

W^* -Dirichlet algebra と Flow

都留文科大 田中 純一

早大 教育 和田 淳蔵

§1. 序.

Fonelli [1] によって導入された flow による解析性は, Fonelli 自身および Muhly 等によって かなり詳しく調べられてきた. 他方 群上の不変部分空間の理論は flow による解析性を 主要な道具として用いながら エルゴード理論の枠組で再構成されている ([3], [5]). ここでは 69 年に Fonelli によって提出された 解析測度の全変動に関する問題をとりあげ, 関数論的側面からの考察を与えてみたい. 加えていくつかの 最近の結果を紹介する.

X を compact Hausdorff 空間, (X, R) を X 上の flow, 即ち $t \in R$ に対し T_t は X から X への位相同型で $T_s \circ T_t = T_{s+t}$ および $(t, x) \mapsto T_t x$ が $R \times X$ から X への連続写像とする. $C(X)$ を X 上の連続関数の全体, $M(X)$ を X 上の有界 Baire 測度の全体と置く. このとき R 上の群代数 $L(R)$

に対し $f \in L^1(\mathbb{R})$ と $\varphi \in C(X)$, $\mu \in M(X)$ との convolution を次のように定義する.

$$\begin{aligned}\varphi \star f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(T_t x) f(t) dt, \\ \mu \star f(E) &= \int_{\mathbb{R}} \mu(T_t E) f(t) dt.\end{aligned}$$

次に $J(\varphi)$ を $\varphi \star f = 0$ となる $f \in L^1(\mathbb{R})$ の全体, 同様に $J(\mu)$ を $\mu \star f = 0$ となる $f \in L^1(\mathbb{R})$ の全体, とおくと $J(\varphi)$, $J(\mu)$ はおのれの $L^1(\mathbb{R})$ の閉 ideal となる. ここで φ の specter, $Sp(\varphi)$, を $J(\varphi)$ の hull および μ の specter, $Sp(\mu)$, を $J(\mu)$ の hull と定義する. 即ち;

$$Sp(\varphi) = \bigcap_{f \in J(\varphi)} \hat{f}^{-1}(\{0\}), \quad Sp(\mu) = \bigcap_{f \in J(\mu)} \hat{f}^{-1}(\{0\}).$$

定義 $C(X) \ni \varphi$ が解析的とは $Sp(\varphi) \subset [0, \infty)$ となること, 同様に $M(X) \ni \mu$ が解析的とは $Sp(\mu) \subset [0, \infty)$ となることをする.

解析的連続関数の全体 $\mathcal{O}$ は $C(X)$ における定数を含む閉 subalgebra となる. $\mathcal{O}_0$ を $\varphi \in \mathcal{O}$ で $Sp(\varphi) \subset (0, \infty)$ となるものの全体とすると $\mathcal{O}_0$ は $\mathcal{O}$ の ideal となる. $M(X)$ の元 μ が解析測度となる必要十分条件は $\mu \in \mathcal{O}_0^\perp$, 即ち $\mathcal{O}_0 \ni \varphi$ に対し $\int \varphi d\mu = 0$ となることが知られている ([1; Proposition 2]). $\mathbb{R} \ni t$ に対し $C(t, \infty) = \{\varphi \in C(X); Sp(\varphi) \subset (t, \infty)\}$ とおく. $M(X) \ni \sigma \geq 0$ に対し $M_t \in C(t, \infty)$ の $L^2(\sigma)$ -closure とする. このとき $\mathcal{D}(\sigma) = \bigwedge_{t < \infty} M_t \in L^2(\sigma)$ に

おける *distant future* と呼ぶ. ([1],[6],[12] 参照)

3.2. 問題の設定.

Fonelli は [1] において 解析測度の全変動は *distant future* $= (0)$ となることを示めし, F. and M. Riesz の定理を flow による解析測度へ拡張した. そして [2] において, この定理の逆が成立するか否か? という次の問題を提出した.

問題 ([2]) $M(X) \ni \sigma \geq 0$ とし $D(\sigma) = (0)$ とする. このとき σ は 解析測度の全変動となるか?

この問題に関し次のような結果が知られている.

結果 1. (Fonelli [2]) $M(X) \ni \sigma \geq 0$ とし $D(\sigma) = (0)$ とする. このとき $L^p(\sigma) \ni \varphi$ で $0 < |\varphi| \leq 1$ a.e- σ に対して $\varphi d\sigma$ が 解析的とできる.

結果 2. (Helson [4]) X を compact 可換群で σ の双対群が archimedean order を持つとする. このとき自然に X に flow が定義される. いま $M(X) \ni \sigma \geq 0$ が Haar 測度に絶対連続で $D(\sigma) = (0)$ とすると σ は 解析測度の全変動となる.

