

Borsuk-Ulam finite groups from the point of view of elements

Toshio Sumi

Faculty of Arts and Science, Kyushu University

1 はじめに

Wasserman [5] は G -表現空間の間の isovariant G -写像 $f: V \rightarrow W$ に関して, 不等式

$$\dim V - \dim V^G \leq \dim W - \dim W^G \quad (1.1)$$

を満たすコンパクトリー群 G を Borsuk-Ulam 群 (略して BUG) と呼び, その考察を行った. ここで, $f: V \rightarrow W$ が isovariant G -写像であるとは, f は G -写像であり, 任意の $v \in V$ に対し, v における isotropy subgroup $G_v = \{g \in G \mid g \cdot v = v\}$ と $f(v) \in W$ における isotropy subgroup $G_{f(v)} = \{g \in G \mid g \cdot f(v) = f(v)\}$ が等しい性質を持つときにいう. 彼は BUG に関する基本的な性質を示し, 特にコンパクト可換群, 有限可解群, および有限群の元の位数に関する条件 prime condition を満たす有限群はすべて BUG であることを示した. この不等式 (1.1) は自然で任意のコンパクトリー群で成り立つことが期待される.

基本的な性質から有限群が BUG かどうかは有限単純群が BUG かどうかを調べればよいことがわかる. 長崎-牛瀧 [2] は, Möbius 関数を用いて, q 個の元からなる有限体 F_q の元を成分に持つ 2 次の射影特殊線形群 $\mathrm{PSL}(2, F_q)$ が BUG であることを示した. $\mathrm{RCycl}(G)$ により G の巡回群の共役類の完全代表系を表すこととする. 著者 [3] は, 表現空間間の G -写像 $f: V \rightarrow W$ に対し, G の部分群の集合 $\mathcal{S}(G)$ からの関数

$$g_f(H) = (\dim W - \dim W^H) - (\dim V - \dim V^H)$$

を考え, 彼らの手法から $g_f(G)$ は, $g_f(C)$ (C は G の巡回群) たちの線形結合

$$g_f(G) = \sum_{C \in \mathrm{RCycl}(G)} \beta_G(C) g_f(C)$$

で表される ($\beta_G(C) \in \mathbb{Q}$) ことに着目し, 長崎-牛瀧が導入した Möbius 条件を拡張し, 次の条件を検討した.

巡回群の共役類に関する条件

$C^G \leq D^G$ ならば $\gamma(C) \leq \gamma(D)$ を満たす任意の関数 $\gamma: \text{RCycl}_1(G) \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$ に対して,

$$\sum_{C \in \text{RCycl}_1(G)} \beta_G(C) \gamma(C) \geq 0$$

が成り立つ. ここで, $\text{RCycl}_1(G)$ は非自明な G の巡回群の共役類の完全代表系を表す^a.

^a γ は g_f を念頭に置いているため, $\gamma(\{1\}) = 0$ と思っているだけである.

この条件を満たす有限群を cyclic-condition 群 (CCG) と呼んだ. CCG ならば BUG なので, まずは CCG である有限群を見つけることから始め, n 次交代群 A_n ($n \leq 21$), n 次対称群 S_n ($n \leq 22$), すべての散在単純群およびその自己同型群は CCG であることをソフトウェア gap [1] を用いて示した. 一方, A_{22} は CCG ではないことも示した [3]. さらに翌年著者 [4] は cyclic-condition 群の条件を弱めた以下の条件 subgroup-condition 群 (SCG) を導入し, 考察を行った.

部分群に関する条件

$\gamma: \text{RCycl}_1(G) \rightarrow \mathbb{Q}_{\geq 0}$ が, $K_1 \triangleleft K_2 < G$ で K_2/K_1 が BUG であるような組 (K_1, K_2) に関して, $\gamma(K_2) \geq \gamma(K_1)$ を満たすとき, $\gamma(G)$ は, $\gamma(K_2) - \gamma(K_1)$ の非負有理係数の和として表される.

