

Cycle Indexes, Symmetric Functions and Exponential Formulas (1)

東海大・理 成嶋 弘 (Hiroshi Narushima)

前回 (1987年10月) の数解研集会で述べなかった、古典的
数之上げ組合せ論の中心の1つである置換群による同値類の
数之上げ論を cycle index (輪指標または巡回置換指数と
訳されている) との関連で述べ、次に対称式に関する Waring
の公式の母関数論的扱いを述べる。対称群の cycle index お
よび Waring の公式の母関数が指数公式 (exponential formula:
 $H = \exp F$) の形になっていることに注目し、指数公式の分
割に関する一般的定理を述べ、この定理から先の母関数を導
く。最後に、指数公式の接合代数 (incidence algebra) や
カテゴリーの枠組での扱い、および cycle index の一般化
とその応用にもふれる。

§1 置換群作用の数之上げの定理と Cycle Index

Cauchy - Frobenius の補題 (この補題は、歴史的経緯

が P. M. Neumann [1] によって正しく指摘されるまでは、Burnside の補題と呼ばれていた) に始まる一連の置換群作用の数え上げの定理 [2 ~ 5] を、cycle index との関連で述べる。

G を有限集合 Ω 上の置換群とする。 Ω の任意の要素 x, y に対して、 G の要素 α が存在し $\alpha(x) = y$ となる α が、 $x \equiv y$ と定める。 Ω 上のこの同値関係 $\equiv$ による同値類を G の軌道と呼び、 Ω の要素 x を含む軌道を O_x で表わし、 G の軌道全体、すなわち、 G による Ω 上の同値類全体を Ω/G で表わす。また、 Ω の要素 x を不変に保つ G の要素の集合 $\{\alpha \in G \mid \alpha(x) = x\}$ を G_x で表わし、逆に、 G の要素 α によって不動である Ω の要素の集合 $\{x \in \Omega \mid \alpha(x) = x\}$ を Ω_α で表わす。このとき、 G_x と Ω_α は Ω と G の間の関係 $\alpha(x) = x$ によって誘導される対応であること、および G_x は G の部分群で $|G_x| \cdot |O_x| = |G|$ が成立することより、次の公式を得る。

Cauchy-Frobenius の補題 $\alpha \in G$ を互いに素な巡回置換の積で表わしたときの長さ i の巡回置換 (α のグラフの長さ i の輪) の個数を $c_i(\alpha)$ で表わすとき、

$$(1) \quad |\Omega/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha \in G} |\Omega_\alpha| = \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha \in G} c_1(\alpha)$$

が成立する。

次に、有限集合 A から有限集合 B への写像の全体 $\mathcal{F}(A, B)$ を考える。 A, B 上の置換群をそれぞれ $G(A), G(B)$ で表す。 $\mathcal{F}(A, B)$ の要素 f, g に対して、直積群 $G(A) \times G(B)$ の要素 (α, β) が存在し、 $\beta(f(a)) = g(\alpha(a))$ ($\forall a \in A$) となるとき、 f と g は ($G(A) \times G(B)$ に関して) 同値パターンまたは 図式 (schemata) であるという。ここで、 $G(A) \times G(B)$ によって誘導される $\mathcal{F}(A, B)$ 上の置換群は $G(A) \times G(B)$ と同一視できるので、同値関係 $\sim$ による同値類 (軌道) の集合 $\mathcal{F}(A, B) / G(A) \times G(B)$ を考える。はじめに、 $G(A) \times G(B)$ の要素 (α, β) のもとで不動である写像 $f \in \mathcal{F}(A, B)$ の集合 $\mathcal{F}(A, B)_{(\alpha, \beta)}$ に対して、次式を得る。

$$(2) \quad |\mathcal{F}(A, B)_{(\alpha, \beta)}| = \prod_{1 \leq i \leq l} \left(\sum_{j \geq 1} j d_j \right)^{c_i}$$

