

ボレル関数の分解問題への計算論の応用

An Application of Computability Theory to Decomposability Problem on Borel Functions

(Extended Abstract)

木原貴行*

TAKAYUKI KIHARA

北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

JAPAN ADVANCED INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

概要

計算可能性理論は、世に生を享けて以来 70 年以上の時を費やし、次数の構成術の研鑽を積んできた。筆者の最近の研究結果 [6] によれば、その巧緻な技術は、ついにボレル可測関数の分解問題への部分的解決を与えるまでに至った。本稿では、ボレル可測関数の分解問題を巡る 100 年の歴史の概略を述べ、筆者の研究結果 [6] についての報告を行う。

1 先行研究

1829 年にディリクレの発見した至る所不連続な関数は、条件分岐による表示 χ_Q と極限表示 $\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n}(m! \pi x)$ を持つ。前者はボレル階数 2 の条件分岐、後者はベール 2 級表示である。或いは、床関数 $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$ はボレル階数 1 の条件分岐による表示とベール 1 級の極限表示を持つ。このように、ボレル条件分岐と極限表示との間には何等かの相関があるようだ。各点極限の超限累積によるベール関数の階層とボレル可測関数の階層が正確に一致することはルベーグやハウスドルフによる研究以降よく知られている。斯くして、およそ 100 年前にロシアの数学者ニコライ・ルージンが尋ねたように、連続関数列の各点極限の累積によって表示可能な関数（ボレル可測関数）が常に可算個の条件分岐によって連続関数に分解可能かという疑問に至る。

ルージンの問題。 $\mathbb{R}$ 上の任意のボレル可測関数は可算個の連続関数に分解可能であるだろうか。

1930 年代になって、ルージンの弟子ケルディシュによって、ルージンの問題は否定的に解決された。実際、与えられた可算順序数 α に対して、如何なる可算条件分岐を持ってしても $\beta_n < \alpha$ なるベール β_n 級関数たちには分解できないような、ベール α 級関数の具体例を構成してみせたのである。1930 年代に、シエルピンスキ、そして 1950 年代には、アディヤンと、彼の師でありケル

* 本研究は JSPS 科研費の助成を受けたものである。

ディッシュの夫でもあるノヴィコフは、可算個の連続関数に分解できない下半連続関数を構成している。今や、分解不可能関数の様々な具体例が知られている ([1, 3, 7])。事実、van Mill と Pol によって、単位閉区間から実数直線への有界バール 1 級関数のなす上限ノルムによるバナッハ空間において、残留的に多くの関数は決して可算個の連続関数に分解できないことが示された。即ち、可算個の連続関数に分解可能なバール 1 級関数の族は瘦集合にしか過ぎない ([7])。

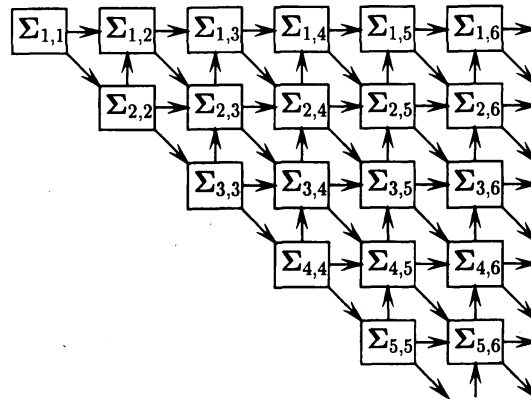
以上のように、殆どのボレル可測関数は可算個の連続関数には分解できない。しかし、ヘヴィサイドの関数やディリクレの関数を初めとして、可算個の連続関数に分解可能であるような不連続関数が多数存在しているのもまた事実である。それでは、一体如何なるボレル可測関数ならば可算個の連続関数に分解可能であるだろうか。その嚆矢となる結果として、1977 年の O'Malley [9] によるバール*1 級関数の分解定理や Császár と Laczkovich [2] による離散収束および擬正規 (QN) 収束のなすバール階層と条件分岐のボレル階層による分解可能性の階層の研究が行われた。続く目覚ましい進展は 1982 年にジェーンとロジャースによって成された以下の驚くべき定理である。

ジェーン-ロジャースの定理 ([4, 5])。距離空間の絶対ススリン- $\mathcal{F}$ 集合*1 から距離空間への関数に対して、閉集合分割によって可算個の連続関数に分解可能であることと、 Δ_2^0 -可測であることは同値である。

更なる進展は、実効記述集合論のガンディ・ハーリントン位相の手法を持ち込むことによって 1998 年に証明された 2 つのダイコトミー (二分法) である。ソレツキ [14] のダイコトミーは、可分距離空間の解析集合から可分距離空間への任意のバール 1 級関数は、可算個の連続関数に分解可能であるか、さもなければ特定の分解不可能関数を含むことを述べる。ソレツキ・ダイコトミーはバール 1 級関数に対するものであったが、2004 年に出版された Zapletal の著書 [15] において、零次元ポーランド空間のボレル部分集合上の関数に限れば、任意のボレル可測関数についてソレツキ・ダイコトミーが成立することが示された。また、2012 年になると、Motto Ros によって、可分距離空間の解析集合上定義された有限ボレル階層の関数に対してソレツキ・ダイコトミーが成立すること、Pawlikowski と Sabok によって、任意のボレル可測関数について同様の事実が得られた ([10])。