CCG を SCG は含み, SCG ならば BUG であることも容易にわかる. SCG となる交代群 A_n を計算機で探し, $22 \leq n \leq 27$ に対し, A_n は SCG であることが確かめられた. F_q を成分に持つ 3 次射影特殊線形群 $\text{PSL}(3, q)$ や射影特殊ユニタリ群 $\text{PSU}(3, q)$ は SCG であることも示した. A_{27} の巡回部分群のペアだけでも非常に多く存在するため, SCG であることを確かめる際, 部分群をすべて考えるのは得策ではなく, どのような, $K_1 \triangleleft K_2 < G$ を利用するのが良いのかが問題として残った. その際, 表現空間の部分群による固定点集合の次元と関連するため, どのようなクラスに制限して考察するべきかが不明であった.

今回は, 新たな BUG となる十分条件を与える. 以前は γ は表現空間の固定点の次元に係わっていたが, 今回はそれを避けている点の特記すべき点である. その十分条件を考察するとソフトウェア gap により次が確かめられた.

Theorem 1 n 次交代群 A_n ($n \leq 31$) は BUG である¹.

¹講演時は A_{28} がうまくいっていなかったが, それは一次従属性が悪さをしていた.

2 今回の手法

以降、群 G は有限群に限定する。このとき、 G の部分群 H と G -表現空間 V に対し、 V の H による固定点集合 V^H は

$$\dim V^H = \sum_{h \in H} \frac{\chi_V(h)}{|H|}$$

で求められる。ここで、 $\chi_V(h)$ は V の h での指標である。そこで、線形に拡張し、 $\mathbb{Q}$ 上の表現環の元 X に対し、

$$\dim X^H = \sum_{h \in H} \frac{\chi_X(h)}{|H|} \in \mathbb{Q}$$

と定める。 X を G -表現空間の差とする。先行研究にて、我々は次の 2 条件

条件 (P0) —

群 G の部分群 $P, H < G$ で、 P が H の正規部分群であるようなペア (P, H) に対して、

$$\dim X^P \geq \dim X^H$$

を満たす場合、

$$\dim X \geq \dim X^G$$

が従う。

および

条件 (P1) —

$$\dim X - \dim X^G = \sum_{\substack{(P,H) \\ P \triangleleft H < G}} a_{P,H} (\dim X^P - \dim X^H)$$

を満たす非負有理数 $a_{P,H} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ ($P \triangleleft H < G$) が存在する。

を考察した。(P1) が (P0) を導くのは自明である。

有限群 G に対し、 G より位数の小さい G の任意の部分商群 K は BUG としよう。isovariant G -写像 $f: V \rightarrow W$ に対し、 $X = W - V$ が (P1) の仮定を満たす。よって、(P1) が成立するならば、

$$\dim X - \dim X^G \geq 0$$

がいえ、したがって、有限群 G は BUG であることがわかる。つまり、任意の有限群 G および $\dim X^P \geq \dim X^H$ ($P \triangleleft H \leq G$) を満たす任意の G -表現空間の差 X に対して、(P1) が成り立つことが示せれば、すべての有限群は BUG であることがわかることになる。

$\mathbb{Q}G$ にて, $\mathbb{Q}$ 上の群環を表すことにする. つまり,

$$\mathbb{Q}G = \left\{ \sum_{g \in G} a_g \cdot g \mid a_g \in \mathbb{Q} \right\}$$

とする. ここでは, 積構造は考えないこととする. $\mathbb{Q}[G]$ は, G -既約表現空間全体を基底にもつ $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間であり, $\mathbb{Q}G$ は G の元全体を基底にもつ $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間である.

$\mathcal{S}_G$ を G の部分集合全体の集合とする. 集合 $S \in \mathcal{S}_G$ に対し, $|S|$ で S の元の個数を表す. 写像 $\psi_G: \mathcal{S}_G \rightarrow \mathbb{Q}G$ を

$$\psi_G(S) = \sum_{s \in S} \frac{1}{|S|} \cdot s$$

によって定め, $X \in \mathbb{Q}[G]$ に対し, 線形写像 $\chi_X: \mathbb{Q}G \rightarrow \mathbb{C}$ を

$$\chi_X \left(\sum_{g \in G} a_g \cdot g \right) = \sum_{g \in G} a_g \chi_X(g)$$

にて定める. すると, 容易に, G の部分群 H に対し,

$$\chi_X \circ \psi_G(H) = \dim X^H$$

が成り立つことがわかる.