ただし、 c_i, d_i はそれぞれ α, β の長さ i の輪の個数である。式 (1) と (2) より、次の公式を得る。

$$(3) \quad |\mathcal{F}(A, B) / G(A) \times G(B)| = \frac{1}{|G(A) \times G(B)|} \sum_{(\alpha, \beta)} \prod_{1 \leq i \leq l} \left(\sum_{j \geq 1} j d_j \right)^{c_i}$$

この公式は、化学構造、グラフ、およびオートマトンなど有限写像系の“同型”でないものの数え上げに本質的な役割を

果すものである。

置換群 G の cycle index (Redfield [3] は group reduction function と名付けた) $Cyc(G)$ とは、次式によって定めらる "多変数" 多項式のことである。

$$(4) \quad Cyc(G) = \frac{1}{|G|} \sum_{\alpha \in G} x_1^{c_1} x_2^{c_2} \cdots x_n^{c_n}$$

ただし、 c_i は α の長さ i の輪の個数であり、 n は十分大きくとるものとする。

先に述べた $\mathcal{F}(A, B)$ 上の図式関係 $\sim$ で、特に、 B 上の置換群 $G(B)$ が単位元 e のみの場合を考える。ここで、 $G(A) \times \{e\}$ を $G(A)$ と同一視する。 B の各要素 b に対して、ある 重み (weight) $w(b)$ (b の適当な表示式でその全体は環をなすもの) を対応させ、 $f \in \mathcal{F}(A, B)$ の重み $W(f)$ を $\prod_{a \in A} w(f(a))$ によって定める。このとき、 $\mathcal{F}(A, B)/G(A)$ の f を含む図式 (軌道) $[f]$ の重み $W([f])$ を $W(f)$ で定めることができる ($f, g \in [f]$ ならば $W(f) = W(g)$ に注意せよ)、次の公式が成立する。

Pólya-Redfield の定理

$$(4) \quad \sum_{[f] \in \mathcal{F}(A, B)/G(A)} W([f]) = Cyc(G(A)) \left(x_i \rightarrow \sum_{b \in B} (w(b))^i \right)$$

ただし、 $x_i \rightarrow \sum_{b \in B} (w(b))^i$ は x_i に $\sum_{b \in B} (w(b))^i$ を代入することを示す。

特に、 $w(b) = 1$ ($\forall b \in B$) とする、次の公式を得る。

$$(5) \quad |\mathcal{F}(A, B)/G(A)| = \text{Cyc}(G(A))(x_i \rightarrow |B|)$$

これは公式(3)において、 $G(B) = \{e\}$ と置くとき、 $d_1 = |B|$ 、 $d_i = 0$ ($i \neq 1$) であることに注意すれば、公式(5)の右辺は公式(3)の右辺そのものである。

de Bruijn の定理 公式(3)を cycle index を用いて表示すると、次の公式を得る。

$$(6) \quad |\mathcal{F}(A, B)/G(A) \times G(B)| \\ = \text{Cyc}(G(A))(x_i \rightarrow \frac{\partial}{\partial z_i}) \times \text{Cyc}(G(A))^{B}(x_i \rightarrow e^{z_i}) \Big|_{z_i=0}$$

ただし、 $z_i = i(\sum_{j \geq 1} z_i x_j)$ である。

上記の諸公式は置換群のほんのわずかな性質を用いるだけで、初等的考察により証明することができ [6~8]。Rota-Smith [9] では、置換群の部分群のなす束と (その置換群の) 台集合の分割束の間のがらゝ対応の枠組のなかで、2重のメービウス反転を用いて証明されている。また、Rota-Sagan [10]

では、Pólya [2] 以来、名前のかつけえ等による同値類の数え上げに必要な情報はすべて置換群の cycle index によって与えられると信じられてきたが、"Witt's enumeration of the dimensions of free Lie algebras [11]" や "Rota's generalization of Spitzer's probabilistic formula [12]" にはより詳細な不変量が必要であったこと、問題は群作用の "aperiodic" な要素の数え上げにあり、これは cycle index の範囲をこえていることを指摘し、[12] で導入し [9] で展開した "periods" からなる束上のモービウス反転が台集合上の "aperiodic" な写像の個数に対する明示的 (explicit) な式を与えていることを示している。

