

Coxeter 群のある種の分解の構成

中村得之 (Tokushi Nakamura)

1. 群 W とその部分集合 S が次の条件を満たしているとする。
 $1 \notin S$, またすべての $s \in S$ に対し $s^2 = 1$ が成り立つ。
 更に S が W を生成するものとする。

定義 対 (W, S) が次の条件 (Coxeter の条件) を満たすとき, (W, S) を Coxeter 対, W を Coxeter 群とよぶ。

i) S と一対一対応する集合 $\hat{S} = \{\hat{s} \mid s \in S\}$ が存在する。

ii) 自然数又は $+\infty$ に値をとつ, $\hat{S}$ 行 $\hat{S}$ 列の行列 $M =$

$\{m(\hat{s}, \hat{s}') \mid \hat{s}, \hat{s}' \in \hat{S}\}$ が存在し, 次の条件を満たす。

ii-1) $\hat{S}$ に属するすべての $\hat{s}$ に対し, $m(\hat{s}, \hat{s}) = 1$ が成り立つ。

ii-2) $\hat{S}$ に属するすべての異なる $\hat{s}, \hat{s}'$ に対し, $m(\hat{s}, \hat{s}') = m(\hat{s}', \hat{s}) \geq 2$ が成り立つ。

iii) $\hat{W}$ を $\hat{S}$ と自由生成元の集合とする自由群とし, N を

$\hat{S}$ に属するすべての異なる $\hat{s}, \hat{s}'$ に対して定まる $\hat{W}$ の元 $(\hat{s}\hat{s}')^{m(\hat{s}, \hat{s})}$ で生成される正規部分群とする。このとき

S に属する任意の s に対し, $\hat{s}$ を s に移す写像 π は

同型 $\hat{W}/N \rightarrow W$ と惹き起す。

以下, S に属するすべての α に対し, α と α を同一視する。

S と一対一対応する集合 $e_S = \{e_\alpha \mid \alpha \in S\}$ と基底とする R 上の線型空間を V とする。 M の定める V 上の双一次形式 B と, S に属する任意の α, α' に対し $B(e_\alpha, e_{\alpha'}) = -\cos(\pi/m(\alpha, \alpha'))$ で定める。このとき W の V 上への表現 σ と W に属する任意の w に対し $\sigma(w) = \sigma_w$ と書くとき, σ_α は V に属する任意の x に対し $\sigma_\alpha(x) = x - 2B(x, e_\alpha)e_\alpha$ を満たすものとして定義する。

σ は B を不変に保つ W の忠実な表現となる。

そこで $V^* = \text{Hom}_R(V, R)$ とする。 W の V^* 上への表現 σ^* と, W に属する任意の w に対し $\sigma^*(w) = \sigma_w^*$ と書くとき, σ_w^* は V に属する任意の x , V^* に属する任意の x^* に対し $\langle \sigma_w^*(x^*), \sigma_w(x) \rangle = \langle x^*, x \rangle$ が成り立つものとして定義する。 σ^* も W の忠実な表現である。

q を自然数とする。 R^q に属するベクトル x^* をとるとき, $1 \leq j \leq q$ を満たす任意の自然数 j に対し実数 x_j^* が定まり

$$x^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_q^* \end{pmatrix}$$

と表される。 R^q には辞書式順序により $<$ を定める。

こゝで $(V^*)^q$ を考える。 $(V^*)^q$ に属する元 X をとる。

$1 \leq j \leq q$ を満たす任意の自然数 j に対し, V^* に属する元 x_j^*

が定まり

$$X = \begin{pmatrix} x^{*1} \\ \vdots \\ x^{*g} \end{pmatrix}$$

と表される. S に属する任意の Δ に対し

$$\langle X, e_\Delta \rangle = \begin{pmatrix} \langle x^{*1}, e_\Delta \rangle \\ \vdots \\ \langle x^{*g}, e_\Delta \rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^g$$

とおく. 即ち $1 \leq j \leq g$ を満たす任意の自然数に対し,

$$\langle X, e_\Delta \rangle^j = \langle x^{*j}, e_\Delta \rangle$$

と定める.

