

Applications of differential subordinations for univalent functions

群馬工業高等専門学校 斎藤 斉

HITOSHI SAITOH

Department of Mathematics, Gunma National College of Technology

Maebashi, Gunma 371-8530, Japan

E-mail: saitoh@nat.gunma-ct.ac.jp

December 20, 2000

[8] において, differential subordination に関する結果を示した. この小論では単葉関数論への応用をいくつか述べる. 以下必要となる定義を書く.

Def. 1 $\psi: \mathbb{C}^3 \times U \rightarrow \mathbb{C}$ とし, h を U で単葉とする. U で正則で, 次の (2nd-order) differential subordination

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \prec h(z) \quad (1)$$

をみたすとき, p は differential subordination の解とよばれる. 単葉関数 g は (1) をみたすすべての p に対して $p \prec g$ ならば differential subordination の解の dominant という. さらに (1) のすべての dominants に対して $\widehat{g} \prec g$ をみたす $\widehat{g}$

と (1) の best dominant という.

Def. 2 $r = r_1 + r_2 i$, $s = s_1 + s_2 i$, $t = t_1 + t_2 i$ とおく.

n は正の整数とし、 a は $\operatorname{Re} a > 0$ である複素数とする.

$\Psi_n(a)$ で以下の条件をみたす関数の族とする.

$$\psi(r, s, t) : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$$

1) $\psi(r, s, t)$ はある領域 $D \subset \mathbb{C}^3$ で連続,

2) $(a, 0, 0) \in D$ かつ $\operatorname{Re} \psi(a, 0, 0) > 0$,

3) $(r_2 i, s_1, t_1 + t_2 i) \in D$,

$$s_1 \leq -\frac{n|a - r_2 i|^2}{2 \operatorname{Re} a} \quad \text{かつ} \quad s_1 + t_1 \leq 0$$

a とし、 $\operatorname{Re} \psi(r_2 i, s_1, t_1 + t_2 i) \leq 0$.

$\Psi_n \equiv \Psi_n(1)$ とおく.

以下、知られた結果を述べる.

Theorem A ([3])

Let $\psi \in \Psi_n(a)$ with corresponding domain D and let $p(z) = a + p_n z^n + \dots$ be regular in U with $p(z) \neq 0$ and $n \geq 1$. If $(p(z), zp'(z), z^2 p''(z)) \in D$ where $z \in U$ and

$$\operatorname{Re} \psi(p(z), zp'(z), z^2 p''(z)) > 0 \quad (z \in U),$$

then $\operatorname{Re} p(z) > 0$ for all $z \in U$.

Theorem B ([3])

Let $\psi \in \Psi_1$ and let $g(z)$ be a regular function satisfying $\operatorname{Re} g(z) > 0$. If the differential equation

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2 p''(z)) = g(z) \quad (p(0) = 1)$$

has a solution $p(z)$ regular in U then $\operatorname{Re} p(z) > 0$.

Lemma C ([3])

Let $h(r, s, t): \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ such that

- 1) $h(r, s, t)$ is continuous in a domain $D \subset \mathbb{C}^3$,
- 2) $(a, 0, 0) \in D$ and $|h(a, 0, 0)| < J$ ($J > 0$),
- 3) $|h(Je^{i\theta}, Ke^{i\theta}, L)| \geq J$ when $(Je^{i\theta}, Ke^{i\theta}, L) \in D$,

$$K \geq J\lambda \text{ and } \operatorname{Re}[Le^{-i\theta}] \geq K(1-\lambda).$$

Let $w(z) = a + w_n z^n + \dots$ be regular in U with $w(z) \neq a$ and $n \geq 1$. If $(w(z), zw'(z), z^2 w''(z)) \in D$ when $z \in U$ and

$$|h(w(z), zw'(z), z^2 w''(z))| < J$$

when $z \in U$ then $|w(z)| < J$ when $z \in U$.

Theorem D ([3])

Let h satisfy the conditions of Lemma C with $n=1$,

and let $b(z)$ be a regular function satisfying $|b(z)| < J$.

If the differential equation

$$h(w(z), zw'(z), z^2w''(z)) = b(z) \quad (w(0)=a)$$

has a solution $w(z)$ regular in U then $|w(z)| < J$.

