

$R(K)$ における表現測度

早大教育 和田淳蔵 (Junzo Wada)

$R(K)$ における表現測度、とくに Arens-Singer 測度と Jensen 測度について考へる。これらの特徴付けと、その間の関係について、最近の結果を紹介することを中心にして、論じたい。

1. X をコンパクト Hausdorff 空間とし、 A を X 上の関数環とする。 M_A を A の極大イデアル空間とする。

$M_A \ni P$, σ を X 上の確率測度とする。

σ を A における P の Arens-Singer 測度であるとは

$$\log |f(P)| = \int \log |f| d\sigma \quad (f \in A^{-1})$$

となることをいう。ここで $A^{-1} = \{f \in A; f^{-1} \in A\}$ 。

また σ が A における P の Jensen 測度であるとは

$$\log |f(P)| \leq \int \log |f| d\sigma \quad (f \in A)$$

となることである。 P の Jensen 測度は、 P の Arens-Singer

測度で、かつこの2つとも、 A における ρ の表現測度となる。
すなわち

$$f(\rho) = \int f d\rho \quad (f \in A)$$

$\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ 、 A を Γ 上の disk 環のとき、

$|z| < 1$ となる z の表現測度は $\frac{1}{2\pi} P_r(\theta - t) d\theta$ ($z = re^{it}$) である。
ここで $P_r(\theta)$ は Poisson 核。

K を $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合とし、 $R(K)$ を K の外側に極をもつ有理関数全体の K 上での閉包を表わす。これはまた、 K のある近傍で解析的である関数全体の K 上での閉包と同じである。 $R(K)$ は K 上の関数環である。

ここで $M_{R(K)} = K$ となることはよく知られている。

また $P(K)$ を z の多項式全体の K 上での閉包、すなわち K 上で z の多項式で一様近似される関数全体を表わす。 $P(K)$ は K 上の関数環で $P(K) \subset R(K)$ である。

K を $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合とし、 K 上に台をもつ有限測度 ν の Cauchy 変換 $\hat{\nu}$ とは、

$$\hat{\nu}(\xi) = \int \frac{d\nu(z)}{z - \xi} \quad (\xi \in \mathbb{C})$$

を表わす。 $\hat{\nu}$ は ν と、局所的に積分可能な関数 $\frac{1}{z}$ との、たたみこみ (convolution) であって、これは $\mathbb{C}$ の測度 0 を除いた

けで定義される。

また ν の対数ポテンシャル (logarithmic potential) にマイナスをつけたものを考える：

$$V_\nu(\xi) = \int \log |z - \xi| d\nu(z) \quad (\xi \in \mathbb{C})$$

これは ν と局所的に積分可能な関数 $\log |z|$ との、たたみこみ (convolution) として、 $\mathbb{C}$ のある測度 ν の集合を除いた所で定義される。また V_ν は ν の台の外側で調和となる。

K を $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合とし、 ν を K 上の確率測度とし、 $K \ni p$ とする。 ν が $R(K)$ における p の表現測度である条件を考える。

定理 1.1. ν を K 上の確率測度とし、 $K \ni p$ とする。そのとき、つぎは同値である。

(i) ν は $R(K)$ における p の表現測度である。

$$(ii) \quad \hat{\nu}(\xi) = \frac{1}{p - \xi} \quad (\xi \in \mathbb{C} \setminus K)$$

(iii) $V_\nu(\xi) - \log |\xi - p|$ は $\mathbb{C} \setminus K$ の任意の連結成分の上で定数となる。

証明. (ii) $\rightarrow$ (iii). $\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} V_\nu = -\frac{1}{2} \hat{\nu}$. $\xi \neq z$ なる $\frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \log |\xi - z|$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\xi - z} \quad \text{であるから (ii) より}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (V(\xi) - \log |\xi - P|) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{P - \xi} - \hat{v}(\xi) \right] = 0.$$

$V(\xi) - \log |\xi - P|$ は実関数であるから、 $\mathbb{C} \setminus K$ の任意の連結成分の上で定数となり (ii) を得る。 (iii) $\rightarrow$ (ii) は明らか。