$\mathcal{D}$ を $P \triangleleft H < G$ を満たすか, もしくは, H は巡回群であるような G の部分群 P, H のペア (P, H) の集合とする. そこで, 以下の条件を考えよう:

条件 (P2)

$$\psi_G(\{1\}) - \psi_G(G) = \sum_{(P, H) \in \mathcal{D}} b_{P, H} (\psi_G(P) - \psi_G(H)).$$

を満たす非負有理数 $b_{P, H} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ ($(P, H) \in \mathcal{D}$) が存在する.

写像 χ_X を適用することにより, (P2) は (P1) を導く. G が巡回群であれば, G は条件 (P2) を満たすが, $\mathcal{D}$ は少なくとも 1 つ (P, G) の形のペアを含まなければならないため, 巡回群でも成り立つように $\mathcal{D}$ に $H (\leq G)$ が巡回群であるような G の部分群のペア (P, H) を含めている.

(P2) を満たすかどうかを計算機を用いて検証したい場合, データ量の関係でより簡略化を考える必要がある. そこで, G の元全体を共役類全体へと変形する. $\mathcal{C}_G$ を G の元の共役類全体からなる集合とし, $\mathbb{Q}\mathcal{C}_G$ を $\mathcal{C}_G$ の元全体を基底にもつ線形空間とする:

$$\mathbb{Q}\mathcal{C}_G = \left\{ \sum_{g^G \in \mathcal{C}_G} c_{g^G} \cdot g^G \mid c_{g^G} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

全射準同型 $\pi: \mathbb{Q}G \rightarrow \mathbb{Q}\mathcal{C}_G$ を

$$\pi \left(\sum_{g \in G} a_g \cdot g \right) = \sum_{g^G \in \mathcal{C}_G} \left(\sum_{\substack{x \in G \\ g^G = x^G}} a_x \right) \cdot g^G$$

にて定める. $\mathcal{S}_G$ から $\mathbb{Q}\mathcal{C}_G$ への写像 $\rho_G = \pi \circ \psi_G$ を考えると, 次は可換図式になる:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\rho_G} & \mathbb{Q}\mathcal{C}_G \\ \downarrow \psi_G & \nearrow \pi & \downarrow \text{bij.} \\ \mathbb{Q}G & \longleftrightarrow & Z\mathbb{Q}G \end{array}$$

そこで, 以下の条件を考える:

条件 (P3)

$$\rho_G(\{1\}) - \rho_G(G) = \sum_{(P,H) \in \mathcal{D}'} c_{P,H} (\rho_G(P) - \rho_G(H)). \quad (2.1)$$

を満たす非負有理数 $c_{P,H} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ が $(P,H) \in \mathcal{D}'$ に対し存在する.

Proposition 1 $\mathcal{D}$ に対する (P2) はある $\mathcal{D}'$ に対する (P3) と同値となり, 逆もなりたつ.

$\mathbb{Q}\mathcal{C}_G$ の元 f の g^G の係数を $\text{coe}(f; g^G)$ で表すことにする. ψ_G の定義より,

$$\sum_{g^G} \text{coe}(\rho_G(P) - \rho_G(H); g^G) = 0$$

が成り立つので, 等式 (2.1) を満たす $c_{P,H}$ を見つける際, 非自明な元 g に対し, g^G の両辺の係数のみを考えればよい.

Remark 1 G の元 g に対し,

$$\text{coe}(\rho_G(G) - \rho_G(\{1\}); g^G) = \begin{cases} \frac{1}{|Z_G(\langle g \rangle)|} > 0, & g \neq 1, \\ \frac{1}{|G|} - 1 < 0, & g = 1 \end{cases}$$

が成り立つ.

