

従属確率変数列が与えられた場合の確率近似法

福岡大 理 渡辺正文

§ 1. 序

R-M stochastic approximation method ([5], [7], [8]) ;

$\{Y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ を x をパラメータとする確率変数列とし, 分布は未知とする。 $E[Y_n(x)] = M_n(x)$ とおくと, 十分大なる n に対して方程式

$$(1.1) \quad M_n(x) = 0$$

の根 $x = \theta_n$ (存在するとする) を求める R-M procedure は次の形で与えられる。

$$(1.2) \quad X_0 \equiv 0$$

$$X_{n+1} = X_n - a_{n+1} Y_{n+1}(X_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ここで, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正の実数列で

$$(1.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$$

このとき,

$$(1.4) \quad E[Y_{n+1}(X_n) \mid X_1, X_2, \dots, X_n] = M_{n+1}(X_n) \quad \text{a.s.}, \quad n = 0, 1, \dots$$

なる仮定の下で

$$(1.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |X_n - \theta_n| = 0 \quad \text{a.s.}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E|X_n - \theta_n|^2 = 0$$

が成り立ったための条件が色々と研究されてきている。また、確率近似法 (S.A.) は統計的構造があまりよく知られていない系において、なんらかの意味で最適な解を逐次的に推定出来るという点から、学習制御の面に応用されている。S.A. を応用しようとする場合、例えば、パターン分類問題における、識別関数の学習、与えられた input と output の列により、未知の関数を学習する問題等においては、仮定 (1.4) の成立の下で S.A. を用いる事により、その収束が示される。すなわち、(1.4) が満たされる自然な仮定として、観測列 (学習列) は独立であることが要求される。独立でない場合は、かならずしも (1.4) が成り立つとはかぎらない。

本報告は (1.4) がかならずしも満たされない場合の S.A. を与える。すなわち、観測 X_n の列が従属の場合を仮定する。一般に、任意の従属 X_n の列に対して、(1.5) が成り立ったための条件を求めることは困難であろう。しかし、ある種のエルゴート性 (mixing condition) が満たされる場合は可能であることを示す。本報告では、従属確率変数列の「大数の法則」が成り立つ条件の下での S.A. を考える。また、収束は a.s. 収束について示す。

5.2 準備

- ・ R^N, R^M を各々 N 次元 Euclid 空間, M 次元 Euclid 空間とする.
- ・ $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ を R^M の値をとる random vectors の列 (観測列) とする.
- ・ $\Phi_n(x, y) = (\Phi_n^{(1)}(x, y), \dots, \Phi_n^{(N)}(x, y))$, $n=1, 2, \dots$ を $R^N \times R^M \rightarrow R^N$ の可測変換とする.

<問題>

十分大なる n に対して, 方程式

$$(2.1) \quad E[\Phi_n(x, Y_n)] = 0$$

の根 $x = \theta_n$ を求めよ。但し, $E[\Phi_n(x, Y_n)]$ は未知とし, その代りに, 各 n と (x, Y_n) に対し, $\Phi_n(x, Y_n)$ の観測値 (雑音混り)

$$(2.2) \quad Y_n(x) = \Phi_n(x, Y_n) + Z_n$$

を利用出来る。ここで, Z_n は x に無関係な分布 をする R^N の値をとる random vector とする。

上の問題に対し, 根 θ_n (存在するとする) を求める procedure は (4.2) の R-M procedure を用いる。すなわち,

<Procedure>

$$(2.3) \quad X_0 \equiv 0$$

$$X_{n+1} = X_n - a_n Y_{n+1}(X_n), \quad n=0, 1, 2, \dots$$

ここで,

$$(2.4) \quad Y_{n+1}(X_n) = \Phi_{n+1}(X_n, Y_{n+1}) + Z_{n+1},$$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正の実数列とする。

記号

- ・ $\langle \cdot, \cdot \rangle$; R^N の内積
- ・ $\|\cdot\|$; R^N のノルム, 内積より induced される Euclid norm.
- ・ $\|\cdot\|_N$; $N \times N$ -matrix のノルム, i.e. $A: N \times N$ -matrix

$$\|A\|_N = \sup_{\|x\|=1} \langle Ax, Ax \rangle^{\frac{1}{2}}$$
- ・ I ; 単位行列 (恒等変換)
- ・ 0 ; 零ベクトル または, 零変換.