ところで、ヘヴィサイドの階段関数や床関数程度の単純な関数であれば、閉集合分割によって連続関数に可算分解可能である。しかし、ディリクレの関数ともなると然うは問屋が卸さない。あくまでディリクレの関数の条件分岐は、 Π_2^0 集合による。したがって、ジェーンとロジャースの定理ではまだ捉え切れない具体例が数多あり、より高いボレル階層への一般化が可能か否かを知らねばならない。これは、ボレル可測関数の階層の精密化への 1 つの動機となろう。関数がボレル可測であることと、任意のボレル集合の逆像がボレルであることは同値である。位相空間上の関数が $\Sigma_{\alpha,\beta}$ であるとは、任意の Σ_α^0 集合の逆像が Σ_β^0 であることとする。

*1 距離空間の部分集合がススリン- $\mathcal{F}$ であるとは、ススリンの $\mathcal{A}$ -作用素に対して、 $\mathcal{A}\Pi_1^0$ に属することであり、絶対ススリン- $\mathcal{F}$ (absolute Souslin- $\mathcal{F}$) であるとは、その距離による完備化の下でススリン- $\mathcal{F}$ であることを意味する。可分距離空間においては、絶対ススリン- $\mathcal{F}$ であることは解析的 (Σ_1^1) であることと等価である。



ジェーンとロジャースの定理は即ち $\Sigma_{2,2}$ -関数であることと閉集合分割によって可算個の連続関数に分解可能であることが等しいことを述べる. 2007 年に Andretta, 2009 年に Semmes, 2012 年には Motto Ros および Pawlikowski と Sabok によって, ジェーンとロジャースの定理の有限ボレル階層への一般化が成立するであろうという予想が提出された ([10]).

分解予想. 任意の正整数 m, n に対して, 解析空間から可分距離空間への関数が $\Sigma_{m,n}$ -関数であることと, Π_{n-1}^0 集合分割によって可算個の Σ_{n-m-1}^0 -可測関数に分解可能であることは同値である.

強一般化予想に対する唯一の本質的な進展は, 2009 年の Semmes による無限ゲーム理論を用いて示された結果である. 彼の発想の斬新な点は, 抹消ゲーム, 撤回ゲーム, 多重テープ・ゲーム等の Wadge 型ゲームの概念を優先度法と組み合わせることであった. この新たな発想に基づく複雑な手法によって, 零次元ポーランド空間上の関数について, (m, n) が $(2, 3)$ または $(3, 3)$ のとき, という極めて限定的な条件の下では, 分解予想が肯定的に示された ([11]). 2011 年には, Motto Ros によって, ボレル可測関数の可算個の単純な関数への分解可能性に関する各種の性質について, 様々な無限ゲームによる特徴付けが与えられている ([8]).

2 研究結果

筆者による研究結果は, 計算可能性理論を用いることによって, 上に述べた**分解予想**の部分的解決を与えるものである. この結果は, 以下に述べる 2 つの手法が背景にある.

1990 年の国際数学会議 (ICM) におけるセオドア・スレイマンの講演議事録 [13] によれば, 彼と W. Hugh Woodin の 2 人は, その頃, チューリング次数の理論における幾つかの重大な業績を成し遂げていた. ダブルジャンプ定義可能性定理, 次数の理論と二階算術の間の双翻訳可能性予想の提示, そして双翻訳可能性予想とチューリング次数構造のリジッド性, すなわち次数構造上の非自明な自己同型写像の非存在性との同値性証明である.

同時期に, スレイマンと彼の弟子であり, 当時ミネソタ大学の助教授であった隈部正博は, 算術的次数のある未解決問題の解決のために, 隈部-スレイマン強制法 (*Kumabe-Slaman forcing*) を導

入した. この強制法は, 1999 年のショアとスレイマンによる以下の定理の証明において本質的な役割を担う.

ショア-スレイマンの結び定理 ([12]). チャーチ-クリーネの順序数 ω_1^{CK} 未満の任意の順序数 ξ および任意のチューリング次数 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ に対して, もし任意の順序数 $\zeta < \xi$ に対して, $\mathbf{b}$ が $\mathbf{a}$ の ζ 回チューリングジャンプ $\mathbf{a}^{(\zeta)}$ 以下でないならば, $\mathbf{a}$ 以上のチューリング次数 $\mathbf{c}$ が存在して, 次の不等式を満たす.

$$\mathbf{c}^{(\xi)} \leq \mathbf{b} \oplus \mathbf{a}^{(\xi)} \leq \mathbf{b} \oplus \mathbf{c}.$$

ショアとスレイマンは, この結び定理と, スレイマン-ウッディンのダブルジャンプ定義可能性定理を組み合わせることによって, チューリング次数の半順序構造における停止問題の一階定義可能性を得た.