(ii) $\rightarrow$ (i). (ii) より

$$\int \frac{dv(z)}{z - \xi} = \hat{v}(\xi) = \frac{1}{P - \xi}$$

$$\text{ゆえに } \int \frac{dv(z)}{z - \xi} = \int \frac{d\delta_P(z)}{z - \xi} \quad (\text{ここで } \delta_P \text{ は } P \text{ の Dirac 測度})$$

これから $\hat{v}(\xi) - \hat{\delta}_P(\xi) = 0$ ($\xi \in \mathbb{C} \setminus K$). このことより、

$$v - \delta_P \perp R(K), \quad \text{すなわち } \int f(dv - d\delta_P) = 0 \quad (f \in R(K)).$$

ゆえに $f(P) = \int f dv$ ($f \in R(K)$) となり (i) を得る。

(i) $\rightarrow$ (ii) は明らか。

注意. この定理は [4] p.35 に見られるが、その証明に不完全な所があるので、上のように訂正した。

2. つぎに $R(K)$ における Arens-Singer 測度と Jensen 測度の特徴付けについて考えて見る。

K を $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合とする。 $H(K)$ を、 K のある近傍で調和である関数全体の $C_R(K)$ での閉包と定義する。

ここで $H(K)$ は $\log |R(K)^{-1}|$ で張られた部分空間の閉包であることがわかる。

定理 2.1 K の P , ν を K 上の確率測度とする。そのときつぎは同値である。

- (i) ν は $R(K)$ における P の Arens-Singer 測度である。
- (ii) ν は $H(K)$ 上で P を表現する。すなわち K のある近傍で調和である任意の関数 u で

$$u(P) = \int u d\nu$$

- (iii) $V_\nu(z) = \log |z - P|$ ($z \in \mathbb{C} \setminus K$)。

証明. (i) $\rightarrow$ (ii). (i) より $\int \log |f| d\nu = \log |f(P)|$ ($f \in R(K)^+$)。

ゆえに $\int u d\nu = u(P)$ ($u \in H(K)$) となり (ii) が得られる。

(ii) $\rightarrow$ (i) は明らか。

(iii) $\rightarrow$ (ii). u を $\mathbb{C}$ の上で無限回微分可能な関数でコンパクトな台を持ち、 K のある近傍で調和とする。そのとき u はそのラプラスリアンの対数ポテンシャルとして表わされる:

$$u(z) = -\frac{1}{2\pi} \iint (\Delta u)(\zeta) \log |z - \zeta| dx dy \quad (z \in \mathbb{C} \setminus K)$$

これは Green の公式から得られる。

u は K の近傍で調和であるゆえ、そこで $\Delta u = 0$ 。ゆえに

$$\int u(z) d\nu(z) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C} \setminus K} (\Delta u)(\zeta) \left[\int \log |z - \zeta| d\nu(z) \right] dx dy$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int (\Delta u)(z) \log |z-p| dx dy = u(p).$$

(ii) $\rightarrow$ (iii). $u(z) = \log |z-\xi|$ ($\xi \in \mathbb{C} \setminus K$) は K のある近傍で調和。ゆえに

$$V_\nu(\xi) = \int \log |z-\xi| d\nu(z) = \log |p-\xi|.$$

つきに $R(K)$ における Jensen 測度を考える。これは B. Cole によって与えられた。

定理 2.2. $K \ni p$, ν を K の上の確率測度とする。そのとき、つきは同値である。

(i) ν は $R(K)$ における p の Jensen 測度である。

(ii) ν はつきをみたす。

$$a) \log |\xi-p| \leq \int \log |\xi-z| d\nu(z) \quad (\xi \in \mathbb{C})$$

$$b) \log |\xi-p| = \int \log |\xi-z| d\nu(z) = V_\nu(\xi) \quad (\xi \in \mathbb{C} \setminus K).$$

(iii) u が K のある近傍で劣調和のとき

$$u(p) \leq \int u d\nu$$

証明. (i) $\rightarrow$ (ii). (ii) の a) は関数 $z \rightarrow \xi - z$ に対する Jensen の不等式を表わし、b) は ν が Arens-Singer 測度であるから明らか。