3 巡回群ペアに関する非負線形結合として表される有限群

この節では,

$$\text{Cyc}^2(G) := \{(P,H) \mid P < H \leq G, H \text{ は巡回群}\}$$

に関して, (P2) が成り立つ有限群の例を挙げる. また,

$$\text{Cyc}^1(G) := \{(\{1\}, H) \mid H \leq G, H \text{ は巡回群}\}$$

と置く.

Proposition 2 射影特殊線形群 $\text{PSL}(2, q)$ は $\mathcal{D}' = \text{Cyc}^1(G)$ に対して (P3) を満たす.

Proof p を $\mathbb{F}_q$ の標数とする. つまり, q は素数 p のべきである. q が 2 べきか奇素数べきかで場合分けを行う.

まず, q を 2 べきとしよう. $p = 2$ である. $\text{PSL}(2, q)$ の巡回部分群 C_-, C_0, C_+ をそれぞれ, 位数 $q-1, 2, q+1$ の元とすると, 次がわかる.

- (1) $C_G = \{g^G \mid g \in C_- \setminus \{1\}\} \sqcup \{g^G \mid g \in C_0 \setminus \{1\}\} \sqcup \{g^G \mid g \in C_+ \setminus \{1\}\} \sqcup \{1\}$,
- (2) $|N_G(C_-)| = 2|C_-|, |N_G(C_0)| = q, |N_G(C_+)| = 2|C_+|$,
- (3) C_- (resp. C_+) の非自明な部分群 K に対し,

$$N_G(K) = N_G(C_-) \text{ (resp. } N_G(K) = N_G(C_+))$$

である.

よって, 次の等式を得る.

$$\begin{aligned} \rho_G(G) - \rho_G(\{1\}) &= \frac{1}{2}(\rho_G(C_-) - \rho_G(\{1\})) + \frac{1}{2}(\rho_G(C_+) - \rho_G(\{1\})) \\ &\quad + \frac{2}{q(p-1)}(\rho_G(C_0) - \rho_G(\{1\})). \end{aligned} \quad (3.1)$$

次に, q を奇素数べきとしよう. $\text{PSL}(2, q)$ の巡回部分群 C_-, C_0, C_+ をそれぞれ位数 $(q-1)/2, p, (q+1)/2$ の元とすると上記 (1)–(3) を満たすため, 等式 (3.1) を得る.

したがって, $\text{PSL}(2, q)$ は $\mathcal{D}' = \{(\{1\}, C_-), (\{1\}, C_0), (\{1\}, C_+)\} \subset \text{Cyc}^1(G)$ に関し (P3) を満たす. ■

$\mathcal{D} = \text{Cyc}^1(G)$ に対して (P2) を満たす有限群は非常に特殊と考えられるが, 次も成り立つ.

Proposition 3 有限可換群 G は $\mathcal{D} = \text{Cyc}^1(G)$ に対して (P2) を満たす.

Wasserman は有限群 G が BUG であるための十分条件として, prime condition を与えた. G が prime condition を満たすとは, G の各元 g に対し, その位数 $|g|$ を割る素数の逆数の和が 1 以下であるときという. G が prime condition を満たすことは, G が CCG であるための十分条件であった. 同様の結果が (P2) に対しても言える.

Proposition 4 G が prime condition を満たせば, G は $\text{Cyc}^2(G)$ に関し (P2) を満たす.

この命題は次の定理から従う． $\text{coe}(x, g)$ は $x \in \mathbb{Q}G$ における g の係数を表すものとしよう：

$$x = \sum_{g \in G} \text{coe}(x, g) \cdot g.$$

Theorem 2 $x \in \mathbb{Q}G$ は以下の 4 条件

- (1) $g \in G \setminus \{1\}$ に対し $\text{coe}(x, g) \geq 0$ である．
- (2) g の位数 $|g|$ が *prime condition* を満たしていなければ， $\text{coe}(x, g) = 0$ である．
- (3) g_1, g_2 がともにある巡回群の生成元であれば，等式 $\text{coe}(x, g_1) = \text{coe}(x, g_2)$ が成り立つ．
- (4) $\sum_{g \in G} \text{coe}(x, g) = 0$ を満たす．

