

カオス多体系の引き込み現象

京大・理 神 山 保

無限自由度系に起る乱流現象を理解する一つの試みとして、小数自由度系のカオスを結合させる方法が挙げられる¹⁾。カオスを多く結合させていく事により、普遍的現象を漸近的に取り出せると思われる。例えば無限自由度系における有効次元²⁾の増減を引き込み現象の立場から理解する方向が考えられる。ここではカオス多体系に起る引き込み現象について報告する。

モデルとして、 N 個のカオスの振舞いをするサブシステムが相互作用している次の様な写像で書かれる系を考える。

$$X_i(t+1) = A_i X_i(t)(1 - X_i(t)) - \frac{D}{N} \sum_{j=1}^N (X_i(t) - X_j(t)) \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

$X_i(t)$ は i 番目サブシステムの時刻 t における変数を表す。相互作用は無限の範囲に及び引力的 ($D > 0$) とする。強い相互作用により起る現象として、1) カオス状態への引き込み、2) 相転移類似現象、3) 長時間相関が考えられる。各サブシステムがカオス状態の時、系の振舞いは初期値に敏感なので、相互作用により系が引き込み始めてもカオスにより乱され、完全な引き込みは起らないように思える。しかし、弱いカオス状態の場合、カオスによる情報の消失より早く相互作用による効果が現われ、協力現象の起る事が予想できる。そこでサブシステムの状態として間欠性カオス³⁾をとる。 $A_i \lesssim A_c = 3.828427 \dots$ で 3 周期間欠性カオスが実現する。

まず $A_i = A \lesssim A_c$ ($i=1, 2, \dots, N$) における数値計算の結果を述べる。計算した量は、 $X_1(n)$ と重心 $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(n)$ のパワースペクトル、及び重心の確率分布と分散 σ^2 である。重心の確率分布は中心極限性を表わし、すべてのサブシステムが独立なら正規分布になり、一つのカオスに引き込まれたら不変測度を示す。その際、分散 σ^2 は $O(\frac{1}{N})$ から $O(1)$ へ変化する。図 1 に σ^2 v.s. D のグラフを示す。 $N=100$ で $A=3.825$ のとき $D \sim 4 \times 10^{-3}$ で σ^2 は急激に増加し、カオスへの引き込み現象を示している。 $D > 10^{-2}$ では何種類かの 3 周期状態になる。 $X_i(n)$ や重心のパワースペクトルは、 $D=0$ の時より 3 周期性

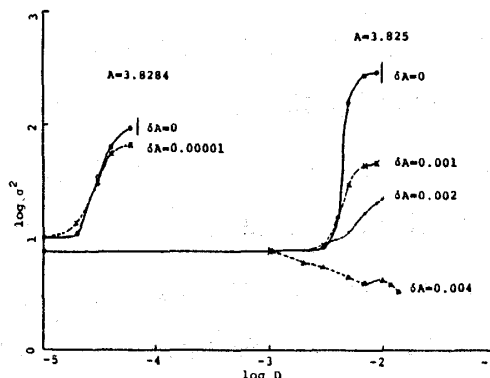


図 1. $\sum X_i$ の分散 σ^2 の D 依存性 ($N=100$)
 δA はサブシステムのパラメーター A_i のゆらぎ

が強くなり、低周波数部が少し増加する。引き込みが起る臨界点 D_c と A の関係は $D_c \propto A_c - A$ になっている。これは転移が平均場近似で記述できる事を意味している。

時刻 t における $X_i(t)$ の分布を $\rho(X, t)$ と書くと (1) 式は平均場 $\eta(t) = \int_0^1 X \rho(X, t) dX$ を用いて、

$$X_i(t+1) = f(X_i(t)) - DX_i(t) + D\eta(t) = F(X_i(t), \eta(t)) \quad (2)$$

と書ける。 $D=0$ の時、間欠性カオスであるが、 $D > D_c$ ではほぼ一定の平均場 $\eta(t)$ により安定な3周期解が生じる。2つのサブシステムの引き込まれ方は距離 $|X_i(t) - X_j(t)|$ の変化を見ればよい。(2) 式より、 $|X_i(t) - X_j(t)| \sim \exp(tL_0) \cdot |X_i(0) - X_j(0)|$ となる。 L_0 は平均場を受けた系 (2) のリャプノフ数である。安定3周期解を生じた時は $L_0 < 0$ となり、サブシステム間の距離は縮まり引き込みが起る。しかし、多くのシステムが同じカオスに引き込まれると $\eta(t)$ のゆらぎが大きくなり平均場近似は適用できなくなる。最終的に全系が一つの同じカオス状態になるかは、平均場 $\eta(t) = 0$ とした系の性質によって決まり、(2) 式では $L_0 \sim \alpha\sqrt{A_c - A} - \beta \cdot D$ が負の場合に完全な引き込みの起る事がわかる。

$D > D_c$ で起る引き込みの過渡現象について述べる。同じカオスへ縮退しているサブシステムの数 k のとき大きさ k のクラスターと呼ぶ。大きさ k のクラスター数を $n_k(t)$ とし、総クラスター数を $N(t) = \sum_{k \geq 1} n_k(t)$ と書く。時間変化を調べると次の事がわかった。

