

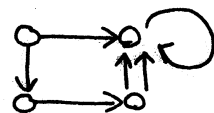
グラフの表現論における Kac の結果の紹介

東大 理学部 谷崎修一

1972年の Gabriel の論文 [5] において "グラフの表現" の概念が確立されて以来、多くの人がグラフの表現の分類問題に取り組んできたが、最近出た V. G. Kac の論文 [8] において、いわゆる Kac-Moody 型の無限 root 系と関連してかなり一般的结果が得られたので、この結果の紹介をする。

§1. グラフの表現の定義

可換体 K を Γ とし、 Γ を有限グラフとしてその頂点の集合を S_0 、辺の集合を S_1 と書く事にする。($E \in S_1$ は 2 頂点を結び、辺が 2 より以上あっては構わないし、cycle や loop があっても構わないものとする。) 次に $\Omega \in S_1$ の orientation とし、 $l \in S_1$ に対して l は a から b へ向かうとすると $d(l) = a$ 、 $t(l) = b$ と書く事にする。有向グラフ (S, Ω) が与えられたとき、category $M(S, \Omega)$ と (S, Ω) の K -



Gabriel [5] に従って次の様に定義する。

定義 (category $\mathcal{M}(S, \Omega)$)

object 各頂点 $d \in S_0$ に対し $\mathbb{Z}$ 、体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間 V_d が対応し、各辺 $e \in S_1$ に対し $\mathbb{Z}$ 線型写像 $V_{d(e)} \xrightarrow{f_e} V_{d(e')}$ が対応し $\mathbb{Z}$ であるとき、組 $(V, f) \in \text{category } \mathcal{M}(S, \Omega)$ の object である。

morphism $(V, f), (W, g) \in \mathcal{M}(S, \Omega)$ の object である。各頂点 $d \in S_0$ に対し $\mathbb{Z}$ 線型写像 $V_d \xrightarrow{g_d} W_d$ が対応し、任意の辺 $e \in S_1$ に対し $g_{d(e')} \circ f_e = g_e \circ f_{d(e)}$ が成立するとき $g = \{g_d \mid d \in S_0\} \in \text{category } \mathcal{M}(S, \Omega)$ の morphism である。

我々は category $\mathcal{M}(S, \Omega)$ の object $\mathcal{M}(S, \Omega)$ 、有向グラフ (S, Ω) の体 $\mathbb{K}$ 上の表現と呼ぶ。 $\mathcal{M}(S, \Omega)$ には自然に abelian category の構造が入り、 $(V, f), (W, g)$ に対し $\mathbb{Z}$ 直和 $(V, f) \oplus (W, g)$ は、

$$V_d = V_d \oplus W_d \quad (d \in S_0) \quad f_e = f_e \oplus g_e \quad (e \in S_1)$$

により定義される。 $\mathcal{M}(S, \Omega)$ の自明でない表現の直和に分解されない既約表現 π 直既約であることにすると、任意の表現は直既約な表現 π の有限個の直和と同型になるが、この分解は同型を除いて一意である。(この事は有限群論における

Krull-Remak-Schmidt の定理と全く同様を示すことができる。) 従って

与えられたグラフ (S, Ω) の表現の分類は、直既約表現の分類に帰着される。

§2. 実例

以下幾つかの有向グラフについて、直既約な表現がどうかをみてみよう。この節では簡単のために、体 K は代数体とする。

例1 $0 \longrightarrow 0$

(S, Ω) が上の図で表わされているとき、 (S, Ω) の表現はベクトル空間 V, W と線型写像 $V \xrightarrow{f} W$ により表わされる。 $\dim V, \dim W, \text{rank } f$ が決まれば表現は同型を除いて決まるので、直既約な表現は同型を除いて次の3個で与えられる事がわかる。

$$K \longrightarrow 0 \qquad 0 \longrightarrow K \qquad K \xrightarrow{\text{id}} K$$