を満たしているとしよう．このとき， x は $\psi_G(H) - \psi_G(P)$, $(P, H) \in \text{Cyc}^2(G)$ の非負有理数係数の線形結合として表される．

Proof g_0 を $\text{coe}(x, g) > 0$ を満たす（つまり， $\text{coe}(x, g)$ がゼロでない）元 $g \in G$ の中で極大元とする．相異なる素数 p_j と自然数 $e_j \geq 1$ を用いて， $|g_0| = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ としよう．

$|g_0|$ は *prime condition* を満たすので， $\sum_{r=1}^k p_j^{-1} \leq 1$ である． $2 \leq j \leq k$ に対し， $\lambda_j = p_j^{-1}$ とおき， $j = 1$ のときは， $\lambda_1 = 1 - \sum_{j=2}^k p_j^{-1} \geq p_1^{-1}$ とおく． $\sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$ に注意しよう．

$\mathbb{Q}G$ の元

$$y_0 = \sum_{j=1}^r \lambda_j \text{coe}(x, g_0) |g_0| (\psi(\langle g_0 \rangle) - \psi(\langle g_0^{p_j} \rangle))$$

を考え，

$$x_1 = x - y_0$$

とおく．このとき， x の代わりに x_1 に対して，(1)–(4) を満たし，さらに，

- h が $\langle g_0 \rangle$ の生成元ならば， $\text{coe}(x_1, h) = 0$ を満たす．
- 任意の $g \in G$ に対して $\text{coe}(x_1, g) \geq \text{coe}(x, g)$ が成り立つ．

を満たすことを示す．

$h \in G \setminus \{1\}$ とする． $h \notin \langle g_0 \rangle$ であれば， $\text{coe}(x_1, h) = \text{coe}(x, h)$ が成り立つ． h が $\langle g_0 \rangle$ の生成元であれば，(3) により，

$$\begin{aligned} \text{coe}(x_1, h) &= \text{coe}(x, h) - \sum_{j=1}^r \lambda_j \text{coe}(x, g_0) |g_0| \text{coe}(\psi(\langle g_0 \rangle) - \psi(\langle g_0^{p_j} \rangle), h) \\ &= \text{coe}(x, g_0) - \text{coe}(x, g_0) \sum_{j=1}^r \lambda_j = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ. h が $\langle g_0^{p_{i_1} \cdots p_{i_k}} \rangle$ ($k \geq 1$) の生成元であるとき,

$$\begin{aligned}
 \text{coe}(x_1, h) &= \text{coe}(x, h) - \sum_{j=1}^r \lambda_j \text{coe}(x, g_0) |g_0| \text{coe}(\psi(\langle g_0 \rangle) - \psi(\langle g_0^{p_j} \rangle), h) \\
 &= \text{coe}(x, h) - \text{coe}(x, g_0) + \sum_{j=1}^r \lambda_j \text{coe}(x, g_0) |g_0| \text{coe}(\psi(\langle g_0^{p_j} \rangle), h) \\
 &= \text{coe}(x, h) - \text{coe}(x, g_0) + \sum_{s=1}^k \lambda_{i_s} \text{coe}(x, g_0) |g_0| \text{coe}(\psi(\langle g_0^{p_{i_s}} \rangle), h) \\
 &= \text{coe}(x, h) - \text{coe}(x, g_0) + \sum_{s=1}^k \lambda_{i_s} p_{i_s} \text{coe}(x, g_0).
 \end{aligned}$$

が成り立つ. もし, $i_1, \dots, i_k > 1$ ならば,

$$\text{coe}(x_1, h) = \text{coe}(x, h) + (k-1)\text{coe}(x, g_0) \geq \text{coe}(x, h)$$