結果 3. (田中 [10]) $M(X) \ni \sigma \geq 0$ で σ は ergodic な σ の表現測度に絶対連続とする. このとき $D(\sigma) = (0)$ とすると σ は 解析測度の全変動となる.

結果 2 は 群上の不変部分空間の理論において重要な定理である, これより 「全 σ の cocycle は analytic cocycle に

cohomologeous」という結果を得，不変部分空間の分類は analytic cycle の構造を調べる問題へ転換される．また 結果 2, 3 は Segô の定理に強く 依存していることを注意する ([3] 参照)．

§3 Fonelli の定理への考察．

測度を分類する煩わしさを避けるため，ここでは σ を Dirichlet 環 (または logmodular 環) と仮定する (§5 参照)．

定理 1. $M(X) \ni \sigma \geq 0$ とする. $L^1(\sigma) \ni \varphi > 0$ および $L^\infty(\sigma) \ni \psi$ で $0 < |\psi| \leq 1$ とする. このとき $\sigma\psi$ の $L^2(wd\sigma)$ -closure, $[\sigma\psi]_{L^2(wd\sigma)}$, は $g^{-1} \in L^\infty(\sigma)$ となる要素 g をふくむ.

系 $M(X) \ni \sigma \geq 0$ とする. $D(\sigma) = (0)$ とするとある $g \in L^2(\sigma)$ に対し $g d\sigma$ が解析測度, および $g^{-1} \in L^\infty(\sigma)$ とできる.

定理 1 を証明するために 次の補題が必要となる. 証明は簡単なので省略する.

補題 1. $C_R(X) \ni u > 0$ とする. このとき $\sigma \ni f_m$ で $\| |f_m| - u \|_\infty \rightarrow 0$ ($m \rightarrow \infty$) とできる.

補題 2. $M(X) \ni \mu \geq 0$ とする. X における互いに交わりでない可測集合列 $\{K_m\}$ が 全ての m に対し;

$$\mu(K_m) > \frac{1}{2} \mu(X \setminus (K_1 \cup \dots \cup K_{m-1}))$$

とすれば,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_n) = \mu(X) \quad \text{or} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(K_n)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

となる.

定理1の証明 $d\mu = w d\sigma$ とおく. 仮定より μ と σ は互いに絶対連続となる. また

$$H_n = \{x \in X; \mu_n < |\varphi(x)| \leq 1\}$$

とすると $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} H_n) = \mu(X)$ となる. 帰納法を用いて, 次の様な compact set の列 $\{K_n\}$, および $\mathcal{O}$ における関数列 $\{f_n\}$ を作ることができる: 全ての N に対して,

$$1) \quad \left| \sum_{n=1}^N f_n \varphi \right| > \frac{1}{2} \quad \text{on} \quad K_1 \cup \dots \cup K_N,$$

$$2) \quad \mu(K_N) > \frac{1}{2} \mu(X \setminus (K_1 \cup \dots \cup K_{N-1})),$$

$$3) \quad \|f_N \varphi\|_2 < \mu(K_N)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2^N}$$

実際, 適当な n_1 に対して $\mu(H_{n_1}) > \frac{1}{2}$ とできる. Lebesgue

の定理より $H_{n_1} \supset K_1$ となる compact set を取って

$\mu(K_1) > \frac{1}{2}$ かつ φ は K_1 上で連続とできる. 補題1

から $\mu_1 < |\varphi| \leq 1$ となることより $f_1 \in \mathcal{O}$ で $|f_1 \varphi| > \frac{1}{2}$ on

K_1 , $\|f_1 \varphi\|_2 < \mu(K_1)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$ とできる. これによって K_1

および f_1 を定める. 次に互いに交わらない compact set

の列 $\{K_1, \dots, K_N\}$ と $\mathcal{O}$ の関数列 $\{f_1, \dots, f_N\}$ が 1)~3)

を満たし, φ が $K_1 \cup \dots \cup K_N$ 上で連続に取れたと仮定する.

$$E_{N+1} = \{x \in X \mid \left| \sum_{n=1}^N f_n \varphi \right| > \frac{1}{2}\} \setminus \left(\bigcup_{n=1}^N K_n \right)$$

とおく. また 十分大きい N_{N+1} に対して;

$$\mu(H_{N+1} \setminus (K_1 \cup \dots \cup K_N)) > \frac{1}{2} \mu(X \setminus (K_1 \cup \dots \cup K_N))$$