Lemma E ([4])

Let $p(z)$ be analytic in U and let $h(z)$ be convex on $\bar{U}$, with $p(0) = h(0)$. If $p(z)$ is not subordinate to $h(z)$, then there exist $z_0 \in U$ and $w_0 \in \partial U$, and $m \geq 1$ for which

$$p(|z| < |z_0|) \subset h(U),$$

$$(i) \quad p(z_0) = h(w_0),$$

$$(ii) \quad z_0 p'(z_0) = m w_0 h'(w_0), \text{ and}$$

$$(iii) \quad \operatorname{Re} [z_0^2 p''(z_0) / w_0 h'(w_0)] \geq -m.$$

Theorem F ([8])

Let $h(z)$ be convex in U with $h(0) = 0$, and let $A \geq 0$. Suppose that $k > 1$ and $B(z), C(z)$ are analytic in U and satisfy

$$k \operatorname{Re} B(z) > A + |C(z) - 1| - \operatorname{Re}\{C(z) - 1\} \quad (2)$$

for $z \in U$. If $p(z)$ is analytic in U with $p(0) = 0$ and if $p(z)$ satisfies $A z^2 p''(z) + B(z) z p'(z) + C(z) p(z) < h(z)$,

then $p(z) \prec h(z)$.

Thm. B より 次の定理を得る.

Theorem 1

Let $\psi \in \Psi_1$ and let $g(z)$ be a regular function satisfying $\operatorname{Re} g(z) > \alpha$ ($\alpha < 1$). If the Euler's differential equation

$$p(z) + zp'(z) + z^2p''(z) = g(z) \quad (3)$$

has a solution $p(z)$ regular in U then $\operatorname{Re} p(z) > \alpha$.

<proof>. Def. 1 ㊦ $\psi(r, s, t) = r + s + t$ を考へる. Thm. B ㊦ $g(z) - \alpha = Q(z)$, $p(z) - \alpha = P(z)$ とおくと $\operatorname{Re} Q(z) > 0$ となり,

$$P(z) + zP'(z) + z^2P''(z) = Q(z)$$

は 正則な解 $P(z)$ をもち, $\operatorname{Re} P(z) > 0$ となる. i.e., $\operatorname{Re} p(z) > \alpha$.

Q.E.D.

Thm. 1 の例をいくつか述べる.

Example 1

Thm. 1 ㊦ $g(z) = \frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}$ を考へると $\operatorname{Re} g(z) > \alpha$ である.

1) $\alpha = \frac{1}{2}$ の場合 i.e., $g(z) = \frac{1}{1-z}$, $\operatorname{Re} g(z) > \frac{1}{2}$

のとき, 単位円内の正則な解 $p(z)$ は

$$p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} z^n \quad \operatorname{Re} p(z) > \frac{1}{2}.$$

2) $\alpha = 0$ の場合 i.e., $g(z) = \frac{1+z}{1-z}$, $\operatorname{Re} g(z) > 0$

のとき, 単位円内の正則な解 $p(z)$ は

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+1} z^n \quad \operatorname{Re} p(z) > 0.$$

Example 2

Thm. 1 で $p(z) = f'(z)$ とおくと オイラーの微分方程式 (3) は 次の3階の微分方程式になる:

$$z^2 f'''(z) + z f''(z) + f'(z) = g(z).$$

1) $g(z) = \frac{1}{1-z}$ のとき $\operatorname{Re} g(z) > \frac{1}{2}$ より Thm. 1 から

$$\operatorname{Re} f'(z) > \frac{1}{2} \quad \text{i.e., } f(z) \text{ は close-to-convex of order } \frac{1}{2}$$

となり, $f(z)$ は U で単葉となる. また, 単位円内の正則な解 $f(z)$ は

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n^2+1)} z^{n+1}.$$

2) $g(z) = \frac{1+z}{1-z}$ のとき $\operatorname{Re} g(z) > 0$ より Thm. 1 から

$\operatorname{Re} f'(z) > 0$ i.e., $f(z)$ は U 上 $close-to-convex$ となり
 熊代の定理より U で単葉である. また、単位円内の正則
 な解 $f(z)$ は

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n(n^2-2n+2)} z^n.$$

Example 3

Thm. 1 で $p(z) = \frac{f(z)}{z}$ とおくと オイラーの微分方程式 (3) は

次の 2 階の微分方程式となる;

$$z^2 f''(z) - z f'(z) + 2f(z) = z g(z).$$

$g(z) = \frac{1+z}{1-z}$ のとき $\operatorname{Re} g(z) > 0$ より Thm. 1 から

$\operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > 0$ となり, Yamaguchi [10] の結果より

$$\operatorname{Re} f'(z) > 0 \quad \text{for } |z| < \sqrt{2} - 1$$

となる. また、この円内の正則な解は

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+1} z^{n+1}.$$

次に Thm. D の応用を考える.

