

実解析解の semi-local な存在について

東京教育大 理 鈴木文夫

§ 1. 序. P を実解析多様体 M で定義された解析的係数の線形偏微分作用素とする. A を実解析函数の層, A_x を x における A の stalk とすれば, Cauchy-Kowalewski の定理により, P の principal symbol $p(x, \xi)$ が $\neq 0$ であるような点 $x \in M$ において

$$PA_x = A_x$$

が成り立つ. しかし, 一般には, これから x の任意の近傍 U に対して, x の近傍 $V \subset U$ が存在して

$$PA(V) \subset A(U)$$

となるとは言えない. 実際, Hörmander は [2, Th. 6.1.4] において次の事を証明した. P を $M \subset \mathbb{R}^n$ で定義された解析的係数の 1 階作用素とする. p と $\bar{p}$ の commutator を $[p, \bar{p}]$ とし, $c_i = i[p, \bar{p}]$ とおく.

$$p(x, \xi) = 0 \quad \text{かつ} \quad c_i(x, \xi) < 0$$

となる $(x, \xi) \in M \times \mathbb{R}^n$ が存在すると仮定する. このとき,

$\varepsilon > 0$ が存在して

$$PD'(M) \not\subset H_{\xi, \varepsilon}$$

となる. ここで $H_{\xi, \varepsilon}$ は $\{z; z \in \mathbb{C}^n, \langle \operatorname{Im} z, \xi \rangle < \varepsilon\}$ で holomorphic な関数の空間である. 後に, P. Schapira [4] は, 解析的係数の 1 階作用素 P について, 次の 2 条件が同値であることを証明した.

(a) $x \in M$ の近傍 V で, すべての $\varepsilon > 0$ に対して,

$$PB(V) \supset H_\varepsilon$$

となるものが存在する. ここで H_ε は $\{z; z \in \mathbb{C}^n, |\operatorname{Im} z| < \varepsilon\}$ で holomorphic な関数の空間である.

(b) P は x の近傍で Nirenberg-Treves の条件 (§ 2 を見よ) をみたす.

さて, M の点 a の任意の近傍 U に対して, a の近傍 $V \subset U$ が存在して

$$PA(V) \supset A(U)$$

となるとき, a の近傍で実解析解が semi-local に存在するということにしよう. ここでは semi-local な存在について, 次の定理を証明する.

定理. M の次元が 2, P の階数が 1 のとき, M の各点の近傍で実解析解が semi-local に存在するための必要十分条件は, M において Nirenberg-Treves の条件が成り立つに

とである.

§2. 準備. P は2次元実解析多様体 M で定義された解析的係数の1階偏微分作用素とする. $\tilde{M}$ を M の複素近傍とし, P を $\tilde{M}$ まで解析的に延長した作用素も P で表わす. A は M の上の実解析函数の層, $\mathcal{O}$ は $\tilde{M}$ の上の holomorphic な函数の層とする.

命題 2.1. $a \in M$ の近傍において実解析解が semi-local に存在するための必要十分条件は, a の任意の実近傍 U に対して, a の実近傍 $V \subset U$ が存在し, U の任意の複素近傍 $\tilde{U}$ に対して, V の複素近傍 $\tilde{V} \subset \tilde{U}$ で

$$P\mathcal{O}(\tilde{V}) \supset \mathcal{O}(\tilde{U})$$

となるものが存在することである.

証明. 十分性は明らか. 必要性を証明する.

$$PA(V') \supset A(U)$$

となる a の実近傍 $V' \subset U$ が存在する. $V \subset \subset V'$ となる a の実近傍 V を取る.

$$\tilde{V}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{C}^n; \operatorname{Re} x \in V, |\operatorname{Im} x| < \varepsilon\}$$

とおけば, V' の任意の複素近傍 $\tilde{V}'$ に対して, $\tilde{V}_\varepsilon \subset \tilde{V}'$

となる $\varepsilon > 0$ が存在する. 従って, U の任意の複素近傍 $\tilde{U}$ に対して,

$$\bigcup_{\varepsilon} PO(\tilde{V}_{\varepsilon}) \supset A(U) \supset O(\tilde{U}).$$

Grothendieck ([1], p.16) により, ある $\varepsilon > 0$ に対して, $PO(\tilde{V}_{\varepsilon}) \supset O(\tilde{U})$ となる.