例2 $0 \curvearrowright 0$

この場合はベクトル空間 V と $f \in \text{End}_K(V)$ の組を同型を除いて決めようという問題であるが、Jordan 標準形の理論により直既約な表現は、

$$K^m \curvearrowright A$$

$$A = \begin{bmatrix} c & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & c \end{bmatrix} \quad (m \in \mathbb{N}, c \in K)$$

で与えられる事になる。

例3 $0 \rightarrow 0 \leftarrow 0$

表現 $V \xrightarrow{f} W \xleftarrow{g} U$ の同型類は $\dim V, \dim W, \dim U, \text{rank } f, \text{rank } g, \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g)$ によって決まる。従って直既約な表現は同型を除いて次の6個で尽される。

$$\begin{array}{lll} \mathbb{K} \rightarrow 0 \leftarrow 0 & 0 \rightarrow \mathbb{K} \leftarrow 0 & 0 \rightarrow 0 \leftarrow \mathbb{K} \\ \mathbb{K} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{K} \leftarrow 0 & 0 \rightarrow \mathbb{K} \xleftarrow{\text{id}} \mathbb{K} & \mathbb{K} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{K} \xleftarrow{\text{id}} \mathbb{K} \end{array}$$

例4 $0 \rightrightarrows 0$

この場合は Kronecker [10] において解決されており、Gantmacher [6] に丁寧に解決されている。直既約な表現は次の様に分類される。

$$\mathbb{K}^m \xrightleftharpoons[A]{A} \mathbb{K}^m$$

ci) $m = m$

$$\bullet A = \begin{bmatrix} c & & \\ & 1 & \\ & & c \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (c \in \mathbb{K})$$

$$\bullet A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

cii) $m = m+1$

$$\bullet A = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

ciii) $m = m - 1$

$$\bullet A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

例 5 $0 \rightleftharpoons 0$

この場合表現は $\mathbb{R}^m \xrightleftharpoons[B]{A} \mathbb{R}^m$ という形で与えられるから

BA の Jordan 標準形を考える事により、 BA が m -singular あるいは nilpotent な場合のみ考えればよい事がわかる。

どちらの場合も簡単な議論から直既約な表現が決定し、次の様になる。

ci) $m = m$

$$\bullet A = \begin{bmatrix} c & 1 & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & c \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (c \in \mathbb{R})$$

$$\bullet A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

cii) $m = m + 1$

$$\bullet A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

ciii) $m = m - 1$

$$\bullet A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

例 6

この場合直既約な表現の分類はわかっている。

注意 (i) 例 4 と例 5 で直既約な表現が "似ている" 事に注

意をされた。

(ii) 例 5 で特に AB が nilpotent ($\Leftrightarrow BA$ が nilpotent) な場合の分類は Kraft-Processi [9] に応用されている。

§3. Gabriel の定理

再び R は一般の体とする。

Gabriel は [5] においてグラフの表現の概念を確立し、§2 の例 1, 3 の様に、直既約な表現が有限個しかない様なグラフを分類した。これを説明するためには、まず記号の準備をする。

記号 $S_0 = \{d_1, \dots, d_m\}$ ($i \neq j \Rightarrow d_i \neq d_j$) のとき

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z} \cdot d_i \subset \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{R} \cdot d_i \\ \Gamma_+ = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}_+ \cdot d_i \quad (\Gamma \in \Gamma \cup \mathbb{Z}_+ = \{m \in \mathbb{Z} \mid m \geq 0\}) \\ \Pi = \{d_1, \dots, d_m\} \subset \Gamma_+ \end{array} \right.$$