さらに, ベクトルは「たて」ベクトルとする。

Lemma 1.

$\|\cdot\|_0$ を $\|A\|_0 = \max_{1 \leq i, j \leq N} |a_{ij}|$, $A = (a_{ij})$; $N \times N$ -matrix
 で定義されるノルムとすると, 2つのノルム $\|\cdot\|_N$, $\|\cdot\|_0$ は
 同値となる。すなわち, $\exists \alpha, \beta > 0$; $\alpha \|A\|_0 \leq \|A\|_N \leq \beta \|A\|_0$

Lemma 2. ([7], [8])

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ を非負の実数列とし, 以下
 条件が成り立つとする,

$$(i) \quad x_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \beta_k \prod_{t=k+1}^n (1 - d_t) + \sum_{k=1}^n K_k \prod_{t=k+1}^n (1 - d_t), \quad n=1, 2, \dots,$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty,$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0,$$

$$(iv) \quad \sum_{n=1}^{\infty} K_n < \infty$$

このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ が成り立つ, さらに, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta < \infty$
 が成り立つときは, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界列となる。

Lemma 3. (Kronecker の lemma [2])

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ を実数列とし, $|\sum_{n=1}^{\infty} x_n| < \infty$ とする。このとき,
 任意の 0 に収束する単調減少数列 $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n \sum_{i=1}^n x_i / k_i = 0.$$

Lemma 4.

X ; 線形ノルム空間

$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{u_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{u_n^{(2)}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$; X の 4 つの列

$\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$; $X \rightarrow X$ の有界線形作用素の列で次の条件を満たす,

$$x_{n+1} = T_{n+1} x_n + u_{n+1}^{(1)} + u_{n+1}^{(2)} + v_{n+1}, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

さらに, 以下の条件を満たす, 正の実数列 $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$, 非負の実数列 $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$, 正の定数 K_i ($i=1, 2, 3, 4, 5$) および, 正整数 n_0 が存在するとする,

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty,$$

$$(ii) \quad \sup_{n \geq 1} \{|\frac{1}{\alpha_{m+1}} - \frac{1}{\alpha_n}| \beta_n\} \leq K_1,$$

$$(iii) \quad \sup_{n \geq 1} \beta_n \leq K_2, \quad \sup_{n \geq 1} \beta_n / \beta_{m+1} \leq K_3,$$

$$(iv) \quad \|T_n T_{n-1} \cdots T_m T_{m+1}\| \leq K_4 \prod_{k=m+1}^n (1 - \alpha_k), \quad n > m \geq n_0$$

$$(v) \quad \|I - T_n\| \leq \alpha_n M_n, \quad n \geq 1$$

$$(vi) \quad \sup_{n \geq 1} \beta_n M_n \leq K_5 \quad \text{または} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n M_n < \infty$$

$$(vii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n^{(1)}\| / \alpha_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n^{(2)}\| < \infty$$

$$(viii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \beta_n^{-1} \left\| \sum_{m=1}^n \alpha_m^{-1} v_m \right\| = 0$$

このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$ と成る。

proof. $\alpha_0 = 1$ とし示す。さう $K, 1 > \alpha_n (n \geq 1)$ とする。

$$T_m^{(n)} = T_n T_{n-1} \cdots T_{m+1}, \quad T_n^{(n)} = I \quad \text{とあくと,}$$

$$x_n = \sum_{k=1}^n T_k^{(n)} u_k^{(1)} + \sum_{k=1}^n T_k^{(n)} u_k^{(2)} + \sum_{k=1}^n T_k^{(n)} v_k + T_0^{(n)} x_0.$$