Semi-local な問題においては, P は 0 階の項を持たないと仮定しても一般性を失わない. 以下 $P = p$ とする.

M の局所座標系を複素近傍まで解析的に延長したものを $\tilde{M}$ における実座標系と呼ぶことにする. 複素曲線 C と M との $a \in M$ における接触次数を次のように定義する:
 C が $y = g(x)$ の形に表されるような任意の a を中心とする実座標系 (x, y) について,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} g^{(j)}(0) &= 0, & j &= 0, \dots, k, \\ &\neq 0, & j &= k+1 \end{aligned}$$

であるとき, C は点 $a \in M$ において M と k 次の接触をするという. すべての j について, $\operatorname{Im} g^{(j)}(0) = 0$ のときは, 接触次数は ∞ とする. このとき C は実曲線である.

点 $a \in M$ を中心として実座標系 (x, y) を $Px \neq 0, Py \neq 0$ かつ $\operatorname{Re}(Py/Px) \neq 0$ となるように取る. t を $Pt = 0$ の解析的解で, $t(a) = 0$ かつ $dt(a) \neq 0$ となるものとする. 複素曲線 $C_t: t = \text{const}$ は P の特性曲線である.

dx と dt は独立であるから, (x, t) は a を中心とする一つの複素座標系である. この座標系においては $P = (Px)\partial/\partial x$

である。座標系 (x, y) における C_t の方程式を $y = \psi(x, t)$ とする。 x の実部を x' , 虚部を x'' とする。

$$\frac{\partial}{\partial x''} \operatorname{Im} \psi = \operatorname{Re} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \operatorname{Re} \frac{P_y}{P_x} \neq 0$$

であるから, $\operatorname{Im} \psi(x' + ix'', t) = 0$ を x'' について解いて, $x'' = \xi(x', t)$ とすることができる。以上をまとめて

命題 2.2. M の各点 a において, a の複素近傍 $\tilde{W}$ と, $\tilde{W}$ で定義された a を中心とする実座標系 (x, y) と複素座標系 (x, t) とを次のように取ることができる。

(i) $P_t = 0$,

(ii) 座標系 (x, t) により $\tilde{W}$ に対応する $\mathbb{C}^2$ の領域は,

$X \times T$, $X = X' \times iX''$, X', X'' は $\mathbb{R}$ の開区間, T は $\mathbb{C}$ の開集合, という形である。

(iii) $X' \times T$ で定義され, X'' の値を取る函数 $\xi(x', t)$ が存在し, $\tilde{W}$ においては

$$\operatorname{Im} y = 0 \iff x'' = \xi(x', t).$$

このような $\tilde{W}$ は任意に小さく取ることができる。

C_t と M が交わるとき, 接触次数を ℓ とすれば, 交点において,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \frac{\partial^j \psi}{\partial x^j} &= 0, \quad j = 0, \dots, k, \\ &\neq 0, \quad j = k+1, \end{aligned}$$

であるから,

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^j \xi}{\partial x'^j} &= 0, \quad j = 0, \dots, k, \\ &\neq 0, \quad j = k+1, \end{aligned}$$

である.

さて, M が 2次元 のとき, Nirenberg-Treves の条件 [3] は次の条件と同値である:

“ M の各点において, P の複素特性曲線と M との接触次数は偶数, 或は ∞ である.”

更に [5] において, 次の事が証明されている.

命題 2.3. M において Nirenberg-Treves の条件が成り立つための必要十分条件は, M の各点の近傍で, 特性曲線はその上に高々一つの実点しか持たないか, 或は実曲線になることである.

命題 2.2 の $\xi(x', t)$ について言えば, 上の条件は次のようにも表わせる.

(iv) 各 $t \in T$ について, x' の函数として $\xi(x', t)$ は高々 1 つの零点しか持たないか, 或は $\equiv 0$ となる.

§ 3. 十分性の証明.

M において Nirenberg-Treves の条件がみたされていると仮定する. M の点 a の任意の実近傍 U に対して, a の複素近傍 $\tilde{W}$ を命題 2.2 と 2.3 の条件をみたし, かつ $V = \tilde{W} \cap M \subset\subset U$ となるように取る.