§2 対称群の cycle index の母関数とその応用

対称群の cycle index の母関数を与え、その母関数をもとにして、符号数 (スターリング数、すなわち k 列数 (かく k 列数)、対合 (involution) 数、ベル数などの母関数を導き、鎖多項式との関連にもふれる。ここで、重要なことは、cycle index の母関数が指数公式 ($H = \exp F$, $H, F \in \mathbb{C}[[x]]$) の形をしていることである。

n 次の対称群 $\mathfrak{S}_n$ の cycle index は、 $c_i(\alpha)$ ($\alpha \in \mathfrak{S}_n$) で α の長さ i の輪の個数を表わすとき、次の通りである。

$$(7) \quad cyc(\mathfrak{S}_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_n} x_1^{c_1(\alpha)} x_2^{c_2(\alpha)} \cdots x_n^{c_n(\alpha)}$$

$\mathfrak{S}_n$ の台集合のある要素 i を含む ($\alpha \in \mathfrak{S}_n$ の) 輪に注目し、そのふるまいを考察すれば、次の漸化式を得る。

$$(8) \quad n \, cyc(\mathfrak{S}_n) = \sum_{i=1}^n x_i \, cyc(\mathfrak{S}_{n-i}) \quad (cyc(\mathfrak{S}_0) = 1 \text{ とおく})$$

次に、 $cyc(\mathfrak{S}_n)$ の母関数

$$\mathfrak{G}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} cyc(\mathfrak{S}_n) z^n$$

を考える。両辺を z で微分し、漸化式 (8) を用いると次式を得る。

対称群の cycle index の母関数

$$(9) \quad \mathfrak{G}(z) = \exp\left(x_1 z + x_2 \frac{z^2}{2} + \cdots\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i \frac{z^i}{i}\right)$$

(指数公式の形に注意せよ。)

ここで、公式 (9) から、いくつかの有名な組合せ数に関する公式を導く。 $c(n, k)$ で $\mathfrak{S}_n$ の要素でちょうど k 個の輪をもつものの個数 (これは符号なしスターリング数とも呼ばれ、第 1 種のスターリング数を $s(n, k)$ で表わすとき、 $|s(n, k)|$

に等(11)を表わす。 $C(0,0)=1$, $C(n,0)=0$ ($n \neq 0$) とする。

$$\sum_{k=0}^n C(n,k) x^k = n! (y_C(\mathfrak{S}_n)(x_i \rightarrow x))$$

に注意すべし。公式(9)より、次の母関数を得る。

$$\begin{aligned} (10) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\sum_{k=0}^n C(n,k) x^k \right) / n! \right) z^n &= \exp(x(-\log(1-z))) \\ &= (1-z)^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x+n-1}{n} z^n \end{aligned}$$

したがって、次式を得る。

$$(11) \quad \sum_{k=0}^n C(n,k) x^k = x(x+1) \cdots (x+n-1)$$

次に、 $\mathfrak{S}_n$ の要素で長さ1の輪のないものの個数(すなわち がい列数 とか かくし列数 と呼ばれる)を $d(n)$ で表わす。

$$d(n) = n! (y_C(\mathfrak{S}_n)(x_i \rightarrow 0, x_i \rightarrow 1 (i \neq 1)))$$

に注意すべし。公式(9)より、次の母関数を得る。

$$\begin{aligned} (12) \quad \sum_{n=0}^{\infty} d(n) \frac{z^n}{n!} &= \exp(-z + z + \frac{z^2}{2} + \cdots) \\ &= \exp(-z) \exp(-\log(1-z)) \\ &= \frac{1}{1-z} e^{-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right) z^n \end{aligned}$$