Example 4

Thm. D において、次のオイラーの微分方程式

$$z^2 w''(z) + z w'(z) + w(z) = z \quad (4)$$

を考える. ($b(z) = z$ の場合)

(I) $w(z) = f'(z) - 1$ とおくと, (4) は

$$z^2 f'''(z) + z f''(z) + f'(z) = z + 1 \quad \text{となる. Thm. D で}$$

$|b(z)| = |z| < 1$ であるから, $|w(z)| = |f'(z) - 1| < 1$ となり,

$\operatorname{Re} f'(z) > 0$ となる. 熊代の定理より $f(z)$ は close-to-convex となり, したがって単葉となる.

(II) $w(z) = \frac{f(z)}{z} - 1$ とおくと (4) は

$$z^2 f''(z) - z f'(z) + 2f(z) = z^2 + z \quad \text{となる. Thm. D より}$$

$|w(z)| = \left| \frac{f(z)}{z} - 1 \right| < 1$ となり, $\operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > 0$ となる.

Yamaguchi [10] の結果より

$$\operatorname{Re} f'(z) > 0 \quad \text{for } |z| < \sqrt{2} - 1$$

となり, $f(z)$ は $|z| < \sqrt{2} - 1$ で close-to-convex.

これから $|z| < \sqrt{2} - 1$ で単葉となる.

次に $Thm. F$ の応用について述べる.

Example 5

ラゲール (Laguerre) の微分方程式

$$zu'' + (\lambda + 1 - z)u' + nu = 0 \quad (5)$$

を考えよ. (n は非負の整数) この方程式は次の多項式解をもつことが知られている.

$$L_n^\lambda(x) = e^x \cdot \frac{x^{-\lambda}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} \cdot x^{n+\lambda}) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

(5) を $z^2u'' + z(\lambda + 1 - z)u' + nzu = 0$ と見る.

$Thm. F$ の仮定で $A=1$, $B(z)=2-z$, $C(z)=z$ ($\lambda=1, n=1$).

$k=2$ のときを考えよ. 仮定の不等式 (2) は

$$2x < 3 - y^2 \quad (z = x + yi) \quad \text{である.}$$

$h(z) = \frac{z}{z-2}$ とおくと $h(0)=0$ で $h(z)$ は convex である.

これから、次の subordination が成り立つ:

$$zu'' + (2-z)u' + u < \frac{z}{z-2} \Rightarrow u < \frac{z}{z-2}$$

(注) $h(z)$ の像は $(u + \frac{1}{3})^2 + v^2 < (\frac{2}{3})^2$ (円板) であり

不等式 $2x < 3 - y^2$ の領域に含まれる.

Example 6

合流型超幾何微分方程式 (あるいはクンマーの微分方程式)

$$z u'' + (\gamma - z) u' - \alpha u = 0 \quad (6)$$

を考へる. 解は

$$u_1(z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2! \gamma(\gamma+1)} z^2 + \dots$$

で与えられる. (6) を

$$z^2 u'' + z(\gamma - z) u' - \alpha z u = 0 \quad \text{と見る.}$$

こゝで $\gamma = 2$, $\alpha = -1$ とおくと

$$z^2 u'' + z(2 - z) u' + z u = 0$$

となり, Example 5 と同じ微分方程式となる. したがって,

同じ subordination が成り立つ.

よく知られた微分方程式の解の幾何学的性質については, 以下の論文に詳しい. ([1], [2], [6], [7], [8]).

References

1. Brown, R.K., Univalent solutions of $W'' + pW = 0$,
Canad. Jour. Math. 14 (1962), 69-78.
2. Miller, S.S., A class of differential inequalities implying
boundedness, Illinois Jour. Math. 20 (1976), 647-649.

3. Miller, S.S. and Mocanu, P.T., Second order differential inequalities in the complex plane, *Jour. Math. Anal. and Appl.* 65 (1978), 289 - 305.
4. " Differential subordinations and univalent functions, *Michigan Math. Jour.* 28 (1981), 157 - 171.
5. " Differential subordinations and inequalities in the complex plane, *Jour. Diff. Equa.* 67 (1987), 199 - 211.
6. Robertson, M.S., Schlicht solution of $W'' + pW = 0$, *Trans. Amer. Math. Soc.* 76 (1954), 254 - 274.
7. Saitoh, H., Univalence and starlikeness of solutions of $W'' + aW' + bW = 0$, *Annales Univ. Mariae Curie-Skłodowska Lublin-Polonia* Vol. 63 (1999), 209 - 216.
8. " On differential subordinations, 京都大学数理解析研究所講究録 1164 (2000), 133 - 143.
9. Whittaker, E.T. and Watson, G.N., *A Course of Modern Analysis*, Cambridge Univ. Press. (1902).
10. Yamaguchi, K., On functions satisfying $\operatorname{Re}\{f(z)/z\} > 0$, *Proc. Amer. Math. Soc.* 17 (1966), 588 - 591.