とおく。また $(\mathcal{V}, f) \in \mathcal{M}(S, \Omega)$ に対して

$$\dim(V, f) = \sum_{i=1}^n (\dim V a_i) \cdot d_i \in \Gamma_+$$

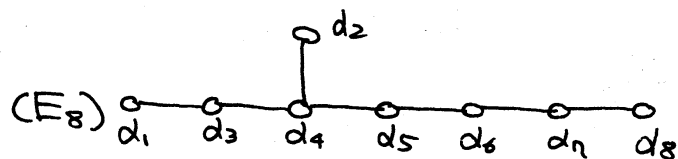
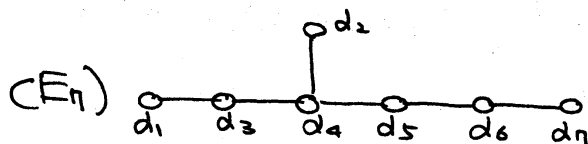
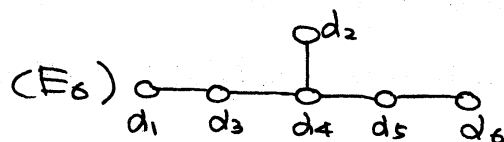
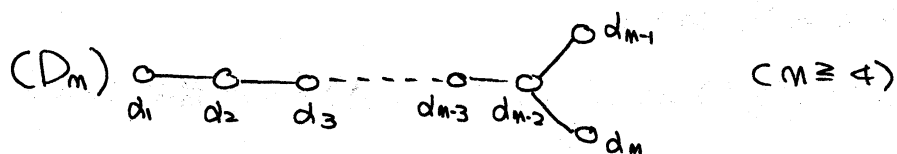
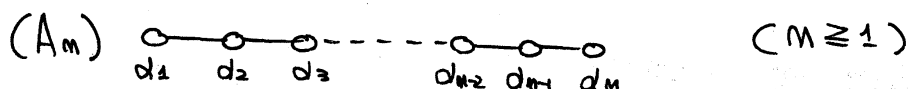
とある。

Gabriel の定理は次の様に述べられる。

定理 1 (Gabriel)

(S, Ω) を直既約な有向グラフとする。

(i) (S, Ω) の直既約な表現が同型を除いて有限個であるためには、 S が次の 11 個のうちの 1 つであることが必要十分である。



□

ii) S が E の $(A_m) \sim (E_8)$ の 11 個のいずれかであるとする。

$\Pi \in \text{base}$ とする。各 type a root 系 Δ の正 root の集合を $\Delta_+ \subset \Gamma_+$

とする。 S の勝手な orientation Ω に対して

$\{(S, \Omega)$ の直既約な表現の同型類 $\}$ と Δ^+ は自然に一対

一に対応し、この対応は $(V, f) \mapsto \dim(V, f)$ により与えら

れる。

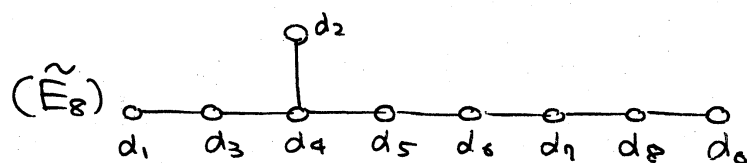
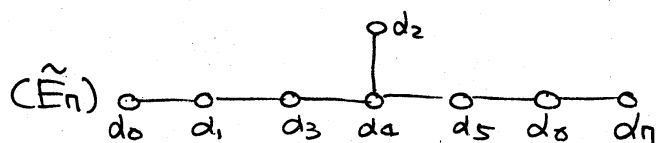
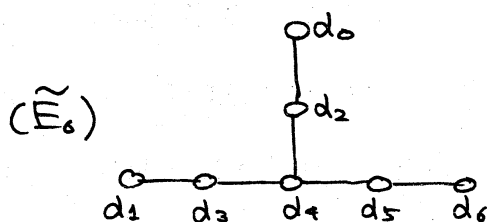
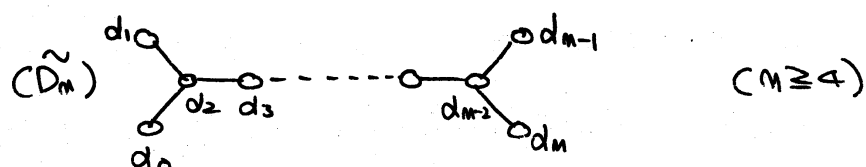
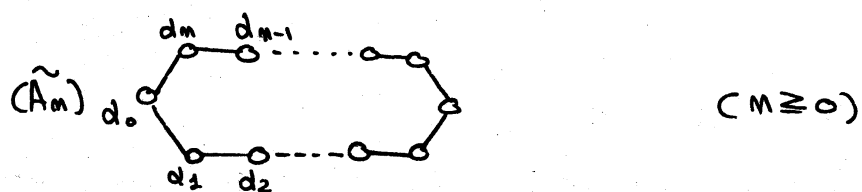
Gabriel のもとの証明は、ベクトル空間の次元や線型写像の rank 等に関する面倒な計算を case by case でやるものであるが、Bernstein-Gelfand-Ponomarev [1] により、root 系と Weyl 群の理論を用いた統一的な別証明が与えられた。尚、草場 [11] に、[1] に沿った明快な解説がある。

$(A_m) \sim (E_8)$ の各場合について直既約な表現を構成するため、Bernstein-Gelfand-Ponomarev はいわゆる reflection functor を定義し、この Weyl 群の単純鏡影に対応するものである事を用いている。この reflection functor は、その後のグラフ表現論でも主要な武器として用いられている。

尚 $(A_m), (D_n), (E_m)$ 型だけでなく Dynkin 図形 $(B_m), (C_m), (F_4), (G_2)$ の場合にも Dlab-Rimel [2][3] や Tanisaki [16] により、Gabriel の結果の一種の自然な拡張が与えられている。

§4. Gabriel 以後の発展

Gabriel の定理に現れた $(A_m), (D_m), (E_6), (E_7), (E_8)$ 型のグラフは、finite type のグラフと呼ばれている。これらの次に直既約な表現を定めるのが容易なのは、次の $(\tilde{A}_m) \sim (\tilde{E}_8)$ 2 族 type のグラフと呼ばれている。



loop がほいという条件のもとで、二つの問題の答えを与えるものである。Kacの結果を述べるために、§5, §6で少し準備をする。

§5. 直既約性。代数群論的言い換え

定義 ($M^d(S, \Omega)$, G^d)

$d = \sum_{i=1}^m m_i d_i \in \Gamma_+$ が与えられたとき、 (S, Ω) の表現 (U, f) であって、 $\forall d_i = \mathbb{R}^{m_i}$ となるものの全体を $M^d(S, \Omega)$ とかく。

$M^d(S, \Omega)$ は自然に $\mathbb{R}$ 上の有限次元ベクトル空間になる。

また

$$G^d = GL_{m_1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times GL_{m_m}(\mathbb{R}) / C$$

$$C = \{(t, 1, \dots, t, 1) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$$

とみる。

代数群 G^d はベクトル空間 $M^d(S, \Omega)$ に自然に線型に作用し、しかも $U, U' \in M^d(S, \Omega)$ が G^d の作用として同型であるためには、 G^d の作用に関して同じ軌道に含まれる必要がある。 $\mathbb{R}$ の代数閉包を $\bar{\mathbb{R}}$ とし

$$\bar{M}^d(S, \Omega) = M^d(S, \Omega) \otimes_{\mathbb{R}} \bar{\mathbb{R}}, \quad \bar{G}^d = \prod_{i=1}^m GL_{m_i}(\bar{\mathbb{R}}) / \bar{\mathbb{R}}^+(1, \dots, 1)$$

とみる。 $\bar{M}^d(S, \Omega)$ 及び $\bar{G}^d$ はそれぞれ $\bar{\mathbb{R}}$ 上の有限次元ベクトル空間、代数群で、 $M^d(S, \Omega)$ 及び G^d はそれらの $\mathbb{R}$ -有理点

全体とみわたる。

次の命題が成立する事は簡単に確かめられる。

命題 $U \in M^d(S, \Omega)$ が直既約であるためには $\bar{G}^d$ の部分群

$$(\bar{G}^d)^U = \{g \in \bar{G}^d \mid g \cdot U = U\}$$

が自明でなければ、 $\mathbb{R}$ -split torus を含む事が必要十分である。

系 $M^d(S, \Omega)$ の中、直既約な表現全体 $\in M_{\text{ind}}^d(S, \Omega)$ と書くと
き、 $M_{\text{ind}}^d(S, \Omega)$ は constructible set である。(正確には、
 $\bar{M}^d(S, \Omega)$ 中の constructible set の $\mathbb{R}$ -有理点全体)