$\tilde{W}$ の点で不等式

$$|x''| < \varepsilon, \quad |x'' - \xi(x', t)| < \varepsilon$$

にみたすものの集合を $\tilde{V}_\varepsilon$ とする. $\tilde{V}_\varepsilon$ は V の複素近傍であり, かつ U の任意の複素近傍 $\tilde{U}$ に対して, $\varepsilon > 0$ を十分小さく取れば, $\tilde{V}_\varepsilon \subset \tilde{U}$ となる. 従って, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, V の複素近傍 $\tilde{V} \subset \tilde{V}_\varepsilon$ で, $P\theta(\tilde{V}) = \theta(\tilde{V})$ となるものが存在することを証明すれば, a の近傍における semi-local な存在が言える. これを証明するには, 任意の $t \in T$ について, $\tilde{V} \cap C_t$ が単連結であることを示せば十分である [5], [6].

V の各点 b において, 次の2つの場合が考えられる:

(I) b を通る特性曲線 $C_{t(b)}$ は唯一つの実点 b を持つ.

即ち, $\xi(x', t(b))$ は唯一つの零点 $x'(b)$ を持つ.

(II) b を通る特性曲線 $C_{t(b)}$ は実曲線である.

即ち, $\xi(x', t(b)) \equiv 0$.

(I) の場合, $\zeta(x', t(b))$ の零点の次数が有限かつ奇数であることに注意すれば, $t(b)$ の開近傍 $N_b \subset T$ と $\delta(b)$, $0 < \delta(b) \leq \varepsilon$, が存在して, $t \in N_b$ のとき, $\tilde{V}_{\delta(b)} \cap C_t$ は単連結である. (II) の場合も同様な N_b , $\delta(b)$ が存在する.

$\tilde{V}_b = \bigcup \{ \tilde{V}_{\delta(b)} \cap C_t ; t \in N_b \}$, $\tilde{V} = \{ \tilde{V}_b ; b \in V \}$ とおけば, $\tilde{V}_b$ は b の開近傍, 従って, $\tilde{V}$ は V の複素近傍で, $\tilde{V} \subset \tilde{V}_\varepsilon$ である. $\tilde{V} \cap C_t = \{ \tilde{V}_{\delta(b)} \cap C_t ; N_b \ni t \}$ であるから, $\tilde{V} \cap C_t$ は単連結である.

§ 4. § 5 における必要性の証明のための準備として, 次の問題を考察する. $X_0 \subset \mathbb{C}^n$ は正則領域, X は X_0 の開部分集合, $P = \partial/\partial x_1$ とし, $P\mathcal{O}(X) \subset \mathcal{O}(X_0)$ となるための必要条件を求めろ.

$x \in X$ に対して, $X \cap \{ y \in \mathbb{C}^n ; y_i = x_i, i=2, \dots, n \}$ の連結成分で x を含むものを L_x とする. 同値関係

" $L_x = L_y$ " に関する X の商空間を X/P , 写像

$x \mapsto L_x : X \rightarrow X/P$ を π と書くことにする. X/P には π が *submersion* となるような複素多様体の構造が一意的に存在する. 但し X/P の位相は一般にはハウスドルフではない. $L_{0,x}$, X_0/P , π_0 も同様に定義する.

$c: X/P \rightarrow X_0/P$ を $c(L_x) = L_{0,x}$, $x \in X$, と定義する.
 c は local isomorphism である.

命題 4.1. X_0 が正則領域のとき, $P\mathcal{O}(X) \subset \mathcal{O}(X_0)$ ならば,
 $c^*: H^1(X_0/P, \mathcal{O}_{X_0/P}) \rightarrow H^1(X/P, \mathcal{O}_{X/P})$ は零写像である.

証明は [6] の Prop. 2.2 と同様である.

命題 4.2. Z, Z_0 は (必ずしもハウスドルフでない) 1次元複素多様体, $c: Z \rightarrow Z_0$ は local isomorphism とする.
 $c^*: H^1(Z_0, \mathcal{O}) \rightarrow H^1(Z, \mathcal{O})$ が零写像ならば,
 Z の中には次のような条件をみたす道 α, β は存在しない.