補題 V^* に属する任意の X , S に属する任意の Δ に対し,
 $\langle X, e_\Delta \rangle = 0 \in \mathbb{R}^g$ になることと, $\Delta X = X$ となることとは
 同値である.

定義 V^* の部分集合 C を次のように定義する.

$$C = \{ X \in (V^*)^g \mid \forall \Delta \in S \quad \langle X, e_\Delta \rangle \geq 0 \}$$

命題 C に属する点 X, Y , W に属する ω が与えられている
 とする. この時, $Y = \omega X$ が成り立つためには, 次の二条件
 が成り立つことが必要十分である.

i) $X = Y$

ii) 自然数 r と語 $(\Delta_1, \dots, \Delta_r) \in S^r$ が存在し, $1 \leq i \leq r$ を

満たすすべての自然数 i に対し $\Delta_i X = X$ が成り立つ.

かつ $\omega = \Delta_1 \cdots \Delta_r$ となる.

写像 $\hat{\alpha}: S \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cap [0, 8]$ が与えられたとする。このとき
 写像 $\hat{\rho}: S \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cap [0, 8]$ を, S に属するすべての δ に対し
 $\hat{\rho}(\delta) = 8 - \hat{\alpha}(\delta)$ が成り立つものとして定義する。

定義 写像 $\hat{\alpha}: S \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cap [0, 8]$ に対し, $(V^*)^2$ の部分集合
 $c(\hat{\alpha})$ を次のように定義する。

$$c(\hat{\alpha})$$

$$= \{ X \in (V^*)^2 \mid \forall \delta \in S, \exists j \in \mathbb{N} \cap [1, 8] : \langle X, e_\delta \rangle = 0, \hat{\rho}(\delta) + 1 \leq j \leq 8 + \langle X, e_\delta \rangle^{\hat{\rho}(\delta)+1} > 0 \}$$

定義 写像 $\hat{\alpha}: S \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cap [0, 8]$ に対し, $|\hat{\alpha}|, |\hat{\rho}| \in \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$
 を次のようにして定義する

$$|\hat{\alpha}| = \left\{ \sum \hat{\alpha}(\delta) \mid \delta \in S \right\}, \quad |\hat{\rho}| = \left\{ \sum \hat{\rho}(\delta) \mid \delta \in S \right\}.$$

$w \in W$ となるとき, w の長さ $l(w)$ を

$$l(w) = \min \{ r \in \mathbb{Z}_+ \mid (\delta_1, \dots, \delta_r) \in S^r, w = \delta_1 \cdots \delta_r \}$$

で定義する。

S' を S の部分集合とする。このとき S' で生成される W の部
 分群を $W_{S'}$ で表す。ここで, $S \cap W_{S'} = S'$ が成り立つ。さら
 に, $W^{S'} = \{ w \in W \mid \forall \delta \in S', l(w\delta') > l(w) \}$ とおく。自然な写
 像が, 全単射 $W^{S'} \xrightarrow{\sim} W/W_{S'}$ を与えることが知られている。

命題 $\hat{\alpha}: \hat{S} \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cap [0, 8]$ が与えられたとする。このと
 き, $c(\hat{\alpha})$ は $(V^*)^2$ の 0 を頂点とする半線型錐体となる。

また $\dim c(\hat{\alpha}) = |\hat{\alpha}|$, 従って $\operatorname{codim} c(\hat{\alpha}) = |\hat{\rho}|$ となる。

また, $c(\hat{\alpha})$ に属するすべての点 X に対し, その固定部分群

W_x は, $W_{\hat{\alpha}(0)}$ に等しい.