(ii) $\rightarrow$ (iii). u を K のある近傍で劣調和とする。Riesz の

分解定理により

$$u(z) = v(z) + \int \log |z - \xi| d\tau(\xi) \quad (z \in K).$$

ここで、 τ は K のあるコンパクト近傍に台をもつ正測度で、 v は K のある近傍で調和である。

Fubini の定理より

$$\begin{aligned} \int u(z) dv(z) &= \int v(z) dv(z) + \iint \log |z - \xi| dv(z) d\tau(\xi) \\ &\geq v(p) + \int \log |\xi - p| d\tau(\xi) = u(p). \end{aligned}$$

すなわち (iii) を得る。ここで (ii) b) は定理 2.1 によって K のある近傍で調和な任意の関数 v で $v(p) = \int v(z) dv(z)$ であることと同値であるという事実を用いてある。

(iii) $\rightarrow$ (i). f を K の外側に極をもつ有理関数とする。そのとき $\log |f|$ は K のある近傍で劣調和。(iii) より

$$\log |f(p)| \leq \int \log |f| dv$$

このような f の全体は $R(K)$ の中で稠密であるから、 $R(K)$ の任意の元 f で上が成り立つ。

3. さてここで $R(K)$ における Arens - Singer 測度と Jensen 測度との関係を述べる。

まず、つぎのような結果が知られている ([1])。

定理 3.1. $K \ni P$, ν を K の境界 ∂K 上の確率測度とする。
そのとき、 ν が $R(K)$ における P の Jensen 測度であることと、 ν が $R(K)$ における P の Arens-Singer 測度であることは同等である。

この定理では、 ν は ∂K 上の確率測度であるという仮定がついているが、この仮定がないときは結果は大変に複雑となる。

これについてつぎに述べていく。

いま A をコンパクト Hausdorff 空間 X 上の関数環とする。

X 上の確率測度全体を $\mathcal{M}$ とする。 S を $\mathcal{M}$ の部分集合としたとき、 S の affine completion とは、 S で生成された ω^* -閉アフファイン空間と $\mathcal{M}$ との共通部分という。これを $\hat{S}$ で表わす。 S が affinely complete であるとは、 $\hat{S} = S$ となることをいう。 $MA \ni P$ で、 P の Arens-Singer 測度全体の集合は affinely complete であることがすぐ確かめられる。

いま A における P の Arens-Singer 測度全体を $\mathcal{O}$, A における P の Jensen 測度全体の集合を $\mathcal{J}$ で表わすと、一般に $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}$ であるから、 $\hat{\mathcal{J}} \subset \hat{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ となっている。ここで $\hat{\mathcal{J}} = \mathcal{O}$ となっているかという問がある。これを $A = R(K)$ の場合に考える。

このために最初に $\mathbb{C}$ 上の *fine topology* について述べる。

$\mathbb{C}$ 上の *fine topology* とは、 $\mathbb{C}$ 上の劣調和関数すべてが連続 ($-\infty$ もとり得る実数値関数として) となるような最弱な位相をいう。 $\mathbb{C}$ 上の *fine topology* は $\mathbb{C}$ 上の普通の位相より強くなるが、つぎのような性質をもっている。

1° $\mathbb{C}$ 上の *fine topology* は局所連結位相である。ゆえに任意の *finely open* (*fine topology* で開集合) な $\mathbb{C}$ 上の集合は、互いに共通点のない *finely connected component* の高々可算個の和集合となつてゐる。

2° $\mathbb{C}$ 上の *finely open* な集合 U と $U \ni x$ に対して、 x を中心とする、いくらでも小さな円周が U に含まれる。

こゝでつぎの定理が成り立つ ([5])。

定理 3.2. K を $\mathbb{C}$ のコンパクト部分集合とする。 $\bar{U}$ を K の *fine interior* (*fine topology* に関しての内部) の *fine connected component* とし、 $U \ni p$ とする。

このとき、 $R(K)$ に関する p の Jensen 測度全体の *affine completion* は $\bar{U}$ に台をもつ $R(K)$ に関する p の Arens-Singer 測度全体と一致する。

証明。 $U \ni p$ のとき、 p の Jensen 測度の台は $\bar{U}$ に含まれることがわかる。ゆえに $R(K)$ に関する p の Jensen 測度全体の *affine completion* は、 $R(K)$ に関する p の Arens-Singer 測度

で台を $\bar{U}$ の中にもつものの全体に含まれる。

ゆえに、逆に $\bar{U}$ に台をもつ任意の Arens-Singer 測度は Jensen 測度全体で生成されたアフファイン空間の w^* -閉包の中に入ることが示されればよい。