- (a) $\alpha(0) = \beta(0)$,
- (b) $c(\alpha(s)) = c(\beta(s))$, $0 \leq s < 1$,
- (c) $c(\alpha(s)) \neq c(\alpha(1))$, $c(\beta(s)) \neq c(\alpha(1))$, $0 \leq s < 1$,
- (d) $c(\alpha(1)) \neq c(\beta(1))$.

証明. 条件 (a) ~ (d) をみたす Z の中の道 α, β が存在したとする. $a = \alpha(1)$, $b = \beta(1)$, $a_0 = c(a)$, $b_0 = c(b)$ とおく. a を a_0 を中心とする局所座標, U_0 とその座標近傍とする. $V_0 = Z_0 - \{a_0\}$ とおけば, V_0 は開集合であり, (d) より, b_0 は V_0 に属する. さらに, $U_0 \cup V_0 = Z_0$ かつ $U_0 \cap V_0 = U_0 - \{a_0\}$ である. $U = c^{-1}(U_0)$, $V = c^{-1}(V_0)$ とおく. 次の可換な図式において, 行は exact

である (Mayer-Vietoris).

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}(U_0) \oplus \mathcal{O}(V_0) & \rightarrow & \mathcal{O}(U_0 \cap V_0) & \rightarrow & H^1(Z_0, \mathcal{O}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow c^* \\ \mathcal{O}(U) \oplus \mathcal{O}(V) & \rightarrow & \mathcal{O}(U \cap V) & \rightarrow & H^1(Z, \mathcal{O}) \end{array}$$

$h_0 = 1/\epsilon$ とおけば, $h_0 \in \mathcal{O}(U_0 \cap V_0)$. 従って, c^* が零写像ならば, $f \in \mathcal{O}(U)$, $g \in \mathcal{O}(V)$ が存在して, $U \cap V$ において, $f - g = c^* h_0$.

函数 u の点 z における芽を u_z と書くことにする.

$c: Z \rightarrow Z_0$ は local isomorphism であるから,

$$\tilde{c}(u_z) = (u \circ c^{-1})_{c(z)}$$

により, 写像 $\tilde{c}: \mathcal{O}_z \rightarrow \mathcal{O}_{z_0}$ を定義することができる.

$\mathcal{O}_{z_0}$ の中の道 $\tilde{\alpha}$ と $\tilde{\beta}$ を

$$\tilde{\alpha}(s) = \tilde{c}(g_{\alpha(s)}), \quad \tilde{\beta}(s) = \tilde{c}(g_{\beta(s)}), \quad 0 \leq s < 1,$$

と定義する. (b) により, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ は Z_0 の中の同じ道の上にある.

さらに, (a) より, $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$. 解析接続の一意性

により, $\tilde{\alpha}(s) = \tilde{\beta}(s)$, $0 \leq s < 1$, となる. 従って,

$$g(\alpha(s)) = g(\beta(s)), \quad 0 \leq s < 1. \quad s \text{ が } 1 \text{ に十分近いとき,}$$

$$\alpha(s) \in U \cap V, \text{ かつ } f(\alpha(s)) \rightarrow f(a), \quad g(\alpha(s)) = g(\beta(s)) \rightarrow g(b).$$

従って, $h(c(\alpha(s))) = f(\alpha(s)) - g(\alpha(s)) \rightarrow f(a) - g(b)$.

他方, $c(\alpha(s)) \rightarrow a_0$ だから, $h(c(\alpha(s))) \rightarrow \infty$. 矛盾.

§ 5. 必要性の証明.