さらに, これらの集合の族

$$C = \{ c(\hat{\alpha}) \mid \hat{\alpha}: S \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cap [0, 8] \}$$

は, C の胞体分割

$$C = \bigsqcup \{ c(\hat{\alpha}) \mid \hat{\alpha}: S \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cap [0, 8] \}$$

をよえる

また, 上の胞体の中余次元有限となるものの全体からなる族を C_f , これに属する胞体全体の合併を C_f とする. また, C_f に属するすべての点 x の W 軌道 Wx の合併を U_f で表す. 即

$$U_f = \bigsqcup \{ w_{\hat{\alpha}} c(\hat{\alpha}) \mid \hat{\alpha}: S \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cap [0, 8], |\hat{\rho}| < +\infty, w_{\hat{\alpha}} \in W^{\hat{\alpha}(0)} \}$$

である.

命題 U_f に属する任意の二点と結ぶ線分はまた U_f に含まれる. したがって, U_f は可縮である.

以下, 写像 $\hat{\alpha}: S \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cap [0, 8]$ はすべて条件 $|\hat{\rho}| < +\infty$ を満たすものとする.

定義 写像 $\hat{\alpha}: S \rightarrow \mathbb{Z}_+ \cap [0, 8]$ が与えられたとする.

i) S に属する s が条件 $\hat{\rho}(s) = 8-1$ を満たしているとする.

このとき, $(V^*)^8$ の部分集合 $\partial_s c(\hat{\alpha})$ を次のように定める

$$\partial_s c(\hat{\alpha})$$

$$= \{ X \in (V^*)^8 \mid$$

$$\forall t \in S \quad t \neq s \quad \forall j \in \mathbb{N} \cap [1, \hat{\rho}(t)] \quad \langle X, e_t \rangle = 0 \quad \hat{\rho}(t) + 1 \leq 8 \rightarrow \langle X, e_t \rangle > 0$$

$$| t = s \quad \forall j \in N \setminus \{1, \hat{\rho}(s)+1\} \langle X, e_j \rangle = 0 \quad \}$$

ii) S に属する s が条件 $\hat{\rho}(s) \leq g-2$ を満たすものとする

このとき $(V^*)^g$ の部分集合 $\partial_s^\pm c(\hat{\alpha})$ を次のように定める

$$\partial_s^\pm c(\hat{\alpha})$$

$$= \{ X \in (V^*)^g$$

$$| t \in S \quad t \neq s \quad \forall j \in N \setminus \{1, \hat{\rho}(t)\} \langle X, e_j \rangle = 0 \quad \hat{\rho}(t)+1 \leq g \rightarrow \langle X, e_{\hat{\rho}(t)+1} \rangle > 0$$

$$t = s \quad \forall j \in N \setminus \{1, \hat{\rho}(s)+1\} \langle X, e_j \rangle = 0 \quad \hat{\rho}(s)+2 \leq g \wedge \langle X, e_{\hat{\rho}(s)+2} \rangle \geq 0 \}$$

定義 Coxeter 対 (W, S) が与えられたとき, これから定まる Coxeter 図式 Γ とは, 次の条件を満たす 1 次元単体的複体という.

$$0) \quad \Gamma_0 = S$$

$$1) \quad \Gamma_1 = \{ \{s, s'\} \subset S \mid s \neq s' \quad 3 \leq m(s, s') \}$$

定義 写像 $\hat{\alpha}: S \rightarrow \mathbb{Z}_+ \setminus \{0, g\}$ が与えられたとする. このとき, $\hat{\alpha}$ によって定義されるフィルター $\{ {}^\alpha S \mid \alpha \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0, g\} \}$ を次のように定める

$${}^\alpha S = \{ t \in S \mid \alpha \leq \hat{\alpha}(t) \}$$

定義 写像 $\hat{\alpha}: S \rightarrow \mathbb{Z}_+ \setminus \{0, g\}$ が与えられたとする. S に属する s に対し, $\alpha = \hat{\alpha}(s)$ とおく. このとき, $\Gamma \setminus {}^\alpha S \cup \{s\}$ の s を含む連結成分を ${}_\alpha \Gamma_s$, $S \cap {}_\alpha \Gamma_s$ を ${}_\alpha S_s$ と書く.