ここで, (i) と (iv) より

$$\|T_0^{(n)} x_0\| \leq K_4 \prod_{k=1}^n (1 - \alpha_k) \|x_0\| \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

(i), (iv), (vii) と Lemma 2. より

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \|T_k^{(n)} u_k^{(1)}\| + \left\| \sum_{k=1}^n T_k^{(n)} u_k^{(2)} \right\| \\ & \leq K_4 \sum_{k=1}^n \prod_{t=k+1}^n (1 - \alpha_t) (u_k^{(1)} + u_k^{(2)}) \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

次に, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n T_k^{(n)} v_k \right\| = 0$ を示す。

$$S_n = \alpha_n \sum_{k=1}^n \alpha_k^{-1} v_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$S_0 \equiv 0, \quad \alpha_0 = 1$$

とあくと,

$$\begin{aligned} y_n & \equiv \sum_{k=1}^n T_k^{(n)} v_k = S_n + \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k T_k^{(n)} - \alpha_{k+1} T_{k+1}^{(n)}) \alpha_k^{-1} S_k \\ & = S_n + \sum_{k=1}^{n-1} T_{k+1}^{(n)} (T_{k+1} - I) S_k + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{k+1} (\alpha_{k+1}^{-1} - \alpha_k^{-1}) T_{k+1}^{(n)} S_k \end{aligned}$$

したがって, (ii), (iv), (v) により

$$\begin{aligned} \|y_n\| & \leq \beta_n (\beta_n^{-1} \|S_n\|) + K_4 \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{k+1} \beta_{k+1} M_{k+1} \prod_{t=k+1}^n (1 - \alpha_t) \beta_{k+1}^{-1} \|S_k\| \\ & \quad + K_1 \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{k+1} \prod_{t=k+1}^n (1 - \alpha_t) \beta_k^{-1} \|S_k\| \end{aligned}$$

ここで, (iii), (viii) より

$$\beta_{k+1}^{-1} \|S_k\| = \beta_k \beta_{k+1}^{-1} (\beta_k \|S_k\|) \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

したがって, Lemma 2 より $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = 0$.

よって, 証明された。

注. $\alpha_n = n^\alpha$, $\beta_n = n^{-\beta}$ ($0 < \beta < 1$) とすれば条件 (i), (ii), (iii) は満たされる。また, $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ を (i) を満たす正実数列とし, $\beta_n = \alpha_n^\delta$ ($0 < \delta < 1$) として, (ii) を仮定すると, 条件 (iii) は満たされる。

次の定理は Iosifescu and Theodorescu [3] にある。

Lemma 5. (Strong law of large numbers)

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$; Pr. space

$\{\mathcal{B}_n\}_{n=1}^\infty$; $\mathcal{A}$ の sub- σ -fields の列

$\{X_n\}_{n=1}^\infty$; 乱. V. の列で, 各 n に對し, X_n は $\mathcal{B}_n$ -可測。

(i) $\exists$ 正整数 n_1 ; $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \phi\left(\bigvee_{i=1}^n \mathcal{B}_i, \bigvee_{i=n+n_1}^\infty \mathcal{B}_i\right) < 1$,

ここで, $\phi(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = \sup_{B \in \mathcal{A}_2} \left\{ \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \Omega} |P(B|\mathcal{A}_1)(\omega) - P(B)| \right\}$

で $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ は $\mathcal{A}$ の sub- σ -fields とする。(dependent coefficient of $\mathcal{A}_1$ and $\mathcal{A}_2$)

(ii) $\sum_{n=1}^\infty p_n^{1/2} < \infty$,

ここで, $p_n = \sup_{m \geq 1} \phi(\mathcal{B}_m, \mathcal{B}_{m+n})$

(iii) $\{k_n\}_{n=1}^\infty$ を $k_n \downarrow 0$ なる正の実数列とし,

$$\sum_{n=1}^\infty k_n^2 E|X_n - EX_n|^2 < \infty$$

ならば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n \sum_{i=1}^n (X_i - EX_i) = 0 \quad \text{a.s.}$$

Proof.