とできる. $H_{N+1} \cap E_{N+1} \supset F_{N+1}$ となる適当な compact set F_{N+1} および $H_{N+1} \setminus (E_{N+1} \cup K_1 \cup \dots \cup K_N) \supset F'_{N+1}$ となる適当な compact set F'_{N+1} を取って, ψ は $F_{N+1} \cup F'_{N+1}$ の上で連続, $\mu(F_{N+1} \cup F'_{N+1}) > \frac{1}{2} \mu(X \setminus (K_1 \cup \dots \cup K_N))$ とできる. これより

$$\min \left\{ \left| \sum_{n=1}^N f_n \psi \right| ; x \in F_{N+1} \cup K_1 \cup \dots \cup K_N \right\} = d_N (> \frac{1}{2}),$$

$$\max \left\{ \left| \sum_{n=1}^N f_n \psi \right| ; x \in F'_{N+1} \right\} (\leq \frac{1}{2}).$$

となる. 補題 1 を用いて, $\sigma(f_{N+1})$ を次の様に定める.

$$|f_{N+1} \psi| > 1 \quad \text{on } F'_{N+1},$$

$$|f_{N+1} \psi| < (d_N - \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{3} \quad \text{on } F_{N+1} \cup K_1 \cup \dots \cup K_N,$$

$$\|f_{N+1} \psi\|_2 < \mu(F'_{N+1})^{\frac{1}{2}} + 2^{-(N+1)}.$$

そこで $K_{N+1} = F_{N+1} \cup F'_{N+1}$ とおくとよい. (2), (3) を満たすことは明らか, また

$$\left| \sum_{n=1}^{N+1} f_n \psi \right| \geq \left| \sum_{n=1}^N f_n \psi \right| - |f_{N+1} \psi|$$

$$> d_N - (d_N - \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{3}$$

$$= (2d_N + \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{3}$$

$$> \frac{1}{2} \quad \text{on } K_1 \cup \dots \cup F_N \cup F_{N+1}.$$

$$\left| \sum_{n=1}^{N+1} f_n \psi \right| \geq |f_{N+1} \psi| - \left| \sum_{n=1}^N f_n \psi \right|$$

$$> 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{on } F'_N$$

これより (1) を満たすことがわかる. いま $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \psi(x)$

とわくと (3) より $g(x)$ は収束して $[O(\varphi)]_{L^2(\mu)}$ に属す。また (1) と 補題 2 より $|g(x)| \geq \frac{1}{2}$ a.e. となることが簡単に確かめられる。(証明終り)。

系の証明. Fovelli の定理 (結果 1) より $L^2(\sigma) \ni \varphi$ で $0 < |\varphi| \leq 1$ で $\varphi d\sigma$ が解析測度とできる。一方 $[O(\varphi)]_{L^2(\sigma)}$ の任意の g に対し $g d\sigma$ は解析測度となる。なぜなら適当な O の関数列 $\{f_n\}$ に対し $f_n \varphi \rightarrow g$ in $L^2(\sigma)$ より任意の $h \in O_0$ に対して $\int h f_n \varphi d\sigma = 0$ から

$$\begin{aligned} \left| \int h g d\sigma \right| &\leq \|h\|_\infty \int |f_n \varphi - g| d\sigma \\ &\leq \|h\|_\infty \cdot \|f_n \varphi - g\|_2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

これより [1; Proposition 2] より $g d\sigma$ は解析測度となる。よって 定理 1 より明らかなる (証明終り)。

(注意) 補題 1 より O の元で絶対値が $|g|$ に L^2 -norm でいくらでも近いものがある。これを quasi-invariant 測度の性質を考え合わせると Fovelli の問題はほぼ肯定的であらうと推察される。

§4. 定理 1 の応用.

ここでは 定理 1 と系を用いて 正測度が解析測度の全変動となる十分条件を考える。いま系において σ が O のある表現測度に絶対連続とすれば Segô の定理より簡単に σ は解析測度の全変動となることがわかる。

命題 2. $M(X) \ni \sigma > 0$ とする. 任意の $f \in \mathcal{O}$ に対し, 適当な invariant 関数 $\varphi_f \in [\mathcal{O}]_{L^2(\sigma)} \cap \overline{[\mathcal{O}]_{L^2(\sigma)}}$ が存在し, $f + \varphi_f \perp \mathcal{O}$ in $L^2(\sigma)$ とする. このとき $L^2(\sigma) \ni w > 0$ に対して $\mathcal{D}(wd\sigma) = (0)$ とすれば $w d\sigma$ は解析測度の全変動となる.