定理 $\hat{\alpha}: S \rightarrow \mathbb{Z}_+ \setminus \{0, g\}$ が与えられたとする.

W に属する u と写像 $\hat{\beta}: S \rightarrow \mathbb{Z}_+ \setminus \{0, g\}$ をとる. これらが

$$i) \operatorname{codim} (\overline{C(\hat{\alpha})} \cap u C(\hat{\beta}), \overline{C(\hat{\alpha})}) \geq 2$$

$$ii) u \in W^{\hat{\beta}(0)}$$

を満たすためには, S に属する δ が存在し, δ が以下の条件

$i_\delta), ii_\delta^+), ii_\delta^-)$ の何れかを満たすことが必要十分である.

$$i_\delta) \hat{p}(\delta) = g - 1$$

$$i_{\delta-1}) u = 1$$

$$i_{\delta-2}) \hat{\beta}(t) = \begin{cases} \hat{\alpha}(t) & t \neq \delta \\ \hat{\alpha}(\delta) - 1 & t = \delta \end{cases}$$

$$i_{\delta-3}) u C(\hat{\beta}) = \partial_\delta C(\hat{\alpha})$$

$$ii_\delta^+) \hat{p}(\delta) \leq g - 2$$

$$ii_{\delta-1}^+) u = 1$$

$$ii_{\delta-2}^+) \hat{\beta}(t) = \begin{cases} \hat{\alpha}(t) & t \neq \delta \\ \hat{\alpha}(\delta) - 1 & t = \delta \end{cases}$$

$$ii_{\delta-3}^+) u C(\hat{\beta}) = \partial_\delta^+ C(\hat{\alpha})$$

$$ii_\delta^-) \hat{p}(\delta) \leq g - 2$$

$$ii_{\delta-1}^-) u \in W_{\hat{\alpha}(\delta)} S_\delta \cap W^{S \setminus \{\delta\}}$$

$$ii_{\delta-1}^-) 2) \operatorname{ad} u^{-1}(\hat{\alpha}(\delta) S_\delta \setminus (\hat{\alpha}(\delta) S_\delta \cap \hat{\alpha}(\delta)^{-1} S)) \subset S$$

$$ii_{\delta-2}^-) \hat{\beta}(t) = \begin{cases} \hat{\alpha}(t) & t \in S \setminus \hat{\alpha}(\delta) S_\delta \\ \hat{\alpha}(\delta) - 1 & t \in \hat{\alpha}(\delta) S_\delta \setminus \operatorname{ad} u^{-1}(\hat{\alpha}(\delta) S_\delta \setminus (\hat{\alpha}(\delta) S_\delta \cap \hat{\alpha}(\delta)^{-1} S)) \\ \hat{\alpha}(\operatorname{ad} u(t)) & t \in \operatorname{ad} u^{-1}(\hat{\alpha}(\delta) S_\delta \setminus (\hat{\alpha}(\delta) S_\delta \cap \hat{\alpha}(\delta)^{-1} S)) \end{cases}$$

ii-3) $\text{codim}(\partial_{\alpha} C(\hat{\alpha}) \setminus$

$$\sqcup \{u C(\hat{\beta}) \mid u \in W, \hat{\beta}: S \rightarrow \mathbb{Z}, \wedge [0, 8] \cup [1, 1] \cup [1, 2] \cup [2, 2]\})$$

≤ 1

以下は、有限鏡映群の場合と同じ論法 [1] を用いればよい。

文 献

[1] 中村得之 有限鏡映群のある種の分解の構成

数理解析研究所講究録 1057 (1998) 56~66