(したがって、次式を得る。

$$(13) \quad D(n) = n! \cdot (e^{-1})_{n+1}$$

ただし、 $(e^{-1})_{n+1}$ は e^{-1} のマクローリン展開の第 $n+1$ 項までの和を表わす。

$\mathfrak{S}_n$ の 対合 (involution: $\alpha^2 = \text{単位元}$) の総数を t_n で表わすと、

$$t_n = n! \operatorname{Cyc}(\mathfrak{S}_n)(x_1 \rightarrow 1, x_2 \rightarrow 1, x_i \rightarrow 0 \ (i \neq 1, 2))$$

であるから、公式 (9) より、次式を得る。

$$(14) \quad \sum_{n=0}^{\infty} t_n \frac{z^n}{n!} = \exp\left(z + \frac{z^2}{2}\right)$$

有本 - 中村 - 中村 [13] で与えられている古典 Weyl 群 $W(B_n)$ の既約指標の表現次数の総和 $d(W(B_n))$ の指数型関数の形から、次式を得る。これは何を意味するか!

$$(15) \quad \sum_{n=0}^{\infty} d(W(B_n)) \frac{z^n}{n!} = n! \operatorname{Cyc}(\mathfrak{S}_n)(x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow 2, x_i \rightarrow 0, (i \neq 1, 2))$$

本節の最後は、公式 (6) と (9) を用いて、集合の分割数 $B(n)$ (ベル数と呼ばれている) の指数型関数を導く。はじめに、公式 (9) を用いて、次式が得られる。

$$(16) \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Cyc}(\mathfrak{S}_n) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i - 1}{i}\right)$$

次に、公式(6) (de Bruijnの定理) を考える。 $|A| = n$ 、

$|B| = N \geq n$ とする。2つの写像 $f, g: A \rightarrow B$ が同一の A の分割を誘導するのは、 B 上の置換 β に対して、 $g(a) = \beta(f(a))$ ($a \in A$) となる β が存在することに注意する。したがって、公式(6)において、 $G(A) = \{e\}$ 、 $G(B) = \mathfrak{S}_n$ とおけば、次式を得る。

$$\begin{aligned} (17) \quad B(n) &= \left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^n \text{Cyc}(\mathfrak{S}_N) (x_i \rightarrow \exp(i \sum_{j=1}^N z_j x_j)) \Big|_{z_i=0} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n \text{Cyc}(\mathfrak{S}_N) (x_1 \rightarrow e^z, x_i \rightarrow 1 (i \neq 1)) \Big|_{z=0} \end{aligned}$$

ここで、公式(6)を用いて、次式を得る (より詳しくは、文献[8]の問題3.31の解答を参照せよ)。

$$(18) \sum_{n=0}^{\infty} B(n) \frac{z^n}{n!} = \exp(e^z - 1)$$

最後に、公式(13)と(14)に対する chain polynomial (鎖多項式)との関連についておく。鎖多項式の一般論や記法、および他の結果については文献[14~16]を参照してほしい。

B_n で n 個の原子からなるブール束を表わし、 $\mathcal{L}(H(B_n))$ (B_n の被覆鎖多項式線形空間) の要素 $f^{(1,1)}$ に対して、 $f^{(1,1)}(\hat{1})$ ($\hat{1}$ は B_n の最大元を表わす) を $p(H(B_n); x)$ で表わす。すなわち、 $p(H(B_n); x)$ の x^i の係数は、 B_n の $\hat{1}$ からの長さ i の被覆鎖 (covering chain or maximal chain) の個数である。このとき、容易に次式が得られる。

$$(19) \quad p(H(B_n); x) = \sum_{k=0}^n n(n-1)\cdots(n-k+1) x^k$$

こゝより、次式を得る。

$$(20) \quad p(H(B_n); -1) = (-1)^n D(n)$$

Y_n で n 次のヤング束 (数 n までの分割からなる束)、 Y_n^* で Y_n の順序双対を表わす。 $f^{(1,0)} \in \mathcal{L}(H(Y_n^*))$ (Y_n^* の極大鎖多項式空間) に対して、 $f^{(1,0)}(\hat{1})|_{x=1}$ ($\hat{1}$ は Y_n^* の最大元、すなわち Y_n の最小元) を $f(n)$ とおく。すなわち、 $f(n)$ は Y_n (Y_n) の極大鎖の総数である。Robinson-Schensted の対応によって $f(n) = t_n$ (先に述べた Θ_n の対合数) が得られ、 Θ_n の対合を考えることにより、次の漸化式を容易に得ることができ。すなわち、

$$(21) \quad \begin{cases} t_0 = t_1 = 1 \\ t_n = t_{n-1} + (n-1) t_{n-2} \quad (n \geq 2) \end{cases}$$