[3] を参照。

§3. 定理

仮定 以下において, δ, α_0, K_0 は正の定数とし, n_0, n_1 は正整数, $\{\theta_n\}_{n=0}^\infty$ は R^N の列とする。特に, $\theta_0 = 0$, $0 < \delta < 1/2$ とする。

$$(A0) \quad a_n \downarrow 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$$

$$(A1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1+\delta} < \infty$$

$$(A2) \quad \sup_{n \geq 1} (a_{n+1}^{-1} - a_n^{-1}) a_n^\delta \leq K_0$$

$$(H0) \quad \Phi_n(x, y) = A_n(y)(x - \theta_n) + B_n(y), \quad n = 1, 2, \dots$$

ここで, 各 $n = 1, 2, \dots$ に対して

$$A_n(y) = (A_n^{ij}(y)) : N \times N \text{- matrix}$$

$$B_n(y) = (B_n^{ij}(y), \dots, B_n^{Nj}(y))$$

各, $A_n^{ij}(\cdot), B_n^{ij}(\cdot)$ は Borel measurable function.

$$(H1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1+\delta} E \|A_n(Y_n)\|_N^2 < \infty$$

$$(H2) \quad \inf_{\|x\|=1} \langle A_n(Y_n)x, x \rangle \geq 0 \quad \text{a.s. for } n \geq n_0$$

$$(H3) \quad \inf_{\|x\|=1} \langle E[A_n(Y_n)]x, x \rangle \geq \alpha_0 \quad \text{for } n \geq n_0$$

$$(H4) \quad \|E[B_n(Y_n)]\| = 0 \quad \text{for } n \geq n_0$$

$$(H5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1+\delta} E \|B_n(Y_n)\|^2 < \infty$$

$$(H6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|E[Z_n]\| = 0$$

$$(H7) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1+\delta} E \|Z_n - EZ_n\|^2 < \infty$$

$$(H8) \quad \|\theta_{n-1} - \theta_n\| = o(a_n) \quad \text{または} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|\theta_{n-1} - \theta_n\| < \infty$$

$B_n = \sigma(Y_n, Z_n), n = 1, 2, \dots$ とする。

$$(H9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \phi\left(\bigvee_{i=1}^n B_i, \bigvee_{i=n+1}^{\infty} B_i\right) < 1$$

$$(H10) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^{\frac{1}{2}} < \infty$$

ここで, $\rho_n = \sup_{m \geq 1} \phi(B_m, B_{m+n})$

注. 仮定(H0), (H4)より θ_n は方程式

$$E[\Phi_n(x, \gamma_n)] = 0, \quad n \geq n_0$$

の根となる。

Theorem.

仮定(A0)~(A2), (H0)~(H10)が成り立つならば, (2.3)の procedureの下で,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|X_n - \theta_n\| = 0 \quad \text{a.s.}$$

が成り立つ。

Proof.

(2.3)より,

$$(3.1) \quad X_{n+1} - \theta_{n+1} = (I - a_{n+1}A_{n+1})(X_n - \theta_n) + a_{n+1} \left\{ (I - a_{n+1}A_{n+1}) \frac{(\theta_n - \theta_{n+1})}{a_{n+1}} - B_{n+1} - Z_n \right\}$$

ここで, $A_n = A_n(\gamma_n)$, $B_n = B_n(\gamma_n)$ とする。

さらに,

$$(3.2) \quad X_n - \theta_n = x_n, \quad EA_n = \hat{A}_n, \quad EZ_n = \hat{Z}_n$$

$$(3.3) \quad T_n = I - a_n \hat{A}_n$$

$$(3.4) \quad U_n = \{ (I - a_n \hat{A}_n) \hat{A}_n^{-1} (\theta_{n+1} - \theta_n) + \hat{Z}_n \}$$

$$(3.5) \quad V_n = \{ (\hat{A}_n - A_n) x_{n+1} + (\hat{A}_n - A_n) (\theta_{n+1} - \theta_n) + (\hat{Z}_n - Z_n) - B_n \}$$