(図2) i) $N(t)$ の時間変化：初期は

$N(0) - N(t) \propto t$ と比較的早く変化するが、後期には非常に遅く減衰する。

又、 $N(t)$ の半減期 T_0 は $T_0 \propto (D - D_c)^{-3}$

なる D 依存性をもつ。ii) $n_k(t)$ の時間

変化：初期は時間にほぼ比例して増大するが、後期は指数的減衰、 $n_k(t) \propto e^{-r_k t}$ をする。 $r_k \sim \frac{r_1}{k}$ の関係が得られ、 $n_k(t) = a_k n(b_k t)$ なるスケーリング則が近似的に成立する。

各サブシステムが個性を持っている場合 ($A_i = A + \xi_i$)、同じカオスへの完全な引き込みは起らないが、類似現象が起る。 ξ_i を巾 $2 \cdot \delta A$ の一様乱数とする。重心運動の分散 σ^2 の D 依存性 (図1) より、 $A = 3.825$ の時 $\delta A < 0.002$ では $D > D_c$ で σ^2 は増大し、カオスへの部分的引き込

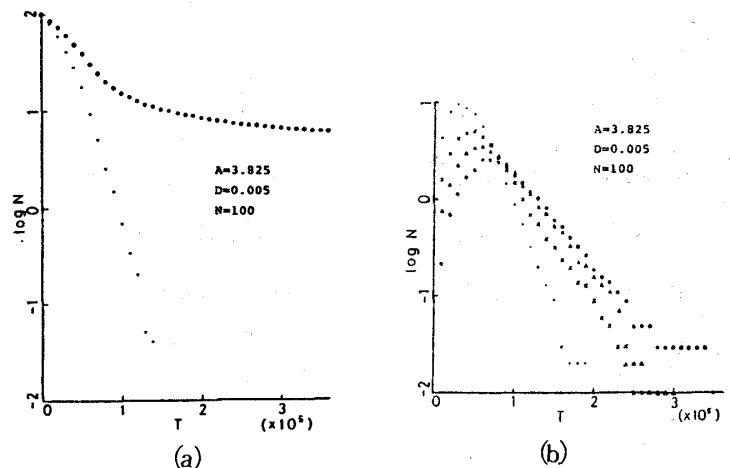


図2. クラスター数の時間変化

(a) $\circ \cdots$ 総クラスター数 $N(t)$

$\cdots$ 大きさ1のクラスター数 $n_1(t)$

(b) 大きさ k のクラスター数 $n_k(t)$

$\cdots k=2, X \cdots k=3, \Delta \cdots k=4, \circ \cdots k=5$

みが起っている。しかし、 $\delta A > 0.003$ では σ^2 は減少し始め、規則性の強くなる事がわかる。安定周期解へ転移する前には $1/f$ スペクトルが見られる。

リャプノフスペクトル $\lambda_i (i=1, \dots, N)^{4)}$ は、引き込みが起っていない時 N 個の同じ値を持つが、引き込み効果の現われた時 ($\delta A \ll 1, D > D_c$)、高次のリャプノフ数が減少する。 δA が大きいほど $\lambda_i > 0$ となる成分の数は減少し、有効次元は小さくなる。

本報告ではカオスへの引き込み現象について数値計算の結果を述べた。クラスター数の変化や、リャプノフスペクトルとの関係など理論的には不明な点が多い。微分方程式系との関連など、将来の研究に残されている。

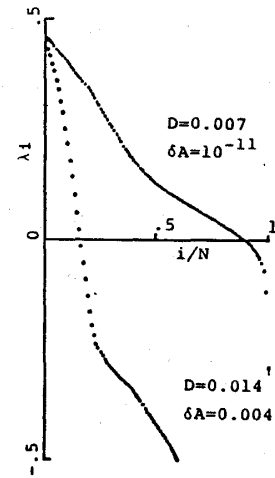


図3. リャプノフスペクトル λ_i ($A = 3.825, N = 100$)

参考文献

- 1) K. Kaneko, Prog. Theor. Phys. **72** (1984), 480.
Y. Aizawa, Prog. Theor. Phys. **72** (1984), 662.
Y. Kuramoto, To appear in Suppl. Prog. Theor. Phys. No. 79 (1984).
- 2) J. D. Farmer, Physica **4D** (1982), 366.
D. Ruelle, Commun. Math. Phys. **93** (1984), 285.
- 3) Y. Pomeau and P. Manneville, Commun. Math. Phys. **74** (1980), 189.
- 4) I. Shimada and T. Nagashima, Prog. Theor. Phys. **61** (1979), 1605.

一様カオスの安定性と intermittency

鹿大・理 藤 坂 博 一
九工大・工 山 田 知 司

次式で与えられる2次元写像を考える¹⁾

$$x_{n+1} = f(x_n) + \xi \{f(y_n) - f(x_n)\} \quad (1)$$

$$y_{n+1} = f(y_n) + \xi \{f(x_n) - f(y_n)\} \quad (2)$$