この漸化式からも容易に公式 (14) を得ることが出来る。(しかしながら、本来の目的であった $\mathcal{L}(H(Y_n^*))$ 上の単純再帰法によって“直接的に” $f(n)$ に関する (t_n と同じ) 漸化式を導くことが今のところ出来ない。この辺のところのより詳しい内容については文献 [13, 15] を参照されることよ。

§3 対称式と Waring の公式

対称式に関する Waring の公式、すなわち、基本対称式や基本同次対称式 (完全対称式) をべき和対称式で表わす式の母関数論的扱いを Macdonald [17] に従って初等的に述べる。ここで重要なことは、これらの母関数も公式 (9) と同じように、指数公式の形をしていることである。

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r, \dots)$ を非増加非負整数列とする。 λ_i を part と呼び、 λ の part の総数を λ の 長さ といい、 $l(\lambda)$ で表わす。part すべての 和 を $\rho(\lambda) = \sum_i \lambda_i$ で表わす。また、 $\lambda_i = k$ となる λ_i が m_k 個ありとせ、 $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots r^{m_r} \dots)$ とかく。 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ に対して $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ と定める。さらに、

$$m_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \sum x^\alpha \quad (\alpha \text{ は } \lambda \text{ の "順列"})$$

と定める。ただし、和は $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ の 順列^{av} すべてにわたる。

たす。 e_r を r 次の基本対称式、と名づける。

$$e_r = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r} \quad (= m_{(1^r)}) \quad (e_0 = 1 \text{ とおく})$$

を表す。また、 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ に対して

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \dots$$

と定める。このとき、 e_r に対する次の母関数が容易に得られる。

$$(22) \quad E(z) = \sum_{r \geq 0} e_r z^r = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i z)$$

次に、 r 次の完全対称式 (基本同次対称式) h_r 、と名づける。

$$h_r = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r} \quad (= \sum_{\lambda(\lambda)=r} m_\lambda) \quad (h_0 = 1 \text{ とおく})$$

を考へる。 $h_\lambda \neq e_\lambda$ と同様に定める。 h_r の母関数は

$$(23) \quad H(z) = \sum_{r \geq 0} h_r z^r = \prod_{i \geq 1} (1 - x_i z)^{-1}$$

となる。公式 (22) と (23) より、次式を得る。

$$(24) \quad H(z) E(-z) = 1$$

さらに、これより、次の公式を得る。

$$(25) \quad \sum_{r=0}^n (-1)^r e_r h_{n-r} = \sum_{r=0}^n (-1)^r h_r e_{n-r} = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & (n \geq 1) \end{cases}$$

ここで、1 次のベキ和対称式

$$s_r = \sum x_i^r \quad (= m_{(r)}) \quad (r \geq 1)$$

の母関数 $S(z) = \sum_{r \geq 1} s_r z^{r-1}$ を与える。このとき、次の関係式が得られる。(s_λ と e_λ と同様に定める)

$$(26) \quad S(z) = \frac{d}{dz} \log H(z) = \frac{H'(z)}{H(z)}$$

これより、次の漸化式を得る。

$$(27) \quad h_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n s_i h_{n-i} \quad (n \geq 1)$$

さらに、公式(26)の両辺を積分して ($H(0) = h_0 = 1$ に注意) 目的の母関数 (の 1 つ) を得る。

$$(28) \quad H(z) = \exp(s_1 z + s_2 \frac{z^2}{2} + \dots) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} s_i \frac{z^i}{i}\right)$$

これは指数公式の形をしていること、および §2 の対称群の cycle index の母関数 (9) の右辺の x_i に s_i を代入した式になっていることに注意せよ。

公式(24)の両辺を z で微分して $H'(z)/H(z) = E'(z)/E(z)$ を得るから、次式を得る。

$$(29) \quad S(-z) = \frac{d}{dz} \log E(z) = \frac{E'(z)}{E(z)}$$

$E(0) = e_0 = 1$ に注意して、式(29)の両辺を積分すれば、 $E(z)$ に対する次の関数を得る。

$$(30) \quad E(z) = \exp\left(s_1 z - s_2 \frac{z^2}{2} + \dots\right) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1} s_i \frac{z^i}{i}\right)$$

(公式(24)より $E(z) = H(-z)^{-1}$ であり、これと公式(28)より直接的に求めることもできる。)

公式(28)の右辺を展開し、次式を得る。

$$(31) \quad H(z) = \sum_{\lambda} C_{\lambda}^{-1} s_{\lambda} z^{A(\lambda)}$$

ただし、 $C_{\lambda} = \prod_{i \geq 1} i^{m_i} \cdot m_i!$ ($\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \dots)$) である。

同様にして、次式を得る。

$$(32) \quad E(z) = \sum_{\lambda} (-1)^{A(\lambda) - l(\lambda)} C_{\lambda}^{-1} s_{\lambda} z^{A(\lambda)}$$

式(31)と(32)より、対称式に関する "Waring の公式" を得る。

$$(33) \quad h_m = \sum_{A(\lambda)=m} C_{\lambda}^{-1} s_{\lambda}$$

$$(34) \quad e_m = \sum_{A(\lambda)=m} (-1)^{A(\lambda) - l(\lambda)} C_{\lambda}^{-1} s_{\lambda}$$

このようにして、公式(28)と(30)が対称式に関する Waring の公式の左関数と呼ばれらる "ゆえん" がわかる。

§4 Exponential Formula

§2 と §3 での中心的関数公式 (9) や (28) など が指数公式 (exponential formula) の形. すなわち,

$$H = \exp(F), \quad H, F \in \mathbb{C}[[z]]$$

$$(\text{より正確に, } H, F \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots][[z]])$$

をしていることに注目し, はじめに, 指数公式に関する一般的结果を Stanley [18] に従い, 最も初等的な形で示す.

次に, その一般的结果から, 先に与えた対称群の cycle index の関数 (公式 (9)) および対称式に関する Waring の公式の関数 (公式 (28)) を導く. 最後は, 指数公式の接合代数 (incidence algebra) やカテゴリー論的扱いにふれる.

集合 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ の分割全体を Π_n で表す. 分割 $\pi \in \Pi_n$ の要素を ブロック と呼び, i 個の要素からなるブロックがちょうど a_i 個あるとき, π の タイプ は $(a_1, a_2, \dots)$ であるという. π のブロックの個数を $|\pi|$ で表す. $P, \mathbb{C}$ でそれぞれ, 正の整数, 複素数の集合を表す.

Convolutional Formula for Partition 写像

$f: P \rightarrow \mathbb{C}, g: P \rightarrow \mathbb{C}$ に対して, 新しい写像 $h: P \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$h(n) = \sum_{\pi} f(1)^{a_1} f(2)^{a_2} \dots f(n)^{a_n} g(|\pi|)$$

によって定める。ただし、和は $[n]$ のすべての分割にわたり、 $\pi \in \Pi_n$ のタイプが $(a_1, a_2, \dots)$ である。さらに、 $F(z)$, $G(z)$, $H(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ を次のように定める。

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \frac{z^n}{n!}, \quad G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n) \frac{z^n}{n!}$$

$$H(z) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n) \frac{z^n}{n!}$$

このとき、

$$H(z) = G(F(z))$$

である。

Convolutional Formula により、 $g(n) = 1$ であるとき、 $G(z) = e^z - 1$ となり、次の指数公式を得る。

分割に対する指数公式 写像 $f: P \rightarrow \mathbb{C}$ に対して、新しい

写像 $h: P \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$h(n) = \sum_{\pi \in \Pi_n} f(1)^{a_1} f(2)^{a_2} \cdots f(n)^{a_n}$$