とおくと,

$$(3.6) \quad X_{n+1} = T_{n+1} X_n + a_{n+1} U_{n+1} + a_{n+1} V_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

したが、て、Lemma 4 において、 $\alpha_n = \alpha_0 a_n$, $\beta_n = a_n^\delta$ とし、
 Lemma 4 の条件を満たすことを示すとよい。すなわち、以下の事を証明するとよい。

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n^{(1)}\| = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \|U_n^{(2)}\| < \infty$$

$$\text{ここで,} \quad U_n^{(1)} = a_n'(\theta_{n+1} - \theta_n) + \hat{Z}_n$$

$$U_n^{(2)} = \hat{A}_n(\theta_{n+1} - \theta_n)$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1-\delta} \left\| \sum_{k=1}^n V_k \right\| = 0 \quad \text{a.s.}$$

$$(3) \quad \exists \text{ 正定数 } C_0, \text{ 正整数 } N_0;$$

$$\|T_m^{(n)}\|_N \leq C_0 \prod_{t=m+1}^n (1 - \alpha_0 a_t), \quad n > m \geq N_0$$

$$\text{ここで,} \quad T_m^{(n)} = T_n T_{n-1} \cdots T_{m+1}, \quad T_n^{(n)} = I \text{ とする.}$$

$$(4) \quad \|I - T_n\|_N \leq \alpha_0 a_n M_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{1-\delta} M_n < \infty \text{ とする,}$$

正の実数列 $\{M_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する。ここで、 $T_n = I - a_n \hat{A}_n$ 。

(1) の証: (H1), (H6), (H8) より明らか。

(3) の証: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の単調性; (H1), (H3) より成り立つ。

(4) の証: $I - T_n = a_n \hat{A}_n$ なることと, (H1) より成り立つ。

(2) の証: $V_k = V_k^{(1)} + V_k^{(2)} + V_k^{(3)} + V_k^{(4)}$ とする, ここで,

$$(3.7) \quad V_k^{(1)} = (\hat{A}_k - A_k) x_{k-1}, \quad V_k^{(2)} = (\hat{A}_k - A_k)(\theta_{k-1} - \theta_k)$$

$$V_k^{(3)} = z_k - \hat{z}_k, \quad V_k^{(4)} = -B_k$$

$$i = 1, 2, 3, 4 \text{ に対して,} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{1-\delta} \left\| \sum_{k=1}^n V_k^{(i)} \right\| = 0 \text{ を示すと (2) は}$$

示される。

$i = 3, 4$ に対しては, lemma 5 と (H4), (H5), (H7), (H9),

(H10) および, $0 < \delta < 1/4$ なる δ により成り立つ。

$i=2$ のときは,

$$(3.8) \quad a_n^{-\delta} \left\| \sum_{k=1}^n V_k^{(2)} \right\| \leq a_n^{-\delta} \sum_{k=1}^n a_k \|\hat{A}_k\|_N a_k^{-1} \|\theta_k - \theta_{k-1}\| + a_n^{-\delta} \sum_{k=1}^n a_k \|A_k\|_N a_k^{-1} \|\theta_k - \theta_{k-1}\|$$

より, Lemma 3 (Kronecker) と (H1), (H8) により, 成り立つことがわかる。

$i=1$ のとき, $n_0=1$ として示す。(3.1) と (H1), (H2) により, 次が成り立つ。

$$(3.9) \quad \|X_n\| \leq L_0 \sum_{k=1}^n a_k \|R_k\| \quad \text{a.s.}$$

$$\text{ここで, } R_k = \{ (I - a_k A_k)(\theta_{k-1} - \theta_k) - B_k - Z_k \},$$

L_0 は a.s. finite な r.v. である。さらに, 次も成り立つ。

$$(3.10) \quad \|X_n - X_{n-1}\| \leq a_n \|A_n\|_N \|X_{n-1}\| + a_n \|R_n\| \quad \text{a.s.}$$