であり, $i_1 = 1$ であれば, $1 - \sum_{j=2}^k p_j^{-1} \geq p_1^{-1}$ に注意すると,

$$\begin{aligned}
 \text{coe}(x_1, h) &= \text{coe}(x, h) + \left(1 - \sum_{j=2}^k p_j^{-1}\right) \text{coe}(x, g_0) p_1 + (k-2)\text{coe}(x, g_0) \\
 &= \text{coe}(x, h) + \left(\left(1 - \sum_{j=2}^k p_j^{-1}\right) p_1 + k-2\right) \text{coe}(x, g_0) \geq \text{coe}(x, h).
 \end{aligned}$$

が成り立つ. $\sum_{g \in G} \text{coe}(\psi_G(\langle a \rangle), g) = 1$ ($a \in G$) より $\sum_{g \in G} \text{coe}(y_0, g) = 0$ だから (4) が成り立つ.

よって, x_1 は (1)–(4) を満たし, h が $\langle g_0 \rangle$ の生成元ならば, $\text{coe}(x_1, h) = 0$ である. さらに, $\langle g_0 \rangle$ の真部分群の非自明な元 h に関し, $\text{coe}(x_1, h) > 0$ となることもあるが, 真部分群の非自明な元 h の位数 $|h|$ は prime condition を満たす. よって繰り返し続けることにより, x は $y_0 + y_1 + \cdots$ と表される. ■

群の位数が大きな群を対象にすると, prime condtion はすぐに破綻する. 例えば, G が位数が 30 の倍数の元を持てば,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{31}{30} > 1$$

より, G は prime condtion を満たさない. しかしながら, Theorem 2 の条件 (2) は多少弱めることができることが期待でき, prime condition を満たす元のみになったときまでうまく変形すればよいことから, $\sum p_j^{-1}$ を考慮するほうが良いのかもしれない.

4 群の拡大

この節では、群の拡大 $1 \rightarrow K \rightarrow G \rightarrow F \rightarrow 1$ について考察しよう。

Wasserman は K, F が BUG であれば G も BUG であることを示した。これは容易で、 G -表現空間間の isovariant G -写像 $f: V \rightarrow W$ に対し、 X を G -表現空間の差 $W - V$ とすると、 X^K は F -表現空間の差とみなせるため、 $\dim X^K \geq \dim (X^K)^F = \dim X^G$ であり、 X を K -表現空間の差とみなすと、 $\dim X \geq \dim X^K$ が成り立つため、 $\dim X \geq \dim X^G$ が従う。

現状、 F が巡回群でないとき、 K, F が条件 (P1) を満たすならば（うまく $\mathcal{D}$ を取ることにより） G も (P1) を満たすことはわかる（Theorem 3 参照のこと）が、 F が巡回群の場合にはうまくいかない。条件 (P1) において、Wasserman と同様な方法が適用できるようにするためには、 (P, H) として $H = G, P \neq \{1\}$ も許すのが良いのかもしれない²。同じく、条件 (P2) において、 $\mathcal{D}$ に巡回群の場合のみ $H = G$ を許したが、一般に巡回群でない G については $P \triangleleft H \leq G$ で、 $H = G$ のときは $P \neq \{1\}$ を課するのが良いのかもしれない。この変更の下、 K, F が、条件 (P2) を満たせば、 G も条件 (P2) を満たすことがすぐにわかる。しかしながら、今まで計算した経験上、 G が巡回群でなければ $P \triangleleft H < G$ でうまくいっているので、変更は不必要であろうと思われる³。

以前の結果と同様に、一般には $\mathcal{D} = \text{Cyc}^2(G)$ では不十分であることがわかる。

Remark 2 n 次交代群 A_n ($5 \leq n \leq 21$)、22 次対称群 S_{22} $\mathcal{D} = \text{Cyc}^2(-)$ に関し (P2) を満たすが、一方で、 A_{22}, A_{23}, S_{23} は $\mathcal{D} = \text{Cyc}^2(-)$ に関し (P2) を満たさない。