M において Nirenberg-Treves の条件が成り立たないとする.
 M の或る点 a において, 特性曲線の接触次数 k は有限かつ奇数である. a の複素近傍 $\tilde{W}$ と座標系 (x, y) , (x, t) を命題 2.2 におけるように取る. $U = \tilde{W} \cap M$,
 $\tilde{U}_\varepsilon = \{ |x''| < \varepsilon, |x'' - \xi(x', t)| < \varepsilon \}$ とおく. $\tilde{U}_\varepsilon$ は U の複素近傍である. 命題によれば, a の任意の実近傍 $V \subset U$ に対して, $\varepsilon > 0$ が存在し, V の任意の複素近傍 $\tilde{V} \subset \tilde{U}_\varepsilon$ に対して, $PO(\tilde{V}) \not\subset O(\tilde{U}_\varepsilon)$ となることを証明すればよい. 写像 $\tilde{V}/P \rightarrow \tilde{U}_\varepsilon/P$ を χ と書く. 命題 4.1, 4.2 によれば, $\tilde{V}/P$ の中に命題 4.2 の条件 (a) ~ (d) をみたす道 α, β が存在すること可言えはよい.

(2.1) より

$$\xi(x', t' + it'') = at' + \theta t'' + cx'^{k+1}.$$

ここで, 係数 a, θ, c は (x', t', t'') の解析関数で,
 $(a_0, \theta_0) = (a(0, 0, 0), \theta(0, 0, 0)) \neq (0, 0)$, $c_0 = c(0, 0, 0) \neq 0$.
 $c_0 > 0$ としよう. $k+1$ は偶数であるから, $\tilde{W}$ を十分小さく取っておけば, 各 $t \in T$ に対して, $\xi(x', t)$ は X' において最小値を取る. $t(s) = -(a_0 + i\theta_0)s$ とおけば,
 $\min \{ \xi(x', t(s)); x' \in X' \}$ は s の単調減少関数である. 十分小さい s に対して, $\xi(x', t(s))$ は X' において 2 つの零

点 $x_1(s), x_2(s)$ ($x_1(s) < x_2(s)$) を持つ. $x_1(0) = x_2(0) = 0$ とする. (x, t) 座標が $(x_1(s), t(s)), (x_2(s), t(s))$ の点を $\alpha'(s), \beta'(s)$ とすれば, α', β' は U の中の道である. $\alpha'(0) = \beta'(0) = a$ だから, 十分小さい δ に対して, $\alpha'(s), \beta'(s) \in V, 0 \leq s \leq \delta$, である. $2\varepsilon = \min \{ \xi(\alpha', t(\delta)); \alpha' \in X' \}$ とおく. V の任意の複素近傍 $\tilde{V} \subset \tilde{U}_\varepsilon$ に対して, 射影 $\tilde{V} \rightarrow \tilde{V}/P$ を π , $\alpha(s) = \pi(\alpha'(s)), \beta(s) = \pi(\beta'(s))$ とおく. $\alpha(0) = \beta(0)$ である. $\mathcal{L}(\alpha(s)), \mathcal{L}(\beta(s))$ は $\tilde{U}_\varepsilon \cap C_{t(s)}$ の $\alpha'(s), \beta'(s)$ を含む連結成分であるから, $\mathcal{L}(\alpha(s)) = \mathcal{L}(\beta(s)), 0 \leq s < \delta$, かつ $\mathcal{L}(\alpha(\delta)) \neq \mathcal{L}(\beta(\delta))$ となる. $0 \leq s < \delta$ のとき, $t(s) \neq t(\delta)$ だから, $\mathcal{L}(\alpha(s)) \neq \mathcal{L}(\alpha(\delta)), \mathcal{L}(\beta(s)) \neq \mathcal{L}(\alpha(\delta))$. QED.

参考文献

[1] Grothendieck, A.; Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.

Memoirs Amer. Math. Soc., No. 16, 1955.

[2] Hörmander, L.; Linear partial differential operators.

Grundle. d. Math. Wiss., 116, Springer, 1963.

- [3] Nirenberg, L. and F. Treves ; Solvability of a first order linear partial differential equation.
Comm. Pure Appl. Math. 14 (1963) , 331-351.
- [4] Schapera, P. ; Solutions hyperfonctions des équations aux dérivées partielles du premier ordre.
Bull. Soc. Math. France 97 (1969) , 243-255.
- [5] Suzuki, H. ; Local existence and analyticity of hyperfunction solutions of partial differential equations of first order in two independent variables.
J. Math. Soc. Japan 23 (1971) , 18-26.
- [6] Suzuki, H. ; On the global existence of holomorphic solutions of the equation $\partial u / \partial x_1 = f$.
to appear in Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku.