

非線型制御の絶対安定性について

東北大学 理学部 加藤 順二

§1 序 攪乱された運動の方程式が

$$(1) \quad \dot{x} = Ax$$

で与えられている場合には、自動制御系

$$\dot{x} = Ax + b\xi$$

$$(2) \quad (a) \quad \xi = f(\sigma), \quad \sigma = {}^T Cx$$

$$(b) \quad \dot{\xi} = f(\sigma), \quad \sigma = {}^T Cx - p\xi$$

の絶対安定性の問題について紹介をしよう。ここで、

A は定数行列、 b, C は定数ベクトル、左角の p は転置をあらわしてあり、反射的には

(1) は state system

C, b は control parameters

σ は control signal

$f(\sigma)$ は characteristic function

そして一般に (a) は直接制御、(b) は間接制御と呼ばれてあり、

(2) にあたる非線型性は f のみに由来している。これは

一見してわかるように様々な理想化のもとで得られたもので、特性函数 f に対しても次のような制限が課せられているものとする。すなわち、

(i) $f(\sigma)$ は $\sigma \in (-\infty, \infty)$ で連続。

(ii) ある定数 $0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \infty$ に対して

$$h_1 \sigma^2 \leq \sigma f(\sigma) \leq h_2 \sigma^2 \quad (\sigma \neq 0), \quad f(0) = 0$$

が常に成り立っている。

(iii) $\int \sigma f(\sigma) d\sigma \rightarrow +\infty \quad (|\sigma| \rightarrow \infty).$

上の条件をみたす函数の族を (iii) における不等式において等号のあつたしに於いて $\alpha((h_1, h_2))$, $\alpha((h_1, h_2))$ 等で表わすことにする。特性函数の族としては、連続性の失われている場合や $\sigma = 0$ の近傍で恒等的に零となっている場合なども取り扱われている。このような式の理想化あるいは特性函数に対する制限によって実際の問題がどの程度 cover されているか、あるいは、今後特にこの方向での研究が望まれているかということは技術関係の方の説明に待つ。こゝでは、(2) あるいは、そこで σ がベクトルの場合、あるいは、遅れ時間を持つ場合について、数学的な立場から考えてみたい。

絶対安定性 (absolute stability) のことは Lurie が初めて用いた言葉 (1955) だと思いましたが、1944年に Lurie と Postnikov によって提起された問題で、ある族に属する特性

函数の如何にかかわらず (2) のすべての解がものを減らし共に零に近づくこと、すなわち、零解が局所的漸近安定にあることを表わしている。したがって、これはいわゆる全安定 (total stability) ^(注1) と呼ばれているものの一種だと考えられるが、ここでは摂動項、すなわち、特性函数とある特定の族に制限して考えることから、より exact な評価が可能となっている。

§2. 直接制御と間接制御. この二つは feedback の操作のやり方の違いから起るもので、技術的には本質的な違いをもっていると考えられており、数学的にもその取り扱いの上でかなりの違いを示している。しかし、その違いは state matrix A の特性根の状態に由来していると云った方がより本質的だと云える。

すなわち、(2A) は

$$(3) \quad \dot{x} = Ax + bf(Tcx)$$

と書けて、この零解の局所的漸近安定性を示すことが問題となる。この (3) は自治系であり、危点は解だからこの結果が成り立つためには、まず危点は $x=0$ に限ることが示されなくてはならない。今後を通じて、特性函数は引で述べた族に制限されているものとすれば、適当な正の定数 δ に対して

$f(\sigma) = \lambda \sigma$ はこの族に属している。したがって、上に述べたことから

$$Ax + \lambda b^T Cx = 0$$

は $\lambda = 0$ のみ解を持つこと、すなわち、行列 $D = A + \lambda b^T C$ が正則であることが成り立たなければならない。

今、 A の特根の一つが零であると仮定すれば、適当な正則行列 P によって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A^* & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ 0 \cdots 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすることが出来る。したがって、

$$\det D = \det [P^{-1}AP + \lambda (P^{-1}b)^T ({}^T P C)].$$

したがって、 $P^{-1}b = (b_1, \dots, b_n) = (b^*, b_n)$, ${}^T P C = (c_1, \dots, c_n) = (C^*, C_n)$ と記せば、

$$(4) \quad \det D = \lambda c_n \det \begin{pmatrix} A^* & b^* \\ 0 \cdots 0 & b_n \end{pmatrix} \neq 0$$

が成り立つ条件となる。さて、変換 $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, y は $(n-1)$

ベクトル、 z はスカラー、によつて (3) は

$$\dot{y} = A^* y + b^* f({}^T C^* y + C_n z)$$

$$\dot{z} = \delta y_{n-1} + b_n f({}^T C^* y + C_n z),$$

すなわち

$$(5) \quad \dot{y} = A^* y + b^* f(\sigma), \quad \dot{z} = \delta y_{n-1} + b_n f(\sigma)$$

$$\sigma = {}^T C^* y + C_n z$$

に移される。 $C_n \neq 0$ に注意して変換

$$(y, z) \rightarrow (y, \sigma) : y = y, \quad \sigma = {}^T C^* y + C_n z$$

を施せば、これは正則で (5) は

$$\dot{y} = A^* y + b^* f(\sigma), \quad \dot{\sigma} = {}^T d y - f f(\sigma)$$

(6)

$$d = {}^T \begin{pmatrix} A^* & \\ & 0 \dots 0 \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^* \\ C_n \end{pmatrix}, \quad f = -{}^T C^* b^* - C_n b_n$$

に変換される。更に、変換

$$(y, \sigma) \rightarrow (u, \xi) : y = A^* u + b^* \xi, \quad \sigma = {}^T d u - f \xi$$

を考える。この変換の係数となる行列式を求めると、 d, f は

(6) で与えられているから、

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A^* & b^* \\ {}^T d & -f \end{pmatrix} &= \det \left[\begin{pmatrix} E & 0 \\ {}^T C^* & C_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* & b^* \\ 0 \dots 0 \delta & b_n \end{pmatrix} \right] \\ &= C_n \det \begin{pmatrix} A^* & b^* \\ 0 \dots 0 \delta & b_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。これは (4) より零ではない。したがって、この変換は正則で、これによつて (6) は

$$(7) \quad \dot{u} = A^* u + b^* \xi, \quad \dot{\xi} = f(\sigma)$$

$$\sigma = {}^T d u - f \xi$$

に移される。これは (2b)。すなわち、周知制御系をあらわしている。すなわち、 A の極位置 $\lambda = -1$ の零であるとき、(2)

が絶対安定であるためには条件(4)が成り立たねばならない。
かつ、この条件のもとで、系(7)が絶対安定であることが必要かつ充分である。なお、条件(4)において、 $\delta=0$ すなわち、 A が零を単因子が一次の特性根としてもつ場合は A^* は正則。
すなわち、 A は零を特性根として只一つだけ持つことは明かである。

逆に、(2b)を考える。この絶対安定性とは $(x, \xi) \rightarrow 0$ となることである。今、変数変換

$$(x, \xi) \longrightarrow y: \quad y = \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}$$

を考えて、

$$A^* = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c^* = \begin{pmatrix} c \\ -f \end{pmatrix}$$

と与れば、(2b)は直ちに、

$$\dot{y} = A^* y + b^* f(\sigma), \quad \sigma = c^* y.$$

となつて、これは(2a)すなわち、直接制御の形をしている。
これに対して、直接制御の場合に述べたのと同様にある定数 k に対して $D^* = A^* + k b^* c^*$ が正則であること、

$$\det D^* = \det \begin{pmatrix} A & b \\ k c^* & -f \end{pmatrix} = k \det \begin{pmatrix} A & b \\ c^* & -f \end{pmatrix} \neq 0$$

であることが絶対安定性のための必要条件となる。したがって、特に、特性関数の族として $k \neq 0$ に対して、 $f(\sigma) = 0$ とな

り得る場合は除外されていなくてはならない。また、このと

ろ、変換

$$(x, \xi) \longrightarrow (u, \sigma): \quad u = Ax + b\xi, \quad \sigma = {}^T Cx - f\xi$$

は正則で、これによって

$$\dot{u} = Au + bf(\sigma), \quad \dot{\sigma} = {}^T Cu - ff(\sigma)$$

すなわち、(6) の形をしている。上にのべたことをまとめれば、(2a) の state matrix A が 0 を特性根とする場合が同接制御だと述べてもよいことを示している。

特性函数の族が $\mathcal{O}([r_1, r_2])$ であるときには $f(\sigma) \in \mathcal{O}([r_1, r_2])$ に対して $f^*(\sigma) = f(\sigma) - r_1 \sigma$ とおけば、 $f^*(\sigma) \in \mathcal{O}([0, r_2 - r_1])$ となっていて(こゝでは条件(iii)は無視して考える)、(2a) すなわち、

$$(8) \quad \dot{x} = Ax + bf(\sigma), \quad \sigma = {}^T Cx$$

は、 $A^* = A + r_1 b {}^T C$ とおいて

$$\dot{x} = A^*x + bf^*(\sigma), \quad \sigma = {}^T Cx$$

に変換される。したがって、特性函数の族において $r_1 = 0$ の場合だけを考えてよい。 A^* の特性根は r_1 が充分小さければ A の特性根の充分小さな近傍にとどまっている。ゆえに、 A の特性根がすべて負の実部を持つとき(このとき簡単に A は安定であると云う) r_1 を充分小さくすれば $A^* = A - r_1 b {}^T C$ も安定である。したがって、逆に、特性函数の族が $\mathcal{O}([0, r_2])$ あるいは $\mathcal{O}((0, r_2])$ で与えられているとき、 A が安定ならば、充分小

るな k_1 に対して、 A^* が安定であるという性質を保存しながら、特性函数の族が $O(\{k_1, k_2\})$ あるいは $O(\{k_1, k_2 + k_1\})$ であって $0 < k_1 < k_2 \leq \infty$ としてよい。

$k_1 = 0$ と仮定すれば、いくらでも小さな定数 $k > 0$ に対して $f(\infty) = k\omega$ はこの族に属している。したがって、(8) が絶対安定であるためには、このような $f(\infty)$ に対して、(8) の零解が漸近安定でなくてはならない。すなわち、行列 $A + kb^T c$ は安定でなくてはならない。したがって、 A が正の実部をもつ特性根をもつことはできない。

かくして、 $k_1 = 0$ のとき、制御系 (8) は *Aizerman* と *Gantmacher* に従って A が安定であるか否かによって分類することが出来る。

さて、上述において、必要条件を求めろのに、 $f(\infty) = k\omega$ を代入して考えた。この逆の問題が *Aizerman's conjecture* と呼ばれるもので、

“特性函数の族を $O(I)$ (I はある区間) としたとき、すべての $k \in I$ に対して、 $f(\infty) = k\omega$ としたとき (8) の零解が漸近安定ならば (8) は絶対安定か”
という問題が考えられるが、これは必ずしも成り立たないことが示されている。

絶対安定性を調べる上で、現在までに知られている一般的

な方法は Liapunov の直接法と Popov の方法につらうように思われる。そこでこの二つの方法について述べていきたい。

§3. Liapunov の直接法。前節において、直接制御と間接制御との違いについて考えたが、(2b) と A を正則としたときの (2a) との間には取り扱い上、差があるので今後とも区別して考えることにする。

これまでに知られている結果の多くは multiple feedback の場合に対しても成り立っているのでこの節では主としてこの場合を考えることにする。multiple feedback の場合とは、(2a), (2b) に おける σ がベクトルで与えられている場合であって、今、各量の次元を

x : n ベクトル,

$\sigma, \dot{\sigma}$: m ベクトル,

A : (n, n) 行列,

b, c : (n, m) 行列,

f : (m, m) 行列

と置く。このとき、特性函数の族に関する条件は

(i) 各 $f(\sigma)$ に対して次の条件を満たすスカラー函数 $U(\sigma)$ が存在する,

(A) $U(\sigma)$ は連続的微分可能,

(b) $i \neq j$ に対して $\frac{\partial^2 U}{\partial \sigma_i \partial \sigma_j}$ が存在して連続である,

(c) $\|\sigma\| \rightarrow \infty$ のとき $U(\sigma) \rightarrow +\infty$, $U(0) = 0$,

(d) $f(\sigma) = \text{grad } U(\sigma) = \frac{\partial U}{\partial \sigma}$

(ii) ある定数 $0 \leq k_1 < k_2 \leq \infty$ に対して

$$f(0) = 0, \quad {}^T f(\sigma) \sigma \geq k_1 \|\sigma\|^2, \quad \|f(\sigma)\| \leq k_2 \|\sigma\|, \quad (\sigma \neq 0).$$

この場合にも、前と同様にこれらの族を $\mathcal{O}([k_1, k_2])$,

$\mathcal{O}((k_1, k_2))$ などと表わすことにしよう。(i) の仮定から容易にわかるように、線積分

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} {}^T f(\sigma) d\sigma$$

は σ_1 と σ_2 とを結ぶ道に無関係に定まる。それは $U(\sigma_2) - U(\sigma_1)$ で与えられ、 λ をスカラーとすれば

$$\begin{aligned} U(\sigma) &= \int_0^{\sigma} {}^T f(\lambda \sigma) d\lambda = \int_0^1 {}^T f(\lambda \sigma) (\lambda \sigma) \lambda d\lambda \\ &\geq k_1 \|\sigma\|^2 \int_0^1 \lambda d\lambda = \frac{1}{2} k_1 \|\sigma\|^2 \end{aligned}$$

が得られる。同様に、 $U(\sigma) \leq \frac{k_2}{2} \|\sigma\|^2$ もわかる。特に、 $f_2(\sigma)$ が σ_2 だけに依存しているときは、 $f \in \mathcal{O}([k_1, k_2])$ ならば

$f_2 \in \mathcal{O}([k_1, k_2])$, また逆に k_2 に対して k'_2 を適当に与えれば、

$f_2 \in \mathcal{O}([k_1, k_2])$ より $f \in \mathcal{O}([k_1, k'_2])$ が得られる。更に、 H を対称

行列 (m, m) 行列でその特徴根は $[k_1, k_2]$ に属しているとすれば函数 $f(\sigma) = H\sigma$ は $\mathcal{O}([k_1, k_2])$ に属することも容易にわかる。

先ず、特徴函数の族を $\mathcal{O}((0, k^*))$ として ($k^* < \infty$) 間接制御系 (2b) について考える。(2b) が絶対安定であるとするれば、 (X, Y)

平面において危点は原点に限る。 $k \in (0, k^*)$ に対して $f(k) = k\sigma$ は $(0, k^*)$ に属していることに注意して、その条件を $f(k) = k\sigma$ のときに求めると前と同様に

$$\det \begin{pmatrix} A & b \\ k^T C & -kf \end{pmatrix} = k^m \det \begin{pmatrix} A & b \\ C & -f \end{pmatrix} \neq 0$$

が得られる (p を参照)。このとき、変換

$$(x, \xi) \longrightarrow (y, \sigma) : y = Ax + b\xi, \sigma = Cx - f\xi$$

は正則で、これにより (2b) より

$$(10) \quad \dot{y} = Ay + bf(\sigma), \quad \dot{\sigma} = C^T y - pf(\sigma)$$

が得られる。すなわち、(2b) が絶対安定であるためには条件

$$(11) \quad \det \begin{pmatrix} A & b \\ C^T & -p \end{pmatrix} \neq 0$$

が成り立つことが必要であり、この条件のもとで、系 (10) が絶対安定であることと同値である。

今、 A を安定として、Ljapunov 函数

$$(12) \quad V(y, \sigma) = y^T B y + U(\sigma)$$

を考える。ここで、 B は適当に与えられた正定値対称行列

C (これを $C > 0$ で表わす) に対して次の定理で定められた正定対称行列である。

定理 1 (Ljapunov) A が安定な行列ならば任意の対称行列 C に対して

$${}^TAB + BA = -C$$

をみたす対称行列 B が一意に定まる。更に、 $C > 0$ ならば $B > 0$ である。

Liapunov の直接法で基本的な役割りを果たすのは次の定理である。

定理 2 (Barbashin-Krasovskii)。方程式

$$\dot{x} = F(x), \quad F(0) = 0$$

において $F(x)$ は連続とする。このときこの零解が大域的に漸近安定であるためには連続的微分可能なスカラー函数 $V(x)$ が存在して条件

$$1) \quad V(x) \geq 0, \quad x=0 \text{ のときに限り } V(x)=0,$$

$$2) \quad \|x\| \rightarrow \infty \text{ ならば } V(x) \rightarrow +\infty,$$

$$3) \quad \dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot F(x) \leq -c(\|x\|), \quad c > 0 \text{ で } c(r) \text{ は正定値,}$$

をみたすことが充分な条件である。

さて、(12) で定められた V が (x, y) に関して定理 2 に依りる条件 (1'), (2') をみたしていることは明らかである。したがって (3') をみたすように出来れば定理 2 によ、て (10) したがって (26) の絶対安定性が示されることになる。すなわち、(3') が成り立つための条件を見出すことが問題となる。(10) によ、て V の微係数を求めると

$$\dot{V} = {}^T y ({}^T A B + B A) y + 2 {}^T f ({}^T b B + \frac{1}{2} {}^T C) y - {}^T f p f$$

$$= -y^T C y + 2f^T f^T dy - f^T f f^T,$$

$$d = Bb + \frac{1}{2}C.$$

これは (y, f) に関する二次型式とみることに出来るから、これが負定値であることを示せばよい。その条件は

$$(13) \quad P = \begin{pmatrix} C & -d \\ -d^T & \frac{1}{2}(f + f^T) \end{pmatrix} > 0$$

が成り立つことである。

さて、ここで不等式 (11) と (13) との関係について考えてみよう。

$$-C = {}^T A B + B A, \quad d = B b + \frac{1}{2}C$$

であるから、 P は

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} -{}^T A B - B A & -B b - \frac{1}{2}C \\ -{}^T b B - \frac{1}{2}{}^T C & \frac{1}{2}(f + f^T) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -{}^T A B & -\frac{1}{2}C \\ -{}^T b B & \frac{1}{2}f^T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -B A & -B b \\ -\frac{1}{2}{}^T C & \frac{1}{2}f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と書ける。すなわち、

$$P = {}^T Q + Q, \quad Q = \begin{pmatrix} -B A & -B b \\ -\frac{1}{2}{}^T C & \frac{1}{2}f \end{pmatrix}$$

$(n+m)$ ベクトル u に対して

$${}^T u P u = 2 {}^T u Q u$$

であるから、 $P > 0$ ならば Q は正則となる。一方、

$$Q = - \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & b \\ {}^T C & -f \end{pmatrix}$$

であるから (13) したがって $\det Q \neq 0$ より (11) が得られる。^(注2)

以上をまとめると、

定理3。 A が安定で、特性函数の族を $\mathcal{O}((0, R^*))$ としたとき、
(26) が絶対安定であるための充分条件は (13) が成り立つこと
である。

一般に、 L を正則な正方行列、 R を正方行列としたとき正
方行列 P が

$$P = \begin{pmatrix} L & M \\ N & R \end{pmatrix}$$

で与えられていれば、その行列式は

$$(14) \quad \det P = \det L \cdot \det (R - NL^{-1}M)$$

で与えられる。また、対称行列 P が正定値であるためにはそ
の主小行列式のすべてが正となることが必要かつ充分な条件
(Sylvester) である。(13) において最初の n 個の主小行列式は
 C に由来するもので仮定によつてこれは正となっている。し
たが、(13) は残りの m 個の主小行列式が正となる条件と同
値である。特に $m=1$ のときは (14) によつて

$$(13^*) \quad \beta - {}^T(Bb + \frac{1}{2}C)C^{-1}(Bb + \frac{1}{2}C) > 0$$

が (26) の絶対安定性のための充分条件となる。

更に、 E_n, E_m をそれぞれ、 n, m 次元の単位行列とすれば

$P > 0$ なることから

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & E_m \\ E_n & 0 \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_m & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(P+P^T) & -^T d \\ -d & C \end{pmatrix}$$

も又正定値でなくてはならない。したがって

$$R = \frac{1}{2}(P+P^T) > 0$$

でなくてはならない。特に、 R は正則である。さて、

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -^T y C y + 2^T f^T d y - ^T f R f \\ &= -^T y (C - d R^{-1} d^T) y - ^T (f + R^{-1} d y) R (f + R^{-1} d y). \end{aligned}$$

したがって

$$(15) \quad R > 0, \quad C - d R^{-1} d^T > 0$$

であれば $\dot{V}$ は負定値となる、これはいわゆる Yakubovitch の結果に対応するものである。同様に、

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -^T (y + C^{-1} d f) C (y + C^{-1} d f) + ^T f^T d C^{-1} d f - ^T f R f \\ &= -^T (y + C^{-1} d f) C (y + C^{-1} d f) - ^T f (R - ^T d C^{-1} d) f. \end{aligned}$$

したがって、 $\dot{V}$ が負定値となるための条件として

$$(16) \quad R - ^T d C^{-1} d > 0$$

が得られる。

$$Q = C - d R^{-1} d^T$$

と記せば(15)は $Q > 0$ であることを示している。 $R > 0$ より $R^{-1} > 0$ が得られるから、 $C = Q + d R^{-1} d^T$ によって、逆に $Q > 0$ より $C > 0$ が得られる。

上の条件はいずれも(13)(あるいは(15),(16))をみたす $C > 0$ が存在するかどうかということであるが、上に述べたことを用い

て、これを $Q > 0$ が存在するかどうかという問題に変換することが出来る。すなわち、 B, M, N を

$${}^TAB + BA = -C, \quad {}^TAM + MA = -Q, \quad {}^TAN + NA = -dR^{-1}d$$

をみたす対称行列とする。これらは定理1によつて存在し、 $B > 0, M > 0$ であることがわかる。 $C = Q + dR^{-1}d$ によつて直ちに $B = M + N$ となる。一方 $d = Bd + \frac{1}{2}C$ だから

$$d = Mb + Nb + \frac{1}{2}C.$$

したがつて、問題はこれをみたす d が存在するように、 $Q > 0$ をとらえるかどうかという問題になる。これはいわゆる *Lurie's resolving equation* と呼ばれているものゝ一般的な表現である。こゝで、もっと *Lurie's resolving equation* と呼ばれているものに形を合わせようとすれば次のようにすればよい。 $R > 0$ だから、ある正則な正方行列 U があつて $R = {}^TSS$ が成り立っている。 $d = US$ とおけば上式から

$$US = Mb + Nb + \frac{1}{2}C$$

が得られる。

条件 (12), (15), (16) はいずれも V が負定値となるための必要かつ充分な条件である。したがつて、これは同値でなくてはならない。

なお、 $m=1$ の場合には、特性函数の族に関する条件 (ii) の (c) はみたされなくてもよいことが *Laballe* によつて示されている。

このときは(12)で定められた V は定理2に於ける条件(2')を
満たしていない。しかしながら、この条件は条件(3')と共に
(10)の解が有界であることを証明するためにだけ必要とされ
ているので、何らかの方法によって解の有界性が証明されれ
ばなくともよい条件である。

さて、解が有界であることは次のようにして証明される。

まず、LaSalleによつて、条件(13)すなわち(13*)から

$$(17) \quad \rho + {}^T c A^{-1} b > 0$$

であることが示されている。^(注1)このことを認める。次に、

$$V(y, \sigma) \equiv {}^T y B y$$

かつ、 $\|y\| \rightarrow \infty$ ならば ${}^T y B y \rightarrow \infty$ であるから、条件(13*)の
もとで V が負定値であることとあわせて、(10)の解 $(y(t), \sigma(t))$
は $\sigma(t)$ が存在する限り、初期値のみに依存したある定数によ
つてその y 座標は押えられていることがわかる。もし解がす
べての t に対して存在するものとするれば、函数 $V(y(t), \sigma(t))$ は
単調減少だから

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(y(t), \sigma(t)) = l$$

が存在する。今、 $(y(t), \sigma(t))$ の極限集合を Ω とすれば明らか
に、 Ω 上で $V(y, \sigma) \equiv l$ でなくてはならない。また Ω は不変集
合だから、このこととあわせて、 Ω 上では $\dot{V} = 0$ である。一
方 V は負定値だから Ω が空集合でないとすれば $\Omega = \{0, 0\}$ で

なくてはならない。このことから $(y(t), \sigma(t)) \rightarrow (0, 0)$ であることがわかる。したがって、 Ω が空集合の場合を考えればよい。このときは、明らかに $\lim_{t \rightarrow \infty} |\sigma(t)| = \infty$ なくてはならない。また、ある $t < \infty$ を越えて解が延長出来ないとすれば、

$\lim_{t \rightarrow T-0} |\sigma(t)| = \infty$ なくてはならない。したがって、解が有界でない、あるいは、すべての t に対して存在しない場合にはいずれも、ある $T \leq \infty$ に対して $\lim_{t \rightarrow T} |\sigma(t)| = \infty$ となっている。ゆえに、これが成り立たないことを証明すれば充分である。今 $\lim_{t \rightarrow T} |\sigma(t)| = \infty$ であると仮定する。このときは、ある $T < T$ があって $T \leq t < T$ では $\sigma(t)$ は定符号をもっていると仮定してよい。(10)によって

$$\dot{\sigma} - {}^T c A^{-1} \dot{y} = -(\rho + {}^T c A^{-1} b) f(\sigma),$$

ゆえに、(17)および、 $\sigma f(\sigma) \geq 0$ であることにより

$$\text{sign } \sigma \cdot (\dot{\sigma} - {}^T c A^{-1} \dot{y}) \geq 0$$

すなわち、

$$\text{sign } \sigma \cdot \dot{\sigma} \leq \text{sign } \sigma \cdot {}^T c A^{-1} \dot{y}$$

なくてはならない。 $T \leq t < T$ において積分すれば、

$$|\sigma(t)| - |\sigma(T)| \leq \text{sign } \sigma \cdot {}^T c A^{-1} (y(t) - y(T))$$

であることがわかる。すでに述べたように、 $y(t)$ は一様に有界だからこれは矛盾である。すなわち、 $\sigma(t)$ は有界。

state matrix A を安定とし、特性多項式の根を $\Omega((0, \infty))$ とし

て直接制御系 (2a) を考える。この場合には間接制御系の場合に比して *Ljapunov* の直接法を用いる上で困難さがある。

(2a) は - 否

$$\dot{x} = Ax + bf(\sigma), \quad \dot{\sigma} = {}^TcAx + {}^Tcbf(\sigma)$$

と書ける。そこで (12) の形の *Ljapunov* 函数 $V(x, \sigma)$ を考えると

$$(18) \quad \dot{V} = {}^T(2Bx + cf(\sigma))(Ax + bf(\sigma))$$

となって、これは (x, f) に関して定値二次型式とはなり得ない。

(2a) は方程式

$$(19) \quad \dot{x} = Ax + bf({}^Tcx)$$

と同値である。したがって、(2a) が絶対安定であるためには任意な $f \in \mathcal{O}((0, \infty))$ に対して (19) の $x=0$ のみ を危点とすることが必要である。さて、すでに述べたように、 H を任意な正定値対称 (n, n) 行列とすると、 $f(\sigma) = H\sigma$ は $\mathcal{O}((0, \infty))$ に属しているから、このような $f(\sigma)$ に対しては $x=0$ が (19) の唯一つの危点でなくてはならない。すなわち、

$$(20) \quad \det(A + bH{}^Tc) \neq 0$$

がすべての $H > 0$ に対して成り立たねばならない。しかしながら、これは任意な $f \in \mathcal{O}((0, \infty))$ に対して (19) の唯一つの危点として $x=0$ を持つための充分条件でもある。それは次のようにして証明される。

今、ある $f \in C((0, \infty))$ とある $x \neq 0$ に対して

$$Ax + bf(Tx) = 0$$

となつたものと仮定する。 $\sigma = Tx$ において、もし $\sigma = 0$ ならば $f(\sigma) = 0$ だから $Ax = 0$ が成り立たねばならない。これは A が安定、したがって、正則であることに反する。ゆえに、 $\sigma \neq 0$ となる。このとき、適当な $H > 0$ をえらんで

$$f(\sigma) = H\sigma$$

となることを証明できれば

$$Ax + bf(Tx) = (A + bHT^c)x = 0$$

となる。 (20) から $x = 0$ でなくてはならないことがわかる。さて、

$$T\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m), \quad T^c f(\sigma) = (f_1, \dots, f_m), \quad T^c f(\sigma) = S$$

とぬくと仮定から、 $S > 0$ である。ここで、適当な対称なユニタリ変換をほどこしたと考へて、 $\sigma \neq 0$ から $\sigma_m \neq 0$ と仮定してよい。今、 δ をある正の数として、対称行列

$$H = \begin{pmatrix} \delta & & 0 & & r_1 \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & \delta & & r_{m-1} \\ r_1 & \dots & r_{m-1} & & r_m \end{pmatrix}$$

を考えると、これが正定値であるためには、 $\det H > 0$ であることが必要かつ充分な条件である。今、

$$f(\sigma) = H\sigma$$

を $r_1, \dots, r_m$ に関する連立一次方程式と考へる。

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & \cdots & \\ \sigma_1 & \cdots & \sigma_{m-1} & 0 \end{pmatrix}$$

とよければ、この連立方程式は

$$(\sigma_m E + Z) \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 - \sigma_1 \delta \\ \vdots \\ f_{m-1} - \sigma_{m-1} \delta \\ f_m \end{pmatrix}$$

で与えられる。

$$(\sigma_m E + Z)^{-1} = \frac{1}{\sigma_m^2} (\sigma_m E - Z)$$

だから、これを解いて、

$$k_i = \frac{1}{\sigma_m} (f_i - \delta \sigma_i) \quad (i=1, \dots, m-1)$$

$$k_m = \frac{1}{\sigma_m^2} (2\sigma_m f_m - S + \delta \sum_{i=1}^{m-1} \sigma_i^2)$$

が得られる。一方、

$$\det H = \delta^{m-2} (\delta k_m - \sum_{i=1}^{m-1} k_i^2)$$

だから、これに代入して、

$$\det H = \frac{\delta^{m-2}}{\sigma_m^2} (\delta S - \sum_{i=1}^{m-1} f_i^2).$$

したがって、 $S > 0$ に注意して、 δ は

$$\delta > \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{m-1} f_i^2$$

とみたようにえらべば $H > 0$ であることがわかる。

特に、 $m=1$ の場合には条件(20)は条件

$$(20^*) \quad {}^T c A^{-1} b \geq 0$$

と同値になる。なぜならば、 A は正則だから、

$$A + b H {}^T c = (E + b H {}^T c A^{-1}) A.$$

さらに、 H はスカラーだから、このとき $E + Hb^T c A^{-1}$ がすべて $H > 0$ に対して正則であることを示せばよい。さて、

$$\det(\lambda E + Hb^T c A^{-1})$$

を考えるとこれは行列 $Hb^T c A^{-1}$ の特性多項式となっている。

一般に、ベクトル p_i に対して行列 $P = p_i p_i^T$ を考えるとこれは

$$P = (p_i p_i^T)$$

であるから、この行列の階数は高々1である。したがって、

$$\det(\lambda E - P) = 0$$

の根は高々一つをのぞいて零となる。一方、この根の和は

$\text{trace } P = p_i^T p_i$ で与えられるから、残った根は $p_i^T p_i$ に等しい。

したがって、

$$\det(\lambda E - P) = \lambda^{n-1}(\lambda - p_i^T p_i).$$

したがって、

$$\det(\lambda E + Hb^T c A^{-1}) = \lambda^{n-1}(\lambda + H^T c A^{-1} b).$$

これは恒等式だから、 $\lambda = 1$ とおいて

$$\det(E + Hb^T c A^{-1}) = 1 + H^T c A^{-1} b$$

が得られる。仮定から、これは任意の $H > 0$ に対して零ではないから、(20*)が成り立たなくてはならない。

そこで、(18)にもとづいて考える。これは、すでに述べたように、 (x, f) したがって、 $(x, 0)$ に関して負定値ではない。

しかし、考えている方程式は(19)であって、(19)が絶対安定

であることを示せばよいのであるから、 $\sigma = {}^T C x$ において (18) が x に関して負定値となればよい。そのための条件を見出す方法を考える。

(I) まず、間接制御の場合と同様に考えて、 $\dot{V}$ に対して平方を完成する。すなわち、

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -{}^T x C x + 2 {}^T f ({}^T B B + \frac{1}{2} {}^T C A) x + {}^T f {}^T C b f \\ &= -{}^T (x + C^{-1} d f) C (x + C^{-1} d f) - {}^T f R f, \\ d &= B b + \frac{1}{2} {}^T A C, \quad R = -\frac{1}{2} ({}^T C b + {}^T B c) - {}^T d C^{-1} d.\end{aligned}$$

ここで、もし $R > 0$ ならば、 $\dot{V}$ は (x, f) に関して負定値となるから、これは有り得ない。したがって、可能な条件は $R \geq 0$ である。すなわち、 R が負の特征根をもたないことである。この条件のもとでは、 $\dot{V} = 0$ となり得るのは、

$$(21) \quad x + C^{-1} d f = 0, \quad {}^T f R f = 0$$

とき、かつ、このときに限る。一方、(18) から、任意な f に対して、

$$x = -A^{-1} b f$$

とすれば、この (x, f) に対して $\dot{V} = 0$ となる。したがって、このとき (21) が成り立たなくてはならない。 f は任意だから、 $R = 0$ でなくてはならない。したがって、可能な条件は

$$(22) \quad R = 0, \quad \text{すなわち} \quad {}^T C b + {}^T B c + {}^T A C^{-1} A b = 0$$

である。同時に、任意な f に対して、(21) から、 $-x = A^{-1} b f$ は

$$x + C^{-1}df = 0$$

をみたさなくてはならない。すなわち、

$$C^{-1}d - A^{-1}b = 0$$

が得られて、条件(21)は

$$Ax + bf = 0$$

と同値になる。すでに述べたように、条件(20)のもとで

$Ax + bf(Tx) = 0$ をみたすものは $x=0$ に限るから、 V は x に関して負定値となる、したがって、

定理4. (2a) において、 A を安定、特性函数の族 $\omega((0, \infty))$ としたとき、これが絶対安定であるための充分条件は、任意の $H > 0$ に対して条件(20)が成り立ち、かつ、条件(22)をみたす $C > 0$ が存在することである。

なお、明らかに

$$2Bx + Cf = 0$$

をみたす (x, f) に対しても $\dot{V} = 0$ となるが、上と同様に

$$C^{-1}d = A^{-1}b = \frac{1}{2}B^{-1}c$$

が得られる。すなわち、 (x, σ) の張る $(n+m)$ 次元空間において、

$$x + C^{-1}df(\sigma) = 0, Ax + bf(\sigma) = 0, 2Bx + Cf(\sigma) = 0$$

をみたす (x, σ) の張る部分空間は条件(20)および(22)のもとで任意の函数 f に対して一致している。これを M で表わす:

とにすぎない。

Liapunov によって次の定理が知られている。

定理5。定理2における条件(3')は次の条件で置きかえることが出来る。すなわち、

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot F(x) \leq 0$$

かつ、領域 $V=0$ にとどまる解は $x \equiv 0$ しかない。

なお、明らかのように、ある解の族を考えて、この族の中で上の領域にとどまるものは高々 $x \equiv 0$ のみであるとするれば、この解の族に関して $x=0$ は大域的漸近安定である。

さて、方程式として、

$$\dot{x} = Ax + bf(\sigma), \quad \dot{\sigma} = cAx + cbf(\sigma)$$

を考へ、解の族として初期時間において $\sigma = cAx$ となるものに限るものとする。このとき、(12) の形で与えられた Liapunov

函数 $V(x, \sigma)$ を考へると、条件(122)のもとで $\dot{V} \leq 0$ となり、

かつ、 $\dot{V}=0$ なる領域は上に述べた M であることがわかる。極

性函数の族を $\alpha((0, \infty))$ としているから、 V の定理2の条件(1)

(2') をみたしている。さて、解を上に戻した族に限って考へ

れば、条件(120)のもとで、 M にとどまる解は $x=0, \sigma=0$ のみ

である。したがって、定理5によって定理4の結論が得られる。

(II) 次に、いわゆる S -Method と呼ばれているものに触れる。

い。Liapunov 函数としては、前と同様に、(12) で与えられた $V(x, f)$ を考える。すでに述べたように、 $\dot{V}$ は (x, f) の二次型式としては負定値ではない。そこで、特値函数の族に対する制限から、 $T_\alpha f(\alpha) \geq 0$ すなわち、 $\alpha = T_c x$ とすれば、 $T(T_c x) f(\alpha) \geq 0$ であることを注目して、

$$(23) \quad \dot{V} + \alpha^T X c f, \quad (\alpha > 0: \text{スカラー})$$

が (x, f) の二次型式として負定値となるための条件を見出そうという方法である。このときは、上述のように、

$$T_c x c f(T_c x) \geq 0$$

であるから、 x の函数として、 $\dot{V}$ が負定値となっている。

(23) が負定値二次型式となるための条件は間接制御の場合の条件 (13) 等に対応して見出すことが出来る。

特値函数の族を $\mathcal{O}((0, k])$ ($0 < k < \infty$) に制限した場合について考える。今、その特値根が $(0, k]$ に属する対称 (m, m) 行列 H を簡単に $H \in (0, k]$ で表わすことにすれば、明らかに、

$f(\alpha) = H\alpha$ で定められた特値函数は $H \in (0, k]$ ならば $\mathcal{O}((0, k])$ に属している。したがって、このような特値函数のみ考えれば、この場合、条件 (20) は $H \in (0, k]$ に対してのみ成り立ちは充分である。更に、このときはあるユニタリ行列 P によって

$$H^* = T P H P = \text{diag}(k_1, \dots, k_m), \quad 0 < k_i \leq k$$

であるから

$$\begin{aligned} & \tau(\alpha - \frac{1}{k} f(\alpha)) f(\alpha) = \tau \alpha (E - \frac{1}{k} H) H \alpha \\ & = \tau \alpha P (E - \frac{1}{k} H^*) H^* \tau \alpha \geq 0 \end{aligned}$$

であることか、

$$(E - \frac{1}{k} H^*) H^* = \text{diag} \left((1 - \frac{k_1}{k}) h_1, \dots, (1 - \frac{k_m}{k}) h_m \right) \geq 0$$

によってわかる。したがって、S-Method において (23) のかわりに

$$(24) \quad \dot{V} + \lambda \tau (\tau \alpha - \frac{1}{k} f(\alpha)) f(\alpha), \quad \lambda > 0$$

が (x, f) に関して負定値となる条件を求めることにより、

(2a) の絶対安定性のための条件をゆるめることが出来る。す

で述べたように (p2a) 任意な $f \in \mathcal{O}((0, \infty))$ に対して、ある

固定した α に対してある $H > 0$ が存在して $f(\alpha) = H\alpha$ が成り立

ている。この H が $(0, k)$ に属することばわかれば、条件 (20)

および (24) を負定値にするための条件は旧々の (x, α) において

成り立てばよいのであるから、条件 (20) が $H \in (0, k)$ に対して

成り立つことが充分であることがわかる。しかしながら、

$f \in \mathcal{O}((0, k))$ ならば、任意な α において、 $f(\alpha) = H\alpha$ をみたす

$H \in (0, k)$ が存在するかどうかは一般には不明である。 $m=1, 2$ の

場合にはこのことは証明できて、特に $m=1$ のときは、条件

(20*) は条件

$$\tau c A^{-1} b \geq -\frac{1}{k}$$

にゆるめることが出来る。

なお、特性函数の族を $\mathcal{C}((r_1, r_2))$ ($0 < r_1 < r_2 < \infty$) とすれば、
 $r > r_2^2/r_1$ に對して

$$(25) \quad \tau\left(\left(1 - \frac{1}{r} f(x)\right) f(x)\right) \geq r_2 \|x\|^2, \quad r_2 = \frac{r_1 r - r_2^2}{r},$$

が成り立つことは容易に証明される。

さて、(19) に対して、全安定に因する一般的不 Liapunov の
 直接法を用いて考えてみる。^(注1) このとき、(19) における f を擾
 動項と考へて条件

$$\|f\| \leq R \|x\|$$

を仮定して Liapunov 函数として

$$V = {}^T x B x$$

を考へる。ここで、 B はある $C > 0$ に対して定理 1 で定めら
 れた行列である (A は安定とする)。このとき、

$$\dot{V} = -{}^T x C x + 2 {}^T x B b f({}^T C x)$$

を得る。したがって、一般的に求め得る条件は、 C の最小の
 特性根を α としたとき

$$\alpha > 2R \|Bb\| \|C\|$$

である。例えば、 $m=n=1$ のときは $B = -\frac{\omega}{2A}$ であるから、

$$\alpha > 2R \left| \frac{\omega}{2A} b \right| \cdot |c|$$

すなわち、

$$|A| > R |bc|$$

であるから、 $R \rightarrow \infty$ の場合には $bc = 0$ でなくてはならない。

一方、条件 (22) は

$$bc + (-\frac{\lambda}{2A}b + \frac{1}{2}Ac)^2 \frac{1}{\lambda} = 0.$$

すなわち、 $(\lambda + \frac{A^2}{b}c)^2 = 0$ となる、と、求める条件は $bc \leq 0$ となる。

しかしながら、state system が一般的な非線型性をもち場合には、特性函数の族の性質によって与えられた条件を効果的に利用できません。この一般的な方法が用いられている。

§4. Popov の方法。state system が線型函数微分方程式で与えられている場合には、常微分方程式の場合の二次型式に対応するような explicit な形で与えられた Liapunov 函数の存在が知られていない。したがって、この場合には Liapunov の方法はかなり制約されたものになる。しかしながら、次に述べる Popov の方法はそのより線型函数微分方程式の場合に拡張すること出来る。ここでは、Popov の方法を函数微分方程式に対して説明しよう。

まず、 $r > 0$ を定数として、区間 $[-r, 0]$ から Euclid 空間 R^n への連続函数全体を $\mathcal{C}$ で表わし、そこにおけるノルムを $\varphi \in \mathcal{C}$ に対して

$$\|\varphi\|_r = \{\|\varphi(\theta)\| : \theta \in [-r, 0]\}$$

で与える。 R^n を値域とする任意な連続函数 $x(u)$ に対して x_0 に

よって、 $x_t(\vartheta) = x(t+\vartheta)$ となるものを表わすことにする。

$F(\varphi)$ を $\mathcal{C}$ から R^p への連続な線型函数とすれば、Stieltjes 積分

$$F(\varphi) = \int_{-r}^0 [dv_F(\vartheta)] \varphi(\vartheta)$$

を与える $[-r, 0]$ 上の (p, n) 行列函数 $v_F(\vartheta)$ で各要素が有界変動であるものが存在する。(Riesz-Nagy)

$x, \sigma \in n, m$ ベクトル, b を (n, m) 行列として、さらに、

$F(\varphi), G(\varphi)$ を $\mathcal{C}$ から R^n, R^m への連続な線型作用素として、

直接制御系

$$(26) \quad \dot{x}(t) = F(x_t) + b f(\sigma(t)), \quad \sigma(t) = G(x_t)$$

(注4)
を考へる。ここで、 $\dot{x}(t)$ は $x(t)$ の右側微係数を表わし、特性函数族の族としては $OL((r_1, r_2))$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$ を考へる。

今、 $\varphi \in \mathcal{C}$ に対して、 $x(t; \varphi)$ で $t=0$ のとき φ を通る (26) の解を表わし、 $y(t; \varphi)$ で同じ初期値をもつ

$$(27) \quad \dot{y}(t) = F(y_t)$$

の解を表わせば、

$$(28) \quad x(t; \varphi) = y(t; \varphi) + \int_0^t X(t-\tau) b f(\sigma(\tau)) d\tau$$

が成り立つことが知られている (Hale)。ここで、 $X(t)$ は

(n, n) 行列函数で

$$X(0) = E, \quad X(\vartheta) = 0 \quad (\vartheta \in [-r, 0))$$

及び、(27) すなわち

$$\dot{X}(t) = \int_{-r}^0 [dv_F(\vartheta)] X(t+\vartheta)$$

をみたしている。したがって

$$\sigma(t) = G(y_0(\varphi)) + \int_0^t G(X_{t-\tau}b) f(\sigma(\tau)) d\tau$$

が得られる。

また、仮定

(c.) $F(\varphi)$ の特性根、すなわち、

$$\det \left[\int_0^t (dV_F(\varphi)) e^{\lambda \tau} - \lambda E \right] = 0$$

の根がすべて負の実数をもつ

のもとで、(27) の解 $y(t; \varphi)$, $X(t)$ はある定数 $M > 0$,

$\alpha > 0$ に対して、条件

$$(29) \quad \|y(t; \varphi)\| \leq M e^{-\alpha t} \|\varphi\|_r, \quad \|X(t)\| \leq M e^{-\alpha t}$$

が成り立つことが知られている。したがって、条件 (c.) のも

とで、 $\sigma(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ であることがわかる。また、(28) によ

りて、 $X(t; \varphi) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ であることがわかる。また、定数 K_1 ,

K_2 が存在して、 $\|\sigma(t)\| \leq \sigma_0$ ならば、 $\|X(t; \varphi)\| \leq K_1 \|\varphi\|_r + K_2 \sigma_0$

であることもわかる。ゆえに、(26) の絶対安定性を証明するた

めには、 $\sigma(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ のかつ、 $\|\sigma(t)\|$ は有界でその上界とし

て $\|\varphi\|_r$ と共に零になるものかえらべることが示せば充分であ

る。したがって、このことが成り立つための条件を見出そう。

そのために、いくつかの注意をする。

まず、 $F(\varphi)$ と $G(\varphi)$ の線型性と特性函数の族が $\mathcal{O}((h_1, h_2))$ であるということに注意。

$$\|F(\varphi) + b f(G(\varphi))\| \leq L \|\varphi\|_r$$

がある定数 L に対して成り立っている。したがって、

$(0, \varphi)$ を通る $(\varphi \in E)$ (26) の解 $x(t; \varphi)$ は $(0, \infty)$ において存在して

$$\|x(t; \varphi)\| \leq e^{Lt} \|\varphi\|_r$$

をみたし、かつ、そこで連続的微分可能である。今、

$$E^* = \{x_r(\varphi); \varphi \in E\}$$

を考えると、 E^* の元は $(-r, 0)$ において連続的微分可能である。明らかに、 $t = -r$ のとき、 E^* の元を通る解の族に関して、解 $x = 0$ の安定性がわかれば、 $t = 0$ のとき E の元を通る解全体に関する $x = 0$ の安定性が示される。(26) が自励系であることに注意して、 φ は $(-r, 0)$ において連続的微分可能であると仮定してもよい。あるいはもっと一般に

(C₂) φ は $(-r, 0)$ において Lipschitz の条件をみたしている
と仮定してよいともかまわない。したがって $x(t; \varphi)$ および
 $y(t; \varphi)$ は $(-r, \infty)$ で定義された函数として $(-r, \infty)$ の任意
な有界閉区間において Lipschitz の条件をみたしている。したが
って $\sigma(t) = G(x_t(\varphi))$ および $G(y_t(\varphi))$ は $[0, \infty)$ において、
同様に Lipschitz の条件をみたしている。特に $x(t; \varphi), y(t; \varphi)$
は $(0, \infty)$ において連続的微分可能であるから $\sigma(t), G(y_t(\varphi))$
も (r, ∞) において連続的微分可能であることがわかる。

一方 $X(t)$ は $(-r, \infty)$ における函数として $(0, \infty)$ では任意の有界閉区間において *Lipschitz* の条件をみたしており、したがって $G(X_t b)$ は (r, ∞) においては同様に *Lipschitz* の条件をみたしている。さらに $X(t)$ は (r, ∞) では連続的微分可能であるから $G(X_t b)$ は $(2r, \infty)$ で連続的微分可能となっている。しかしながら、区間 $(-r, 0)$ においては $X(t)$ は恒等的に零となっているが $t=0$ においては不連続となっていて $(0, r)$ においては連続性すら疑わしい。

$t \in (0, r)$ に対して

$$G(X_t b) = \int_{-t}^0 (dv_G(s)) X(t+s) b$$

であるから、 $G(X_t b)$ は有界変動で $V_G(-t)$ が連続、不連続となる点では同様に連続あるいは不連続となっている。

また

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta} \{G(X_{t+\delta} b) - G(X_t b)\} \\ &= \frac{1}{\delta} \int_{-t-\delta}^{-t} (dv_G(s)) X(t+\delta+s) b \\ &+ \int_{-t}^0 (dv_G(s)) \frac{1}{\delta} \{X(t+\delta+s) - X(t+s)\} b \end{aligned}$$

が成り立っているから、

$$(30) \quad \overline{\lim}_{\delta \rightarrow +0} \left\| \frac{1}{\delta} \{V_G(\theta + \delta) - V_G(\theta - 0)\} \right\|$$

が有界な各点 $\theta \in \mathcal{A}$ においては、

$$\overline{\lim}_{\delta \rightarrow +0} \left\| \frac{1}{\delta} \{G(X_{t+\delta}b) - G(X_{t+0}b)\} \right\|$$

もまた有界であることがわかる。そこで、仮定

(C₃) $[-r, 0]$ における $V_G(\theta)$ の不連続点は高々有限で、すべての $\theta \in [-r, 0]$ に対して (30) で与えられた極限值は一樣に有界である (注5)

のもとで、任意の区間連続な函数 $\sigma(t)$ に対して

$$\int_0^t G(X_{t-\sigma(b)}) f(\sigma(t)) dt$$

は絶対連続であることがわかる。もしも、 $\sigma(t)$ が区分的に絶対連続ならば、条件 (C₃) は条件

(C₄) 特性函数の族を Lipschitz 条件を満たすものに制限する
によって置きかえてもよいことは明らかである。

仮定 (C₁) のもとで、(29) が成り立っているから、 G の線型性によって、ある定数 M^* に対し、すべての $t \geq 0$ で

$$\|G(\gamma_t(\varphi))\| \leq M^* e^{-\lambda t} \|\varphi\|_r, \quad \|G(X_t b)\| \leq M^* e^{-\lambda t}.$$

また、ほとんどすべての $t \geq 0$ で

$$\|\dot{G}(y_t(\varphi))\| \leq M^* e^{-\alpha t} \|\varphi\|_r, \quad \|\dot{G}(x_t b)\| \leq M^* e^{-\alpha t}$$

($\dot{G}$ は t の函数と考へての右側微係数) が成り立っている。

そこで、 φ を固定して

$$Z(t) = G(y_t(\varphi)), \quad k(t) = G(x_t b)$$

とすれば、(3) に得られた如く、

$$(31) \quad \sigma(t) = Z(t) + \int_0^t k(t-\tau) f(\sigma(\tau)) d\tau$$

が得られる。そして、条件 (C₁), (f) によつて $w_s(c_0)$ あるいは (c_0)

のもとで $[0, \infty)$ において (31) をみたす $\sigma(t)$ が $\sigma(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$

および $\|\varphi\|_r$ と共に零となる bound をもつて有界となるための

条件を求めよう。

まず、 $\sigma(t)$ は絶対連続だから、 $\sigma(t)$ は殆んどいたるところで存在して

$$\int_0^T f(\sigma(\tau)) \sigma(\tau) d\tau = J(\sigma(t))$$

が成り立っている。任意に与へられた $s > 0$ に対して

$$f_s(t) = \begin{cases} f(\sigma(t)) & 0 \leq t \leq s \\ 0 & t > s, t < 0, \end{cases}$$

$$w_s(t) = \begin{cases} t \int_0^t k(t-\tau) f_s(\tau) d\tau & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

とよくと明らかに、 $w_s(t)$ は絶対連続かつ $f_s, w_s \in L^1 \cap L^2$

である。また、 $t \geq s$ に対しては

$$w_s(t) = t \int_0^s k(t-\tau) f_s(\tau) d\tau,$$

かつ、 (r, ∞) では $k(t)$ は連続的微分可能であるから、

$$\dot{w}_s(t) = r \int_0^s k(t-\tau) f_s(\tau) d\tau$$

が $t \geq s+r$ に於いて成り立っている。したがって w_s もまた $L^1 \cap L^2$ に属している。

こゝで、 $k > k_2/k$, $I_0 \neq 0$, q を定数として、

$$P(s) = \int_0^{s+r} \{v(t) - z(t) - \frac{1}{k} f(v(t)) + q(\dot{v}(t) - \dot{z}(t))\} f(v(t)) dt$$

を考えると、 $t \in (0, s)$ では $w_s(t) = v(t) - z(t)$ だから、

$$\begin{aligned} P(s) &= \int_{-\infty}^{s+r} \left\{ w_s(t) - \frac{1}{k} f_s(t) + q \dot{w}_s(t) \right\} f_s(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \tilde{w}_s(i\omega) - \frac{1}{k} \tilde{f}_s(i\omega) + q \tilde{w}_s(i\omega) \right\} \bar{\tilde{f}}_s(i\omega) d\omega \end{aligned}$$

を得る。こゝで、 $\tilde{w}_s, \dots$ は $w_s, \dots$ の Fourier 変換

$$\tilde{w}_s(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} w_s(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} w_s(t) dt$$

を表わしている、 $\bar{\tilde{f}}_s$ は $\tilde{f}_s$ の複素共役である。 $w_s(t)$ は絶対連続かつ $w_s(0) = 0$ だから

$$\tilde{w}_s(i\omega) = i\omega \tilde{w}_s(i\omega)$$

が成り立ち、したがって、 $k \in L^1 \cap L^2$ だから、

$$\tilde{w}_s(i\omega) = \tilde{k}(i\omega) \tilde{f}_s(i\omega)$$

が成り立つ (こゝで、 $t < 0$ のとき $k=0$ とする) こゝを用いて、

$$P(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \tilde{f}_s \left\{ (1+i\omega q) \tilde{k}(i\omega) - \frac{1}{k} E \right\} \bar{\tilde{f}}_s(i\omega) \right\} d\omega$$

を得る。したがって、こゝで、

(cs) ある定数 $q > 0$ に対して

$$\operatorname{Re} \left\{ \tilde{f}_s \left\{ (1+i\omega q) \tilde{k}(i\omega) - \frac{1}{k} E \right\} \bar{\tilde{f}}_s \right\} \leq 0$$

がすべての m ベクトル $\mathbf{r}$ とすべての実数 ω に対して成立している

と仮定すれば、 $P(s) \leq 0$ が得られる。 (m, m) 行列

$$(1 + i\omega g) \tilde{h}(i\omega) - \frac{1}{k} E$$

の実数部分、虚数部分をそれぞれ P , Q とすれば、条件 (C_s) は条件

$$-\begin{pmatrix} {}^T P + P & {}^T Q - Q \\ Q - {}^T Q & {}^T P + P \end{pmatrix} \geq 0$$

と同値である。さて、条件 (C_s) のもとで、 $P(s) \leq 0$ 、すなわち

$$(32) \quad \int_0^s \left\{ \sigma(t) - \frac{1}{k} f(\sigma(t)) + g \dot{\sigma}(t) \right\} f(\sigma(t)) dt \\ \leq \int_0^s \left\{ z(t) + g \dot{z}(t) \right\} f(\sigma(t)) dt.$$

すでに述べた様に、

$$h_1 \|\sigma\|^2 \leq U(\sigma) \leq h_2 \|\sigma\|^2$$

かつ、(25) が成り立っているから、(32) によって、

$$h_2 \int_0^s \|\sigma(t)\|^2 dt + \frac{g h_1}{2} \|\sigma(s)\|^2 \leq \frac{g h_2}{2} \|\sigma(0)\|^2 + \int_0^s \left\{ z(t) + g \dot{z}(t) \right\} f(\sigma(t)) dt.$$