5 条件 (P2) を満たす有限群

前節にて、 $\mathcal{D} = \text{Cyc}^2(G)$ では、(P2) は群拡大にて閉じないことを示した。各有限非可解群 G に対し、 $\mathcal{D}$ として $P \triangleleft H < G$ を満たす (P, H) 全体のなす集合 $\mathcal{D}_G$ を考えると、若干の条件の下で (P2) は群拡大に関して閉じることを示すことができる。

Theorem 3 F は巡回群でないと仮定する。 $\tau: G \rightarrow F$ を全射準同型とすると、もし F と $\ker \tau$ がそれぞれ $\mathcal{D}_F, \mathcal{D}_{\ker \tau}$ に関して (P2) を満たすならば、 G も $\mathcal{D}_G$ に関して (P2) を満たす。

Proof $K = \ker \tau$ とおく。仮定として、

$$\psi_K(\{1\}) - \psi_K(K) = \sum_{(P,H) \in \mathcal{D}_K} a_{P,H}(\psi_K(P) - \psi_K(H)) \quad (5.1)$$

$$\psi_F(\{1\}) - \psi_F(F) = \sum_{(P,H) \in \mathcal{D}_F} b_{P,H}(\psi_F(P) - \psi_F(H)). \quad (5.2)$$

²とはいえ、 G が素数位数を持てば、 G は巡回群で単純群なので、 $(P, H) = (\{1\}, G)$ しかとりようがない... 非可換単純群のとき $(P, H) = (\{1\}, G)$ を許してしまうと何の条件も与えないので避けたい。

³部分群問題 (Question 2) と同様の難しさを含んでいる可能性がある。

としよう. 包含写像 $i: K \rightarrow G$ に対し,

$$i_*(\psi_K(\{1\}) - \psi_K(K)) = \psi_G(\{1\}) - \psi_G(K)$$

が成り立ち, よって, 等式 (5.1) より

$$\psi_G(\{1\}) - \psi_G(K) = \sum_{(P,H) \in \mathcal{D}_K} a_{P,H}(\psi_G(P) - \psi_G(H))$$

を得る. 等式

$$\psi_G(\{1\}) - \psi_G(G) = (\psi_G(\{1\}) - \psi_G(K)) + (\psi_G(K) - \psi_G(G))$$

より, (5.2) を用いて, $\psi_G(K) - \psi_G(G)$ が非負有理数係数の線形結合で表されることを示せばよい.

等式 (5.2) に τ^{-1} を適用して,

$$\psi_G(K) - \psi_G(G) = \sum_{(P,H) \in \mathcal{D}_F} b_{P,H}(\psi_G(\tau^{-1}(P)) - \psi_G(\tau^{-1}(H)))$$

が導かれる. $(P, H) \in \mathcal{D}_F$ に対し, F が巡回群でないため $H \neq F$ であり, よって, $\tau^{-1}(H) \neq G$ だから, $\mathcal{D} = \mathcal{D}_K \cup \{(\tau^{-1}(P), \tau^{-1}(H)) \mid (P, H) \in \mathcal{D}_F\}$ に関して (P2) を満たす. $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_G$ は明らかである. ■

G の元 g の共役類 g^G を G の部分集合 $\{a^{-1}ga \mid a \in G\}$ と同一視する. $a, b \in G$ が性質 $a^G \cap \text{gen}(\langle b \rangle) \neq \emptyset$ を満たしているとする. このとき, 任意の部分群のペア (P, H) に対し,

$$\text{coe}(\psi_G(P) - \psi(H), a) = \text{coe}(\psi_G(P) - \psi(H), b)$$

が成り立つ.

$$G = \bigcup_{g^G \in \mathcal{C}_G} g^G$$

により, G の分割を与えている. 代わりに, G の巡回部分群の共役類 C^G に対し,

$$\text{gen}(C)^G = \{g^{-1}ag \mid a \in \text{gen}(C), g \in G\} \subset G$$

にて G を分割する. ただし, $\text{gen}(\{1\}) = \{1\}$ とする.