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ は π のタイプ

によって定め、さらに、 $F(z) = \sum_{n \geq 1} f(n) z^n / n!$ $H(z) = \sum_{n \geq 1} h(n) z^n / n!$ であるとき、

$$1 + H(z) = \exp F(z)$$

である。

次に、指数公式から、先に与えた公式と導く。

(i) 指数公式において、 $f(n) = 1$ ($n \in \mathbb{P}$) とおけば、ただちに、ベル数 $B(n)$ の指数型 ϵ 関数 (公式 (18)) を得る。

(ii) 指数公式において、 $f(n) = (n-1)! x_n$ ($n \in \mathbb{P}$) とおくと、 $F(z) = \sum_{n \geq 1} x_n z^n / n$ となり、対称群の cycle index x の ϵ 関数 (公式 (9)) の右辺と指数公式の右辺が一致し、また、多少の計算により、

$$\sum_{\pi \in \Pi_n} f(1)^{a_1} \cdots f(n)^{a_n} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_n} x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$$

$(a_1, \dots, a_n)$ は π のタイプ $a_i = C_i(\alpha) = \alpha$ の長さ i の輪の個数

を示すことができ、公式 (9) を得る。

(iii) 指数公式において、 $f(n) = (n-1)! s_n$ ($n \in \mathbb{P}$) (s_n は s で定めた n 次のべき和対称式である) とおくと、

式の右辺が公式 (28) (対称式の Waring の公式の ϵ 関数) の右辺と一致し、また、多少の計算により、

$$\sum_{\pi \in \Pi_n} f(1)^{a_1} \cdots f(n)^{a_n} / n! = \sum_{\alpha(\lambda) = n} C_\lambda^{-1} s_\lambda$$

を示すことができ、公式 (33) より、指数公式の左辺が公式 (28) の左辺となり、公式 (28) を得る。

Convolutional Formula, Exponential Formula の多少一般化的な形と他の多くの応用が Stanley [18] にのっている。分割束のカテゴリ－での接合代数 (incidence algebra) でのより一般化的な定式化は Douillet-Rota-

Stanley [19] で扱われており、bijectiveなアプロ-4がより明確になっている。また、このアプロ-4での対称式に関する多くの公式が Doukilet [20] で与えられている。さらに、メービウスの反転公式を用いたよりカテゴリーカルな形式級数の組合せ論が Joyal [21] で展開され、公式 (9) を例として与えられている。Bonetti-Rota-Senato-Venezia [22] は "Joyal Theory" の流れのなかで、"symmetric species" の概念を導入し、対称式に関する Waring の公式 (の関数) の bijective proof をメービウス反転を用いるに与えている。また、Nava-Rota [23] では、Joyal Theory of Species の "a partition-theoretic analog" が展開されており、これは非常に興味深い論文である。

— 3 — 置換群の cycle index は次のように一般化されている。H を S_n の部分群、 χ を H の指標とする $\chi \in \chi(H)$ 、 χ に関する "generalized cycle index of H" とは、次式で与えられる：

$$\text{Cyc}(H, \chi) = \frac{1}{|H|} \sum_{w \in H} \chi(w^{-1}) \prod_i x_i^{c_i(w)}$$

Stanley [24] では、この一般化された cycle index を用いて、unimodal sequences の新しいクラスを与えている。

References

1. P. M. Neumann, A lemma that is not Burnside's, Math. Scientist 4 (1979), 133-141.
2. G. Pólya, Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, Acta Math. 68 (1937), 145-253.
3. J. H. Redfield, The theory of group-reduced distributions, Amer. J. Math. 49 (1927), 433-455.
4. N. G. de Bruijn, Recent developments in enumeration theory, Proc. Internat. Congress Math. (Nice 1970) 3 (1971), 193-199.
5. H. Narushima, A survey of enumerative combinatorial theory and a problem, Proc. Fac. Sci. Tokai Univ. 14 (1979), 1-10.
6. C. L. Liu 著 伊理正夫、伊理由美訳 "組合せ数学入門 I", 共立出版 (1972).
7. C. Berge 著 野崎昭弘訳 "組合せ論の基礎", サイエンス社 (1973).
8. L. Lovász 著 成嶋 弘、土屋守正訳 "数の上昇"の技法", 東海大学出版会 (1988).