次に $\dim(V, f) = d$ なる直既約な (V, f) の同型類がどの位あるかを示す量を定義しよう。一般に代数群 G が代数多様体 X に作用してゐるとする。 X が X に含まれる G -不変な constructible set とすると Rosenlicht の定理 [14] により次の事がわかる。

命題 X の locally closed subset $X_1, \dots, X_m$ ($m < +\infty$) が存在して $X = \bigsqcup_{i=1}^m X_i$ かつ X_i は G -不変でしかも geometric quotient X_i/G が存在する。また $M(X) = \max_{i=1, \dots, m} \dim(X_i/G)$ は上の分解のとり方によらずに決まる。

$M_{\text{ind}}^d(S, \Omega)$ は constructible set であるから G -不変な α で

上の命題の様な分解が存在する。

$$\text{記号 } \mathcal{M}_a(S, Q) := \mathcal{M}(\mathcal{M}_{\text{ind}}^a(S, Q))$$

注意 上の事がわかる様に、グラフの表現を決定する問題は、代数群の表現空間を軌道分解する問題と密接に結びついている。 G^a の表現空間である $\mathcal{M}^a(S, Q)$ はグラフ表現論との関連を離れなくても興味深い空間で、例えば S が cycle を含んでいるときには、Sato-Kimura [15] の意味での概均質ベクトル空間になっている。(ただし既約ではない。) Kac はこの空間の上で不変理論を展開する事を提唱し、reflection functor の一般化 (Sato-Kimura [15] の casting transformation の一般化にもなっている。) を使った計算をしているが、あまり成功はしていない様である。なお最近 Ringel [13] においてグラフが tame type の場合に幾つかの結果が得られている。

§6. Kac-Moody 型無限 root 系

以下次の仮定をおく。

(★) グラフ S は loop (両端の頂点が一致する様な辺) を含まない

定義 Γ に対して次の様にして定義された行列

$A = (a_{ij}) \in M_m(\mathbb{Z})$ を Γ に付随する対称な Cartan 行列と
いう。

$$\begin{cases} a_{ii} = 2 \\ a_{ij} = a_{ji} = - (d_i \text{ と } d_j \text{ が結ぶ辺の数}) & (i \neq j) \end{cases}$$

Kac の定理を述べるために、Cartan 行列 A を含む Kac-Moody 型 Lie 環に対応する無限 root 系の概念を必要とする。
これは本講義録中の小池和彦氏の報告、また Lie 環論を
使った公理的定義については、同じく森田純氏の報告を参
照したい。ここではその公理的定義及び基本的性質を必要
最小限の範囲で述べておく。

定義 $\Gamma = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z} \cdot d_i$, $\Gamma_+ = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}_+ \cdot d_i$, $\Pi = \{d_1, \dots, d_m\}$ とする。

このとき、次の性質 (i) (ii) (iii) を満たす Γ_+ の部分集合 Δ_+ が
ただ一つ存在し、これを Cartan 行列 A に対応する root 系とい
う。

$$(i) \quad \Pi \subset \Delta_+ \subset \Gamma_+, \quad 2d_i \notin \Delta_+ \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$(ii) \quad d = \sum_j b_j d_j \in \Delta_+ - \{d_i\} \text{ に対して } \exists p, \exists q \in \mathbb{Z}_+ \text{ が存在して}$$

$$\bullet \quad p - q = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_j$$

$$\bullet \quad d + b d_i \in \Delta_+ \iff -p \leq b \leq q$$

$$(iii) \quad \forall d \in \Delta_+ - \Pi \text{ に対して } \exists d_i \in \Pi \text{ にとり } d - d_i \in \Delta_+$$

定義 Tits form と呼ばれる Γ 上の二次形式 ε

$(d_i, d_j) = \frac{1}{2} a_{ij}$ で定義する。また Γ 上の直交鏡影 $r_i \in$

$r_i(d_j) = d_j - a_{ij} d_i$ により定義し $W = \langle r_i \mid i=1, \dots, m \rangle \in$