証明 $L^\infty(wd\sigma) \ni \varphi$ で $0 < |\varphi| \leq 1$ となり $\varphi w d\sigma$ が解析的とできる. 定理 1 より $[\mathcal{O}\varphi]_{L^2(\sigma)} \ni g$ で 適当な $\alpha > 0$ に対し $|g| > \alpha$ a.e. とできる. $-\log |g| \leq -\log \alpha$ より $\mathcal{O}$ が Dirichlet 環より $\mathcal{O} \ni f_n$ に対して;

$$\operatorname{Re} f_n \leq -\log \alpha, \quad \|\operatorname{Re} f_n - (-\log |g|)\|_2 \rightarrow 0$$

とできる. 一方 $f \in \mathcal{O}$ に対して

$$\begin{aligned} 2 \|\operatorname{Re} f\|_2^2 &= \|f + \bar{f}\|_2^2 \\ &= \|(f + \varphi_f) + (\bar{f} - \varphi_f)\|_2^2 \\ &\geq \|f + \varphi_f\|_2^2, \quad \|\bar{f} - \varphi_f\|_2^2. \end{aligned}$$

これより $\{\operatorname{Re} f_n\}$ は $L^2(\sigma)$ の Cauchy 列 となることから $\{f_n + \varphi_{f_n}\}$, $\{f_n - \overline{\varphi_{f_n}}\}$ も $L^2(\sigma)$ の Cauchy 列となり, その和 $\{f_n + i \operatorname{Im} \varphi_{f_n}\}$ もまた Cauchy 列となる. この部分列を取り各点収束させる. $\exp(f_n + i \operatorname{Im} \varphi_{f_n}) \cdot g \cdot w d\sigma$ は解析測度となることが簡単に確かめられ,

$$|\exp(f_n + i \operatorname{Im} \varphi_{f_n}) \cdot g \cdot w| \leq \frac{1}{\alpha} \cdot g \cdot w$$

および 適当な $F \in L^\infty(\sigma)$ で $|F| = |g|^{-1}$ となる関数 F に

$$\lim \exp(f_n + i \operatorname{Im} \psi_{f_n}) = F \quad \text{a.e.} - \sigma$$

これより Lebesgue の収束定理より 全ての $h \in \mathcal{O}_0$ に対し
 $\int h \cdot F \cdot g \cdot w d\sigma = 0$ となり [I: Proposition 2] より, $w d\sigma$
 を全変動とする 解析測度 $F \cdot g \cdot w d\sigma$ を得る (証明終り).

(注意) この命題の仮定をみたす例は多い. 各 orbit に一
 点で交わる可測関数が取れるとき 多くの quasi-invariant
 測度は それと同値な測度で 仮定をみたす正測度をもつ.

§5 一般の場合.

ここでは $\mathcal{O}$ を Dirichlet 環と仮定してきた. しかしこの条
 件はいくつかの考察の下に不要となる. 一般に次のことが成
 立する ([11] 参照).

(i) $M(X) \ni \sigma \geq 0$ で $\mathcal{D}(\sigma) = (0)$ とする. σ が (有限)
 invariant 測度に 絶対連続とすれば σ は解析測度の全変
 動となる.

(ii) $M(X) \ni \sigma \geq 0$ で $\mathcal{D}(\sigma) = (0)$ とする. σ が全ての
 (有限) invariant 測度に 特異とすれば $L^2(\sigma) \ni g$ で $g^* \in L^q(\sigma)$
 となり $g d\sigma$ が解析測度となる.

(iii) $M(X) \ni \sigma \geq 0$ で $\mathcal{D}(\sigma) = (0)$ とする. σ は上の二
 つの タイプ の測度に 一意に分解される.

文 献

- [1] F. Fonelli, Analytic and quasi-invariant measures, *Acta Math.*, 118 (1967), 33—59.
- [2] F. Fonelli, What makes a positive measure the total variation measure of an analytic measure? *J. London Math. Soc.* (2), 2 (1970), 713—718.
- [3] 荷見守助, 不変部分空間の理論, 岩波「数学」28巻1号 (1976), 47—57.
- [4] H. Helson, Compact groups with ordered duals IV. *Bull. London Math. Soc.* 5 (1973), 67—69.
- [5] H. Helson, Analyticity on compact abelian groups, *Algebras in analysis*, Academic Press, New York (1975), 1—62.
- [6] 泉池敬司, Flow による generalized analytic functions よりなる環の分類, 数理解析研究所講究録 (1976).
- [7] P. Muhly, Function algebras and flows, *Acta Sci. Math.* (Szeged), 35 (1973) 111—121.
- [8] P. Muhly, The distant future, *Indiana Math. J.* 24 (1974), 149—159.
- [9] J. Tanaka, Some remarks on simply invariant subspaces on compact abelian groups (to appear in *J. Math. Soc. Japan*)
- [10] J. Tanaka, A note on Helson's existence theorem, (to appear

in Proc. Amer. Math. Soc.)

- [11] J. Tanaka, A certain class of total variation measures of analytic measures (in preparation).
- [12] 富山淳, 関数環と Flow について, 岩波「数学」
28巻 1号 (1976), 35-46.
- [13] 和田孝蔵, μ ルム環, 共立出版, (1969).
- [14] 和田孝蔵, Function algebra と flow, 数理解析研究
所講究録, 232 (1975), 90-96.

<付記> この講究録を記すにあたり, 伊藤雄二先生(立
教大. 理)に多くの御助言を頂いたことを付記致
します.