9. G.-C. Rota and D.A. Smith, Enumeration under group action, *Annali Scuola Normale Superiore - Pisa Classe di Scienze* (4), 4 (1977), 637-646.
10. G.-C. Rota and B. Sagan, Congruences derived from group action, *Europ. J. Combinatorics* 1 (1980), 67-76.
11. E. W. Witt, Treue Darstellung Liescher Ringe, *J. für die Reine und Ang. 177* (1937), 152-160.
12. G.-C. Rota, Baxter algebras and combinatorial identities II, *Bull. Amer. Math. Soc.* 75 (1969), 330-334.
13. 有木 進、中邨博之、中村博昭, 半順序集合と表現次数, 数解研講究録 641 "組合せ論とその周辺の研究" (1988年1月), 230-244.
14. H. Narushima, An algorithmic role of the face-posets of polyhedral complexes, in S. Suzuki (ed.), "Topology and Computer Science", Kinokuniya (1987), 521-533.
15. 成嶋 弘、数之上げ組合せ論—鎖多項式を中心にして—, 数解研講究録 641 "組合せ論とその周辺の研究" (1988年1月), 1-20.

16. H. Narushima, A class of recurrence relations on acyclic digraphs of poset type, in RIMS Kokyuroku 427 (1981) "Applied Combinatorial Theory and Algorithms", 55-67.
17. I. G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall polynomials, Clarendon Press (1979).
18. R. P. Stanley, Generating functions, in G.-C. Rota (ed.), "Studies in Combinatorics", M. A. A. (1978), 100-141.
19. P. Doubilet, G.-C. Rota and R. P. Stanley, On the foundations of combinatorial theory VI: The idea of generating function, Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol 2 (1972), or in G.-C. Rota (ed.), "Finite Operator Calculus", Academic Press (1975), 83-134.
20. P. Doubilet, On the foundations of combinatorial theory VII: Symmetric functions through the theory of distribution and occupancy, Studies in Applied Math., 51 (1972), 377-396.
21. A. Joyal, Une théorie combinatoire des séries formelles, Advan. in Math. 42 (1981), 1-82.

22. F. Bonetti, G.-C. Rota, D. Senato and A.M. Venezia,
Symmetric functions and symmetric species,
Annals of Discrete Math. 30(1986), 107-114.
23. O. Nava and G.-C. Rota, Plethysm, Categories,
and Combinatorics, Advan. in Math. 58(1985), 61-88.
24. R.P. Stanley, Unimodality and Lie superalgebras,
Studies in Applied Math. 72(1985), 263-281.
25. R.P. Stanley, Enumerative Combinatorics I,
Wadsworth (1986).
- 26.⁺ E.M. Wright, Burnside's lemma: A historical
note, J. Combinatorial Theory B, 30(1981), 89-90.
- 27.⁺ J. Sheehan, Redfield discovered again, in E. K.
Lloyd (ed.), "Surveys in Combinatorics", Cambridge
Univ. Press (1983), 135-155.
- 28.⁺ D. Foata, A combinatorial proof of the Mehler formula
J. Combinatorial Theory A, 24(1978), 367-376.
- 29.⁺ 岩堀 長慶 "対称群と一般線型群の表現論", 岩波書店(1982).
- 30.⁺ R.P. Stanley, Differential posets, preprint.
- 31.⁻ G. James and A. Kerber, The Representation
Theory of the Symmetric Group, Addison-Wesley
(1981).