Weyl 群 と 113。

記号

$$\Delta_+^{re} = \left\{ d \in \Gamma_+ \mid \exists i_1, \dots, \exists i_B \text{ s.t. } r_{i_1} \dots r_{i_B}(d) \in \Pi, r_{i_1} \dots r_{i_B}(d) \in \Gamma_+ - \Pi \right\}$$

(1 \leq s \leq B)

$$M = \left\{ d = \sum_{i=1}^m b_i d_i \in \Gamma_+ \mid \sum_{j=1}^m a_{ij} b_j \leq 0 \ (\forall i) \text{ かつ } \{d_i \mid b_i \neq 0\} \text{ は基底部分列} \right\}$$

(基底部分列)

$$\Delta_+^{im} = \bigcup_{w \in W} w(M)$$

命題

i) $\Delta_+ = \Delta_+^{re} \cup \Delta_+^{im}$ (disjoint union)

ii) $d \in \Delta_+$ に対して $d \in \Delta_+^{re} \iff (d, d) = 1$

$d \in \Delta_+^{im} \iff (d, d) \leq 0$

§7. Kac の定理

定理 2 (Kac)

(S, Ω) が仮定 (4) を満たす有向グラフであるとする。

前節の様に Γ を Cartan 行列 A 及び α の正 root 系 Δ_+ と定める。

このとき

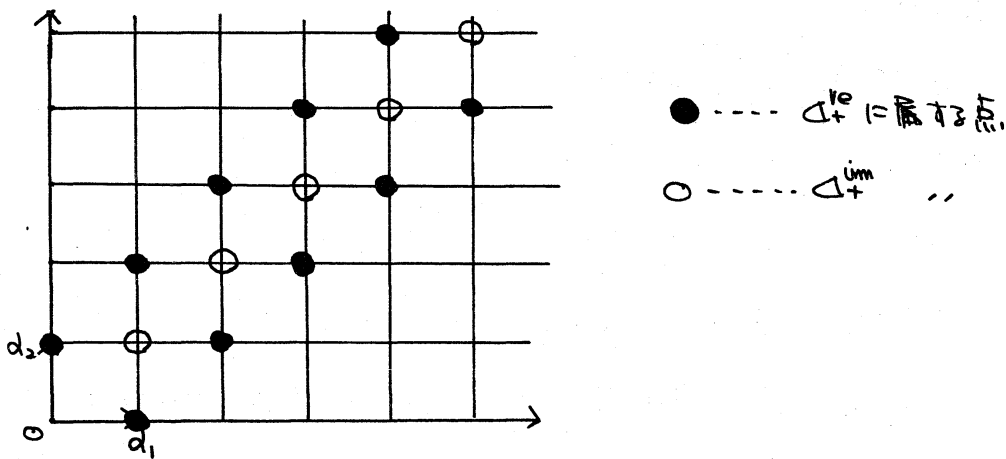
ci) $d \in \Gamma_+$ に対して, $\dim(V, f) = d \in \Gamma_+$ とする直既約な表現 (V, f) が存在するためには, $d \in \Delta_+$ とする事が必要十分である。

cii) $d \in \Delta_+^{re}$ のとき $\dim(V, f) = d$ とする直既約な表現 (V, f) が同型を除いて唯一存在する。

ciii) $d \in \Delta_+^{im}$ のとき $\mu_A(S, \Omega) \geq 1 - (A, d) \geq 1$ である。従って特に良代数体ならば, $\dim(V, f) = d$ とする直既約な (V, f) の同型類は, (連続 $\mathbb{R}$ $\times$ $\mathbb{A}^1$ を含んで) 無限個ある。