(P2) の解の存在を確認するには, 単体法を用いた. 単体法では, 行フルランクであるほうが良いため, $\mathcal{C}_G$ を G の巡回群 C の共役類 C^G から定まる集合 $\{\text{gen}(C)^G \mid C^G\}$ へ取り替えて計算する⁴. すると,

$$\text{Sol}^2(G) = \{(P, H) \mid P \triangleleft H < G, H \text{ は可解群}\}$$

の一部分を用いて計算機で以下が確かめられた.

Theorem 4 n 次交代群 A_n ($22 \leq n \leq 31$) は $\text{Sol}^2(G)$ に関し (P3) を満たす.

⁴別に行フルランクでなくても単体法は実行できるが, 行フルランクにしておくとな特殊な状況を避けることができる.

6 結びとして

BUG の性質として既知なもののいくつかについては, (P2) についても同様なことが成り立つことを見ることができた. ただし, すべてではなく, その 1 つとして, BUG の性質として, BUG G の商群は BUG となるが, (P2) についても同様なことがいえるのだろうか?

Question 1 (P2) を満たす有限群 G の商群は (P2) を満たすか?

有限群 G において, (P, H) に関する和で表せたとしたとき, H の商群への像が全体と一致する (P, H) をどうやって回避するのが問題となる. 任意の有限群 G において $\mathcal{D} = \text{Sol}^2(G)$ に関し (P2) が成り立つことが期待される.

BUG G の部分群は BUG かどうか未知であるが, (P2) についてはどうであろうか?

Question 2 (P2) を満たす有限群 G の部分群は (P2) を満たすか?

Questions 1, 2 は, うまい $\mathcal{D}$ に対して有限非可解群 G については少なくとも成り立つ. より一般に以下が成立する.

Proposition 5 有限非可解群 G に対し $\mathcal{D} = \text{Sol}^2(G)$ に関し (P2) が成り立つと仮定する. このとき, G の非可解部分商群 F は $\mathcal{D} = \text{Sol}^2(F)$ に関し (P2) を満たす.

Proof

$$\psi_G(\{1\}) - \psi_G(G) = \sum_{(P,H) \in \text{Sol}^2(G)} b_{P,H}(\psi_G(P) - \psi_G(H))$$

が成り立っているとする. K を G の非可解部分群とすると, 制限写像 $\mathbb{Q}G \rightarrow \mathbb{Q}K$ によって

$$\psi_K(\{1\}) - \psi_K(K) = \sum_{(P \cap K, H \cap K) \in \text{Sol}^2(K)} b_{P,H}(\psi_K(P \cap K) - \psi_K(H \cap K))$$

が成り立つ. 次に, K' を K の非可解商群とし, $\pi: K \rightarrow K'$ を自然な全射準同型とする. 可解群 H に対し, $\pi(H \cap K)$ は可解群であるため,

$$\psi_{K'}(\{1\}) - \psi_{K'}(K') = \sum_{(\pi(P \cap K), \pi(H \cap K)) \in \text{Sol}^2(K')} b_{P,H}(\psi_{K'}(\pi(P \cap K)) - \psi_{K'}(\pi(H \cap K)))$$

がなりたつ. ■

Acknowledgement

本研究は JSPS 科研費 23K03116 の助成を受けたものです.

References

- [1] GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.12.2.
<https://www.gap-system.org>.
- [2] NAGASAKI, I., AND USHITAKI, F. New examples of the Borsuk-Ulam groups. RIMS Kôkyûroku Bessatsu, **B39**. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2013, pp. 109–119.
- [3] SUMI, T. A sufficient condition for a finite group to be a Borsuk-Ulam group. RIMS Kôkyûroku. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2018, pp. 148–161.
- [4] SUMI, T. Alternating groups and Borsuk-Ulam groups. In *The theory of transformation groups and its applications*, RIMS Kôkyûroku, 2135. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2019, pp. 126–140.
- [5] WASSERMAN, A. G. Isovariant maps and the Borsuk-Ulam theorem. *Topology Appl.* **38** (1991), 155–161.

819-0395 福岡市西区元岡 7 5 5

九州大学 基幹教育院

E-mail address: sumi@artsci.kyushu-u.ac.jp

九州大学・基幹教育院 角 俊雄