次に,

$$(3.11) \quad S_n = a_n^{1-\delta} \sum_{k=1}^n (\hat{A}_k - A_k), \quad n=1, 2, \dots$$

$$S_0 = 0, \quad a_0 = 1$$

ここで, δ は $(1-\delta)/2 \geq \delta \geq 3\delta$ を満たすものとする。

このとき, Lemma 5より (Lemma 1 に注意して)

$$(3.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n\|_N = 0 \quad \text{a.s.}$$

が成り立つ。さらに, Y_n を次の様におく,

$$(3.14) \quad Y_n = a_n^{1-\delta} \sum_{k=1}^n (\hat{A}_k - A_k) X_{k-1} \quad (= a_n^{1-\delta} \sum_{k=1}^n V_k^{(1)}).$$

このとき, $\hat{A}_k - A_k = (a_k^{1-\delta})^{-1} S_k - (a_{k-1}^{1-\delta})^{-1} S_{k-1}$ となることより,

$$(3.15) \quad \|Y_n\| \leq a_n^{\delta-\delta} \|S_n\|_N \|X_{n-1}\| + a_n^{1-\delta} \sum_{k=1}^{n-1} (a_k^{1-\delta})^{-1} \|S_k\|_N \|X_{k-1} - X_k\|$$

となる。よって, (3.9), (3.10), (3.12) および, 仮定 (H1), (H5), (H6), (H7), (H8) により, Lemma 3 を用い ($\frac{1-\delta}{2} \geq \delta \geq 3\delta$ に注意して) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = 0$ a.s. が成り立つ。したがって, $i=1$ のときも成り立ち, 定理は証明された。

§ 4. 応用例

The construction of an unknown function ([4] etc.):

$$y(\text{input}) \rightarrow \boxed{f} \rightarrow w = f(y) (\text{output}), y, w \in \mathbb{R}.$$

input y に対し, output $w = f(y)$ が得られる system を考える。ここで, $f(\cdot)$ は未知の実数値 Borel 可測関数とする。

我々は, 未知の関数 f を input r.v.'s の列 $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ と output r.v.'s の列 $\{W_n\}_{n=1}^{\infty}$, $W_n = f(Y_n)$, により学習 (推定) する問題を考える。ここで, $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は独立とは限らない。

$\{\varphi_i(\cdot)\}_{i=1}^N$ を実数値 Borel 関数の N 個の組とする。このとき, 我々の問題は,

$$(4.1) \quad J_n(\mathbb{C}) = E \left[f(Y_n) - \sum_{i=1}^N C_i \varphi_i(Y_n) \right]^2$$

を最小にする $\mathbb{R}^N$ の vector $\mathbb{C}$ を求めることとなる。ここで,

$$\mathbb{C} = (C_1, C_2, \dots, C_N)^T, \quad t \text{ は転置を表す。}$$

(4.1) を最小にする vector は次の方程式の根となる。

$$(4.2) \quad E \left[\mathcal{P}(Y_n) \mathcal{P}(Y_n)^T \mathbb{C} - f(Y_n) \mathcal{P}(Y_n) \right] = 0$$

ここで, $\mathcal{P}(\cdot) = (\varphi_1(\cdot), \dots, \varphi_N(\cdot))^T$ とする。

上の式において

$$\mathcal{G}(y) \mathcal{G}(y)^t = A(y)$$

とおくと,

$$(4.3) \quad \langle A(y) \mathcal{C}, \mathcal{C} \rangle \geq 0 \quad \forall y \in R, \quad \forall \mathcal{C} \in R^N$$

となる。さらに、以下の仮定をする:

- (i) $f(\cdot)$; 有界実数値 Borel 関数
- (ii) $\mathcal{G}_i(\cdot)$ ($i=1, 2, \dots, N$) ; 有界実数値 Borel 関数
- (iii) $E[A(Y_n)]$ は正値定符号行列
- (iv) $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 2.2.4 の列で以下の条件を満足する ;

A) 定常過程である,

$$B) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \phi\left(\bigvee_{i=1}^n \mathcal{B}_i, \bigvee_{i=n+1}^{\infty} \mathcal{B}_i\right) < 1,$$

$$C) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n^{1/2} < \infty,$$

ここで, $\mathcal{B}_n = \sigma(Y_n)$ ($n=1, 2, \dots$) .

以上の条件の下では, 方程式 (4.2) は一意根 $\mathcal{C}^*$ を持つ。すなわち,

$$E[A(Y_n)] \mathcal{C}^* = E[f(Y_n) \mathcal{G}(Y_n)].$$

したがって, 定理において

$$(4.4) \quad \Phi_n(\mathcal{C}, y) = \mathcal{G}(y) \mathcal{G}(y)^t (\mathcal{C} - \mathcal{C}^*) + \mathcal{G}(y) \{ \mathcal{G}(y)^t \mathcal{C}^* - f(y) \}$$

すなわち,

$$A(y) = \mathcal{G}(y) \mathcal{G}(y)^t, \quad B(y) = \mathcal{G}(y) \{ \mathcal{G}(y)^t \mathcal{C}^* - f(y) \}$$

$$\theta_n = \mathcal{C}^* \quad (n \text{ に 関 係 し ない ; 定 常 性 より }), \quad \Sigma_n \equiv 0,$$

として, 定理の条件を満足することがわかる。

したが、て、 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を (A0) ~ (A2) を満足する正の実数列として、

$$(4.5) \quad C_0 = 0$$

$$C_{n+1} = C_n - a_{n+1} Y_{n+1}(C_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } Y_{n+1}(C_n) &= \mathcal{P}(Y_{n+1}) \mathcal{P}(Y_{n+1})^T C_n - W_{n+1} \mathcal{P}(Y_{n+1}) \\ &= \mathcal{P}(Y_{n+1}) \mathcal{P}(Y_{n+1})^T (C_n - C^*) + \mathcal{P}(Y_{n+1}) \{ \mathcal{P}(Y_{n+1})^T (C_n - C^*) \\ &\quad - f(Y_{n+1}) \}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

なる R-M procedure の下で $\lim_{n \rightarrow \infty} \|C_n - C^*\| = 0$ a.s. が定理の直接の結果として成り立つ。したが、て、input 列が従属確率変数列であ、ても、ある種のエルゴート性が仮定されるならば、独立のときと同じ procedure で同様の結果が得られることがわかる。

参考文献

- [1] Doob, J. ; Stochastic processes, Wiley, New York.
- [2] Lo  ve, M.; Probability Theory, Van Nostrand.
- [3] Iosifescu, M. and Theodorescu, R.; Random processes and learning, Springer, (1969).
- [4] Mendel, J.M. and Fu, K.S. ; Addaptive, learning, and pattern recognition system, Theory and applications, Academic Press, (1970).

- [5] Robbins, H. and Monro, S. ; A stochastic approximation method, Ann. Math. Stat., 22,(1951), 400~407.
- [6] Stout, W. F. ; Almost sure convergence, Academic Press, (1974).
- [7] Wasan, M. T. ; Stochastic approximation method, Cambridge Univ. Press, (1969).
- [8] Watanabe, M. ; On Robbins-Monro stochastic approximation method with time varying observations, Bull. Math. Stat., 16, No.3~4, (1975), 73~91.
- [9] ——— ; A stochastic approximation method with a sequence of dependent random variables, (to appear).
- [10] ——— ; An application of a stochastic approximation method with a sequence of dependent random variables, Fukuoka Univ. Sci. Reports , Vol.6, 43~51, (1976).