例 S が $0 \rightrightarrows 0$ と表わされるとき, S の Cartan 行列は

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ とする。このとき Δ_+ は次の図で表わされる。



S に対する orientation Ω を表わすには, 次の2種類

(a) $0 \rightrightarrows 0$ (b) $0 \leftrightsquigarrow 0$

があるが, 11 通りの場合も定理の成立してゐる事は §2 の

例 4, 5 が示される。さらにこの場合 $d \in \Delta_+^{\text{im}}$ のとき

$\mu_a(S, \Omega) = 1 - (d, d) = 1$ である。(実は一般に Tamura Type a と
きは、 $d \in \Delta_+^{\text{im}}$ に対して $\mu_a(S, \Omega) = 1 - (d, d) = 1$ である事が知
らる。)

はじめの Kac の論文の preprint では、定理 2 は次の予想
modulo ϵ と $\text{ch}(\mathcal{B}) = 0$ のときにより証明されている。
以下。

予想 $\text{ch} \mathcal{B} = 0$ かつ $\mathbb{K}$ は代数体とする。 $G \subset GL(V)$ が
 $\mathbb{K}$ 上の代数群であるとき

$$V_0 = \{v \in V \mid G^v \text{ は自明でない Torus を含む}\}$$

とある。

$$\mu(V_0) = \mu((V^+)_0)$$

である。

この予想は現在でも解決されていない。しかし雑誌に出た
論文では preprint の方法とは別の方法で定理 2 が証明されて
いる。それは次の様な方針で行なわれる。

まず $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ (有限体) の場合に定理 2 をもっと精密にし
て証明する。 $\mathbb{K}$ が一般の標数 $p > 0$ の体のときは適当な
specialization により有限体の場合に帰着させる。標数 0 の

体 α と $\mathbb{F}$ は、 $\text{mod } p$ の reduction を標数 p の場合に帰着させる。
 Γ の表現は、素体 $\mathbb{F}$ 上有限生成 $\mathbb{F}$ 体 α の $\mathbb{F}$ 上定義されている
 ので、specialization ある $\mathbb{F}$ は $\text{mod } p$ の reduction と $\mathbb{F}$ 上の事が意
 味を持つのである。しかしこれは原論文を参照した $\mathbb{F}$ 。

参考文献

- [1] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand, V. A. Pomomarev :
 Coxeter functors and Gabriel's theorem.
 Uspechi Mat. Nauk 29 (1973) 19-33
- [2] V. Dlab, C. M. Ringel : On algebras of finite representation
 type
 J. Algebra 33 (1975) 306-394
- [3] V. Dlab, C. M. Ringel : Indecomposable representations of
 graphs and algebras.
 Memoirs of A.M.S. 173 (1976)
- [4] P. Donovan, M. R. Freislich : The representation theory of
 finite graphs and associated algebras.
 Carleton Math. Lec. Notes 5 (1973)
- [5] P. Gabriel : Unzerlegbare Darstellungen I.

Manuscripta Math. 6 (1972) 71-103

[6] F. R. Gantmacher : The theory of matrices.

Moscow (1953) 英訳 New York (1959)

[7] I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev : Problems of linear Algebras and classification of quadruples of subspaces in a finite-dimensional vector space.

Coll. Math. Soc. Bolyai Tihany (Hungary) 5 (1970) 163-237

[8] V. G. Kac : Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory.

Inventiones math. 56, 57-92 (1980)

[9] H. Kraft, C. Procesi : Closures of conjugacy classes of matrices are normal.

Inventiones math. 53, 227-247 (1979)

[10] L. Kronecker : Algebraische Reduktion der Scharen bilinearer Formen.

Sitzungsber. Akad. Berlin 763-776 (1868)

[11] 草場公邦 : 行列特論

蘆華房 (1979)

[12] L. A. Nazarova : Representations of quadruples of infinite type.

Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 37 (1973) 752-791

[13] C. M. Ringel : The rational invariants of the tame quivers.

Inventiones Math. 58, 217-239 (1980)

[14] Rosenlicht : A remark on quotient spaces.

Am. Acad. Brasil cienc. 35 (1963) 487-489

[15] M. Sato , T. Kimura : A classification of irreducible prehomogeneous spaces and their relative invariants.

Nagoya Math. J. 65 (1977) 1-155

[16] T. Tanisaki : Foldings of root systems and Gabriel's theorem.

To appear in Tsukuba J. Math.