一方, 2012 年, de Brecht と Pauly は, ボレル可測性より良い振る舞いをする概念として, 連続的ボレル可測性の概念を提案した. 思い返せば, 位相空間上の関数 $f: X \rightarrow Y$ が $\Sigma_{\alpha, \beta}$ であるとは, 逆像を返す関数 $f^{-1}[\cdot]$ が $\Sigma_{\alpha}^0(Y)$ から $\Sigma_{\beta}^0(X)$ への関数であるということである. このような関数が連続的 $\Sigma_{\alpha, \beta}$ あるいは $\Sigma_{\alpha, \beta}^*$ であるとは, 関数 $f^{-1}[\cdot]: \Sigma_{\alpha}^0(Y) \rightarrow \Sigma_{\beta}^0(X)$ がボレル符号から与えられるベール空間の商位相の下で連続であることとする. このような位相空間上のボレル部分集合の族の上の超空間位相について, 最近, de Brecht は, 圏論による定式化を与えている.

さて, 筆者による定理の主張を述べる準備をしよう. 順序数 β と α の差 $\beta \hat{-} \alpha$ を $\delta + \alpha > \beta$ なる最小の δ によって定義する. また, クラス $\Sigma_{(\xi)}^0$ によって $\bigcup_{\zeta < \xi} \Sigma_{\zeta+1}$ を表すこととする. 位相空間が擬ポーランドであるとは, それが可算基を持ち, 完備擬距離化可能であることである. カントール空間 2^{ω} , n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$, 可算後続順序数にスコット位相を入れた空間等は, 小帰納次元が ∞ でないような擬ポーランド空間である.

ここまで導入した概念と道具を用いることによって, 木原 [6] は以下の定理を得た.

定理 (木原 [6]). X および Y を小帰納次元が ∞ でない擬ポーランド空間とする. また, $\alpha \leq \beta$ を任意の可算順序数とする. このとき, X から Y への任意の $\Sigma_{\alpha+1, \beta+1}^*$ -関数は可算個の $\Sigma_{(\beta \hat{-} \alpha)}^0$ -可測関数に分解可能である.

更に, 順序数に制限を加えることによって, 分解予想の部分的解決が与えられる.

定理 (木原 [6]). X および Y を小帰納次元が ∞ でない擬ポーランド空間とする. $\alpha \leq \beta < \alpha \cdot 2$ を満たす任意の可算順序数に対して, X から Y への任意の関数が $\Sigma_{\alpha+1, \beta+1}^*$ -関数であることと, Π_{β}^0 集合分割によって可算個の $\Sigma_{(\beta \hat{-} \alpha)}^0$ -可測関数に分解可能であることは同値である.

参考文献

- [1] J. Cichoń, M. Morayne, Universal functions and generalized classes of functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* **102** (1988) 83–89.

- [2] Á. Császár, M. Laczkovich, Discrete and equal Baire classes, *Acta Math. Hungar.* **55** (1990) 165–178.
- [3] S. Jackson, R. D. Mauldin, Some complexity results in topology and analysis, *Fund. Math.* **141** (1992) 75–83.
- [4] J. E. Jayne, C. A. Rogers, First level Borel functions and isomorphisms. *J. Math. Pures Appl.* **61** (1982), 177–205.
- [5] M. Kačena, L. Motto Ros, B. Semmes, Some observations on ‘A new proof of a theorem of Jayne and Rogers’, to appear in *Real Anal. Exchange*.
- [6] T. Kihara, Decomposing Borel functions via the Shore-Slaman join theorem, in preparation.
- [7] J. van Mill, R. Pol, Baire 1 functions which are not countable unions of continuous functions, *Acta Math. Hungar.* **66** (1995) 289–300.
- [8] L. Motto Ros, Game representations of classes of piecewise definable functions, *Math. Log. Q.* **57** (2011) 95–112.
- [9] R. J. O’Malley, Approximately differentiable functions: the r topology, *Pacific J. Math.* **72** (1977), 207–222.
- [10] J. Pawlikowski, M. Sabok, Decomposing Borel functions and structure at finite levels of the Baire hierarchy, *Ann. Pure Appl. Log.* **163** (2012) 1748–1764.
- [11] B. Semmes, *A Game for Borel Functions*, Ph.D. thesis, 2009.
- [12] R. A. Shore, T. A. Slaman. Defining the Turing jump, *Math. Res. Lett.* **6** (1999).
- [13] T. A. Slaman. Degree structures, In: *Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1990*, 303–316.
- [14] S. Solecki, Decomposing Borel sets and functions and the structure of Baire class 1 functions, *J. Amer. Math. Soc.* **11** (1998) 521–550.
- [15] J. Zapletal, *Descriptive Set Theory and Definable Forcing*, Memoirs Amer. Math. Soc., 2004.