119