

GENERA OF RIEMANN SURFACES CONSTRUCTED FROM LIGHTNING POLYGONS

大場 清・お茶の水女子大学理学部 (KIYOSHI OHBA · OCHANOMIZU UNIVERSITY)

§1. はじめに.

これは、大阪市立大学の橋本義武氏との共同研究についてのものである。我々は、閉リーマン面上の 1 点にのみ極、それも 2 位の極をもつ第 2 種アーベル微分を“dipole”と呼び、dipole 付きの閉リーマン面を具体的に構成する方法を示してきた。その 1 つ目の結果は、“井桁”を使うものであり、次は“稲妻多角形 (lightning polygon)”というガウス平面上のある種の図形を使うものであった。井桁に関しての結果は [HO1], [HO2] に、稲妻多角形に関しての結果は [O] にまとめている。(稲妻多角形に関しての結果は改めて [HO3] にまとめる予定である。)

さて、井桁からも稲妻多角形からも閉リーマン面が構成されるわけであるが、出来上がった閉リーマン面の種数は、井桁から作るときはすぐに分かるが、稲妻多角形から作るときはにわかには分からない。そこで、その求め方を紹介する。

§2. 復習.

稲妻多角形には、深度付き稲妻多角形というものもあるが、種数に関する状況はまったく同じなので、深度付きでない稲妻多角形で考えることにする。

$\mathbf{H}$ で上半平面を表し、“ n 次の稲妻”という言葉で、複素数列 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ (ただし, $a_k \in \mathbf{H}$ ($k = 1, 2, \dots, n$)) もしくは、(原点) $\rightarrow (a_1) \rightarrow (a_1 + a_2) \rightarrow \dots \rightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ と $n+1$ 個の点を結んだガウス平面上の有向折れ線を意味することとする。 σ を $1, 2, \dots, n$ の置換で、 $\sigma(1) \neq 1, \sigma(n) \neq n, \sigma(i) + 1 \neq \sigma(i+1)$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) を満たすものとする。稲妻と n 次の置換の組 $((a_1, a_2, \dots, a_n), \sigma)$ に対して、ガウス平面上で、(原点) $\rightarrow (a_1) \rightarrow (a_1 + a_2) \rightarrow \dots \rightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \rightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n - a_{\sigma(n)}) \rightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n - a_{\sigma(n)} - a_{\sigma(n-1)}) \rightarrow \dots \rightarrow (a_1 + a_2 + \dots + a_n - a_{\sigma(n)} - a_{\sigma(n-1)} - \dots - a_{\sigma(2)}) \rightarrow$ (原点) と順に点を線分で結ぶことにより、 $2n$ 角形 (のようなもの?) が得られる。こうして得られた $2n$ 角形 Γ (または、稲妻と置換の組 $\Gamma = ((a_1, a_2, \dots, a_n), \sigma)$) を、 n 次の稲妻多角形と呼ぶ。

稲妻多角形 $\Gamma = ((a_1, a_2, \dots, a_n), \sigma)$ が与えられたとき、次のように 1 点付きリーマン面を構成する。(Figure 1)

稲妻多角形の各辺を (原点) $\rightarrow (a_1)$ から順に $b_1, b_2, \dots, b_n, c_{\sigma(n)}, c_{\sigma(n-1)}, \dots, c_{\sigma(1)}$ と名付け、ガウス平面を 2 つの半直線 $-\sqrt{-1}t, a_1 + \dots + a_n + \sqrt{-1}t$ ($t \in [0, \infty)$) と n 個の辺 $b_1, \dots, b_n$ で切断し、右側の部分を D_r とする。また、ガウス平面を 2 つの半直線 $-\sqrt{-1}t, a_1 + \dots + a_n + \sqrt{-1}t$ ($t \in [0, \infty)$) と n 個の辺 $c_{\sigma(1)}, \dots, c_{\sigma(n)}$ で切断し、左側の部分を D_l とする。そして、 D_r と D_l を 2 つの半直線部分 $-\sqrt{-1}t, a_1 + \dots + a_n + \sqrt{-1}t$ ($t \in [0, \infty)$) で貼り合わせることで、1 点 (無限遠点) 付き境界付きリーマン面をつくる。さらに、その境界上の辺 b_1 と c_1, b_2 と $c_2, \dots, b_n$ と c_n を平行移動によりはり合わせることで、1 点付きリーマン面 $(R((a_1, \dots, a_n), \sigma), p_\infty)$ が構成される。これが、稲妻多角形による閉リーマン面の構成法である。このように構成すると閉リーマン面は自然な dipole をもつことになるが、今回の種数の求め方には関係ないので、あまり言及しないことにする。

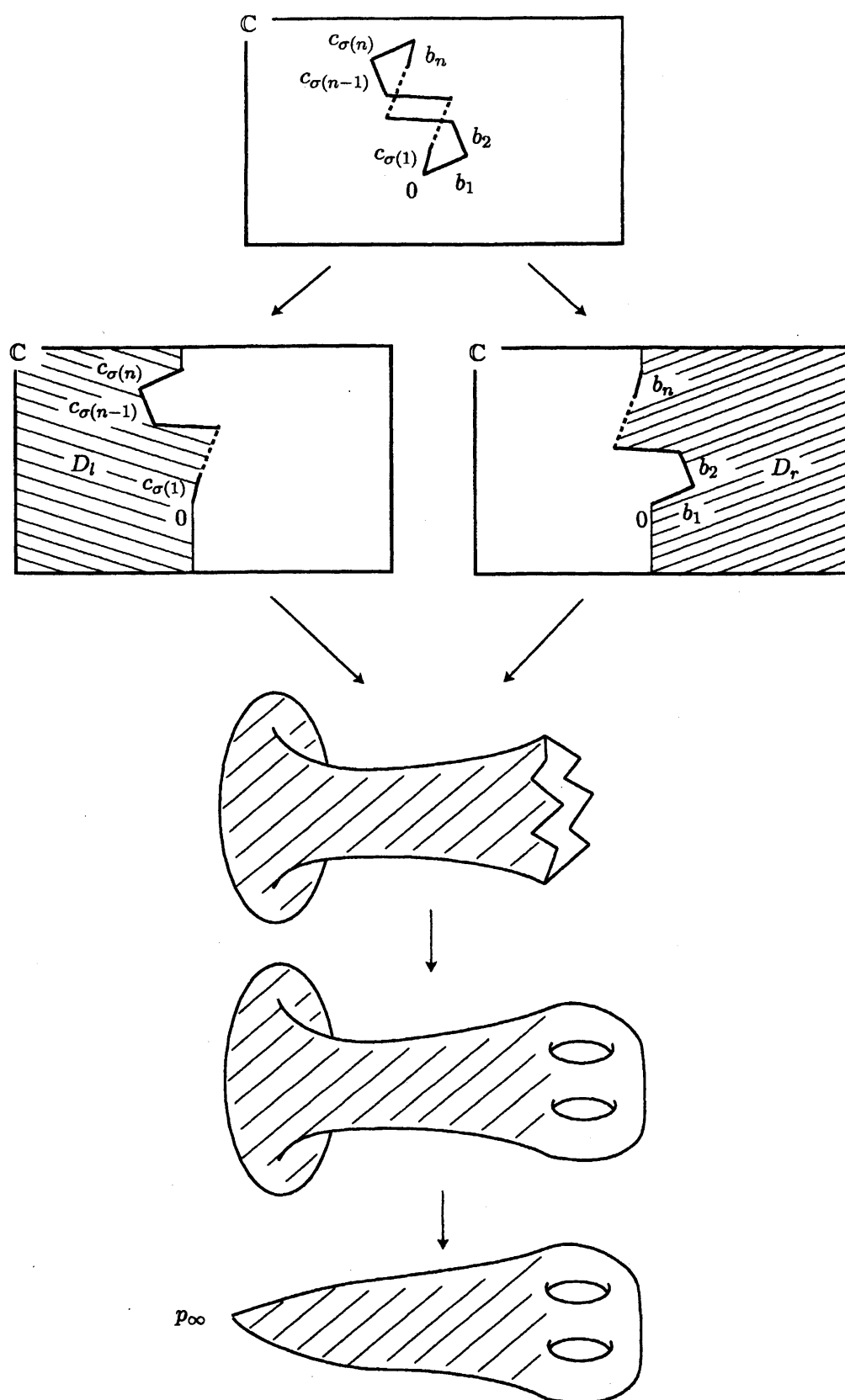


FIGURE 1. 稲妻多角形からの閉リーマン面の構成

種数を考えるには、位相のみを気かければよい。したがって、 n 次稲妻多角形において n 次対称群の元 σ のみを考えればよいことになる。そこで、Figure 2 のように稲妻多角形として $\mathbb{C}$ 上の単純閉曲線が現れるような場合のみを考える。Figure 2 では、Figure 1 のときに合わせて稲妻多角形の辺を順に $b_1, b_2, \dots, b_n, c_{\sigma(n)}, c_{\sigma(n-1)}, \dots, c_{\sigma(1)}$ とおき、頂点を $p_0 := 0$ (原点), $p_1 := a_1$, $p_2 := a_1 + a_2, \dots, p_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$, そして, $q_0 := 0$ (原点), $q_1 := a_{\sigma(1)}$, $q_2 := a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)}, \dots, q_n := a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \dots + a_{\sigma(n)}$ とおく。ここで $p_0 = q_0, p_n = q_n$ である。

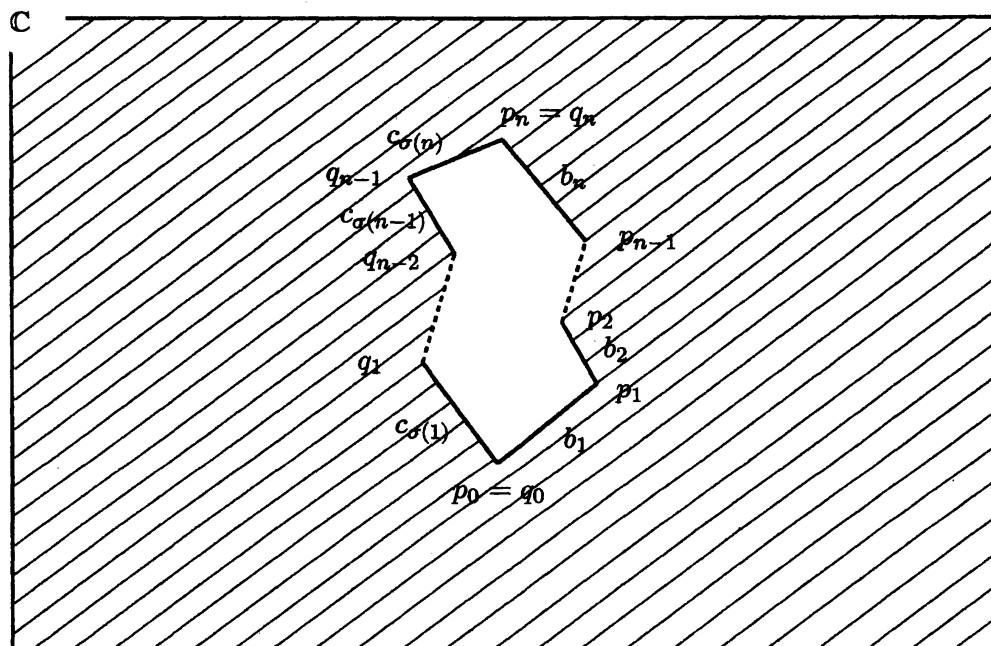


FIGURE 2

以下、Figure 2 に合わせて説明する。

稲妻多角形から閉リーマン面をつくるとき、出来上がった閉リーマン面には、稲妻多角形から自然な胞体分割が与えられていることがわかる。2-cell は 1 個で p_∞ を内点として含むものである。1-cell は $2n$ 個の稲妻多角形の辺 $b_1, b_2, \dots, b_n, c_{\sigma(1)}, c_{\sigma(2)}, \dots, c_{\sigma(n)}$ を対 (b_i, c_i) にして貼り合わせてできるもので、 n 個になることが分かる。0-cell は、稲妻多角形の $2n$ 個の頂点から得られることになるが、その個数はすぐには分からない。したがって、0-cell がいくつあるかを求めればオイラー数、したがって種数が求められることになる。

貼り合わせを考えれば、出来上がった閉リーマン面の 0-cell は稲妻多角形の $n+1$ 個の頂点 $p_0, p_2, \dots, p_n$ から、あるいは $q_0, q_2, \dots, q_n$ から全て得られることが分かる。ここで、 q_i が辺 $c_{\sigma(i)}$ の上端の頂点であることを考えると、辺 $c_{\sigma(i)}$ が辺 $b_{\sigma(i)}$ と貼り合わされることから、頂点 q_i は頂点 $p_{\sigma(i)}$ と同一視されることがわかる。(ただし、もともと同じ点である q_0 と p_0 に関して、これにより q_0 が p_0 と“同一視”されると解釈する。) 一方で、 q_i が辺 $c_{\sigma(i+1)}$ の下端の頂点であることを考えると、辺 $c_{\sigma(i+1)}$ が辺 $b_{\sigma(i+1)}$ と貼り合わされることから、頂点 q_i は頂点 $p_{\sigma(i+1)-1}$ と同一視されることがわかる。(ただし、もともと同じ点である q_n と p_n に関して、これにより q_n が p_n と“同一視”されると解釈する。)

以上から、稲妻多角形の $n+1$ 個の頂点 $p_0, p_1, \dots, p_n$ は, $q_0, q_2, \dots, q_n$ を仲介として, p_0 と $p_{\sigma(1)-1}$ が, $p_{\sigma(1)}$ と $p_{\sigma(2)-1}$ が, $\dots$, $p_{\sigma(n-1)}$ と $p_{\sigma(n)-1}$ が, $p_{\sigma(n)}$ と p_n が, 同一視されることがわかる. そして, この同一視から生成される $p_0, p_1, \dots, p_n$ の間の同値関係により得られる同値類の個数が 0-cell の個数ということになる. そこで, σ から得られる $n+1$ 次の対称群の元

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n-1) & \sigma(n) \\ \sigma(1)-1 & \sigma(2)-1 & \sigma(3)-1 & \cdots & \sigma(n)-1 & n \end{pmatrix}$$

を考えると, $\tilde{\sigma}$ を巡回置換の積に分解したときの巡回置換の個数, つまり, $\tilde{\sigma}$ の共役類に対応するヤング図形の行数 $k(\tilde{\sigma})$ が構成される閉リーマン面の 0-cell の個数となる. すなわち, 次の結果を得る.

定理 稲妻多角形 $\Gamma = ((a_1, a_2, \dots, a_n), \sigma)$ から得られる閉リーマン面 R_Γ の種数を $g(R_\Gamma)$ とすると, 次の公式から得られる. (深度付き稲妻多角形のときも同じである.)

$$2 - 2g(R_\Gamma) = k(\tilde{\sigma}) - n + 1$$

稲妻多角形から得られた胞体分割では, 各 0-cell は出来上がった閉リーマン面に付随する dipole の零点に対応している. ヤング図形の各行がその零点に対応しているわけであるが, その行に現れるボックスの数から 1 を引いたものが, その零点の位数を表している.

§4. 例.

まず, 例 1 と例 2 で, 対辺型の稲妻多角形からできる閉リーマン面の種数を考える. この場合は, 出てくるリーマン面は超楕円曲線になっている. また, 全ての超楕円曲線は対辺型の稲妻多角形から構成される.

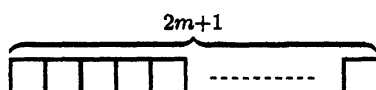
例 1 (偶数次対辺型) $2m$ 次稲妻多角形で, その対称群の元が,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2m-1 & 2m \\ 2m & 2m-1 & 2m-2 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

であるとき,

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \begin{pmatrix} 0 & 2m & 2m-1 & \cdots & 2 & 1 \\ 2m-1 & 2m-2 & 2m-3 & \cdots & 0 & 2m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & 2m-1 & 2m \\ 2m-1 & 2m & 0 & \cdots & 2m-3 & 2m-2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから, $\tilde{\sigma}$ のヤング図形は次のようになる.



したがって, 0-cell は 1 つだけ, そこでの dipole の零の位数は $2m$ で, 種数を g とすると, $2 - 2g = 1 - 2m + 1$ より $g = m$ と分かる.

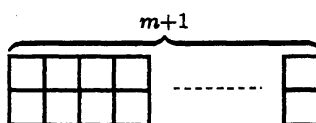
例2 (奇数次対辺型) $2m+1$ 次稲妻多角形で, その対称群の元が,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & 2m & 2m+1 \\ 2m+1 & 2m & 2m-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

であるとき,

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \begin{pmatrix} 0 & 2m+1 & 2m & \cdots & 2 & 1 \\ 2m & 2m-1 & 2m-2 & \cdots & 0 & 2m+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & 2m & 2m+1 \\ 2m & 2m+1 & 0 & \cdots & 2m-2 & 2m-1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるから, $\tilde{\sigma}$ のヤング図形は次のようになる.



したがって, 0-cell は2つで, そこでの dipole の零の位数はともに m で, 種数を g とすると, $2-2g=2-(2m+1)+1$ より $g=m$ と分かる.

対辺型でないものも1つ例を挙げておく.

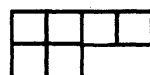
例3 5次稲妻多角形で, その対称群の元が

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

であるとき,

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

となるから, $\tilde{\sigma}$ のヤング図形は次のようになる.



したがって, 0-cell は2つで, そこでの dipole の零の位数はそれぞれ 3 と 1 で, 種数を g とすると, $2-2g=2-5+1$ より $g=2$ と分かる.

REFERENCES

- [HO1] Y. Hashimoto and K. Ohba, *Cutting and pasting of Riemann surfaces with Abelian differentials, I*, Int. J. Math. 10 (1999) 587-617
- [HO2] Y. Hashimoto and K. Ohba, *On the anti-parallel Igata construction of Riemann surfaces*, Aspects of Complex Analysis, Differential Geometry, Mathematical Physics and Applications (1999) 60-76.
- [HO3] Y. Hashimoto and K. Ohba, *Cutting and pasting of Riemann surfaces with Abelian differentials, II*, in preparation.
- [O] 大場 清 *Dipole のモジュライ空間*, 数理解析研究所講究録, vol. 1223 (2001), pp. 137-150.