それをつぎのように3つの部分に別けて証明する。

1° ν を $\bar{U}$ に台をもつ P の Arens-Singer 測度とすれば、 ν は $H(\bar{U})$ における P の表現測度となる。ゆえに δ_P を P の Dirac 測度とすれば

$$(*) \quad \nu - \delta_P \in H(\bar{U})^\perp$$

すなわち $\int f(d\nu - d\delta_P) = 0$ ($f \in H(\bar{U})$) となる。

さて P から発する Brown 運動の $\bar{U}$ からの first exit time を T とし、 τ を $0 \leq \tau \leq T$ となる任意の stopping time とすれば、つぎのように $\bar{U}$ の上の確率測度 σ_τ が存在する：

$$\int h d\sigma_\tau = \int h(B_\tau(\omega)) d\omega$$

ここでその Brown 運動を $\{B_t\}$ とし、Brownian path の空間の上の Wiener 測度を $d\omega$ とする。

ここで σ_τ は $R(\bar{U})$ における P の Jensen 測度であることが示せる。なんとすれば、 h を $\bar{U}$ のある近傍で有界とすれば

$h \circ B_t$ は submartingale となる。また stopping time $\tau > 0$

であるから $\int h d\sigma_\tau = \int h \circ B_\tau d\omega \geq \int h \circ B_0 d\omega = h(P)$ 。

ゆえに定理 2.2 より σ_τ は $R(\bar{U})$ における P の Jensen 測度となる。

2° つぎに h を有界 $\bar{U}$ の上で finely harmonic な $h \circ B_t$ ($t < T$) は martingale. 上と同じような論法で $h(P) = \int h d\sigma_\tau$ となる。一方 $h(P) = \int h d\delta_P$ であるから、 $\sigma_\tau - \delta_P \in H(\bar{U})^\perp$ 。

これは $H(\bar{U})$ は $\bar{U}$ で連続で、 U で finely harmonic な関数全体と一致することが知られている ([1]) ことから導かれる。

ここで $\mathcal{S}$ を $\{\sigma_\tau - \delta_P : 0 < \tau < T, \tau \text{ は stopping time}\}$ の張る線形空間とすれば、 $\mathcal{S} \subset H(\bar{U})^\perp$ となる。ここでまた $\mathcal{S}$ が $H(\bar{U})^\perp$ の中で w^* -dense となることも示される。

3°. 1° の (*) より $\nu - \delta_P \in H(U)^\perp = \overline{\mathcal{S}}^{w^*}$ ($\mathcal{S}$ の w^* -閉包) であるから、 $\mathcal{S}$ の元 $\sum_{i=1}^n \alpha_i (\sigma_{\tau_i} - \delta_P)$ で

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i (\sigma_{\tau_i} - \delta_P) \rightarrow \nu - \delta_P \quad (w^*)$$

ゆえに

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \sigma_{\tau_i} - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i - 1\right) \delta_P \rightarrow \nu \quad (w^*).$$

ところが σ_{τ_i} , δ_P はともに P の Jensen 測度となる。

このことから ν は Jensen 測度全体の affine completion の中に入ることになり、この定理は証明された。

定理 3.2 は Jensen 測度全体と Arens-Singer 測度全体との関係をある程度明らかにしているが、条件がいろいろついている。 $\mathbb{C}$ の上の fine topology に関しては、比較的いい性質があるので (たとえば [3] 参照)、この定理はまだ改良の余地はあるように思う。

参 照 文 献

- [1] A. Debiard and B. Gaveau: Potential fin et algebras de fonctions analytiques I, J. Functional Analysis, 16 (1974) 289-304.
- [2] B. Fuglede: Finely Harmonic Functions, Springer Lecture Notes in Math., 289 1972.
- [3] B. Fuglede: Fonctions harmoniques et fonctions finement harmoniques, Ann. Inst. Fourier 24 (1974) 77-91.
- [4] T. W. Gamelin: Uniform Algebras and Jensen Measures, London Math. Soc., Lecture Notes 32, 1978.
- [5] T. W. Gamelin and T. J. Lyons: Jensen measures for $R(K)$, J. London Math. Soc., 27 (1983) 317-330.