したがって、

$$\left| \int_0^s \left\{ z(t) + g \dot{z}(t) \right\} f(\sigma(t)) dt \right| \leq \frac{M^* h_2 (1+g)}{2} \|\varphi\|_r \sup_{0 \leq t \leq s} \|\sigma(t)\|$$

であるから、

$$\frac{g h_1}{2} \|\sigma(s)\|^2 \leq \frac{g h_2}{2} \|\sigma(0)\|^2 + \frac{M^* h_2 (1+g)}{2} \|\varphi\|_r \sup_{0 \leq t \leq s} \|\sigma(t)\|$$

がすべての $s \geq 0$ に対して成り立つことがわかる。 $\sigma(0) = z(0)$

かつ、 $\|z(0)\| \leq M^* \|\varphi\|_r$ に注意すれば、このことから、

$$\|\sigma(t)\| \leq \frac{h_2}{g h_1} \left\{ \frac{2(1+g)}{2} + g \right\} M^* \|\varphi\|_r = S(\|\varphi\|_r), \quad t \geq 0$$

を得る。したがって、 $\|o(t)\|$ は有界で、その bound は $\|y\|_r$ と共に零となることがわかった。一方、

$$k_1 \int_0^s \|o(t)\|^2 dt \leq \frac{g k_2}{2} \|o(s)\|^2 + \frac{M^2 k_2 (1+g)}{2} \|y\|_r S(\|y\|_r)$$

だから、 $\int_0^\infty \|o(t)\|^2 dt < \infty$ 、したがって、

$$\int_0^\infty \|f(o(t))\|^2 dt \leq k_2 \int_0^\infty \|o(t)\|^2 dt < \infty$$

が残り立つ。そして、このことから、

$$\left\| \int_0^t k(t-\tau) f(o(\tau)) d\tau \right\| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

が導かれて、これと、 $z(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$ をあわせて、

$$o(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty)$$

が得られる。すなわち、仮定 (C_1) , (C_2) , (C_3) (あるいは、 (C_4)) のもとで、条件 (C_5) が (26) の絶対安定性のための充分条件となる。

Fourier 変換の知識を用いて、(31) をみたす $o(t)$ の行動を調べて、(26) の絶対安定性のための条件を見出すこの方法が Popov の方法と呼ばれているもので、 $\tilde{K}(i\omega)$ が (26) に対する transfer function と呼ばれているものである。^(註6) ここで、 $\tilde{K}(i\omega)$ の explicit な表現を求めてみる。

$$\begin{aligned} \tilde{K}(i\omega) &= \int_{-\tau}^{\infty} e^{-i\omega t} \left\{ \int_{-\tau}^0 (dv_q(\theta)) X(t+\theta) b \right\} dt \\ &= \int_{-\tau}^0 (dv_q(\theta)) \left\{ \int_{\theta}^{\infty} e^{-i\omega t + i\omega \theta} X(t) b dt \right\} \\ &= \int_{-\tau}^0 e^{i\omega \theta} (dv_q(\theta)) \cdot \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} X(t) b dt. \end{aligned}$$

したがって、

$$C(i\omega) = \int_{-\tau}^0 e^{i\omega\theta} (d^T v_F(\theta))$$

と表わせば、

$$\tilde{k}(i\omega) = {}^T C(i\omega) \tilde{X}(i\omega) b$$

が得られる。一方

$$\int_0^\infty e^{-i\omega t} \dot{X}(t) dt = \int_0^\infty e^{-i\omega t} \left\{ \int_{-\tau}^0 (dv_F(\theta)) X(t+\theta) \right\} dt,$$

かつ、 $X(0) = E$ だから、

$$-E + i\omega \tilde{X}(i\omega) = \int_{-\tau}^0 e^{i\omega\theta} (dv_F(\theta)) \cdot \tilde{X}(i\omega).$$

よって、

$$A(i\omega) = \int_{-\tau}^0 e^{\lambda\theta} (dv_F(\theta)) - \lambda E$$

と表わせば、

$$\tilde{X}(i\omega) = -A(i\omega)^{-1}$$

が得られる。よって、仮定(C₁)によって $A(i\omega)$ はすべての実数 ω に対して正則であることに注意する。したがって、

$$\hat{k}(i\omega) = -{}^T C(i\omega) A(i\omega)^{-1} b$$

が得られて、条件(C₆)は常微分方程式の場合における Popov の条件の一般化となっている（ただし、 $m=1$ の場合には、 k は $k > k_1/k_2$ ではなく、 $k > k_2$ をみたせばよい）。

間接制御系

$$(32) \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(x_t) + b \xi(t) & \dot{\xi}(t) &= f(\sigma(t)) \\ \sigma(t) &= g(x_t) - f \xi(t) \end{aligned}$$

の場合には、同様に

$$(34) \quad \sigma(t) = Z(t) + \int_0^t k(t-\tau) \xi(\tau) d\tau - P \xi(t)$$

が得られる。ここで、すべての文字は、系(26)に対する場合と同一で、 P は (m, m) 行列である。今度も、特性函数の族を $\mathcal{A}([k_1, k_2])$ ($0 < k_1 < k_2 < \infty$) として、条件 $(C_1), (C_2)$ のもとで考えるところにする。このとき、

$$k_1(t) = -\int_t^\infty k(\tau) d\tau, \quad Z_1(t) = Z(t) + k_1(t) \xi(0), \quad P_1 = P + k_1(0)$$

と記す。 (34) より部分積分を行なうと

$$(35) \quad \begin{aligned} \sigma(t) &= Z_1(t) + \int_0^t k_1(t-\tau) f(\sigma(\tau)) d\tau - P_1 \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) &= f(\sigma(t)) \end{aligned}$$

が得られる。そして、問題は、 $(0, \infty)$ において (35) をみたす $(\sigma(t), \xi(t))$ が有界で、その bound は $(\|\varphi\|_r, \|\xi(0)\|)$ と共に零となり、 $t \rightarrow \infty$ のとき、 $(\sigma(t), \xi(t)) \rightarrow 0$ となることを示すところにある。 $(x(t), \xi(t))$ は (33) の解として、 $(0, \infty)$ において存在して連続的微分可能であることが容易に示される。明らかに、 $\sigma(t), Z_1(t), k_1(t)$ は $(0, \infty)$ において、絶対連続かつ、 $k_1(t)$ は常に有界な微係数をもっている。しかも、すべての $t \geq 0$ とある定数 $M_1 > 0$ に対して、

$$\|Z_1(t)\| \leq M_1 e^{-\lambda_0 t} \{\|\varphi\|_r + \|\xi(0)\|\}, \quad \|k_1(t)\| \leq M_1 e^{-\lambda_0 t},$$

かつ、ほとんどいふところでは、

$$\|\dot{Z}_1(t)\| \leq M_1 e^{-\lambda_0 t} \{\|\varphi\|_r + \|\xi(0)\|\}, \quad \|\dot{k}_1(t)\| \leq M_1 e^{-\lambda_0 t}$$

が成り立っている。

前と同様に、 $s \geq 0$ に対して、

$$f_s(t) = \begin{cases} f_0(t) & 0 \leq t \leq s \\ 0 & t > s, t < 0 \end{cases}$$

$$w_s(t) = \begin{cases} \int_0^t k_1(t-\tau) f_s(\tau) d\tau & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

とすれば、明らかに、 $f_s, w_s, \dot{w}_s \in L' \cap L^2$ である。更に、

$w_s(t)$ は絶対連続かつ、 $w_s(0) = 0$ であるから、

$$\tilde{w}_s(i\omega) = i\omega \tilde{w}_s(i\omega), \quad \tilde{w}_s(i\omega) = \tilde{k}_1(i\omega) \tilde{f}_s(i\omega)$$

を得る。そこで、 $k > k_2^2/k_1$ とし

$$p(s) = \int_0^s \left\{ w_s - \frac{1}{k} f_s, \tau \left(\dot{w}_s - p_1 f_s \right) \right\} f_s d\tau,$$

とすれば、

$$p(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \tilde{f}_s \left[(1+i\omega g) \tilde{k}_1(i\omega) - \frac{1}{k} E - g p_1 \right] \tilde{f}_s(i\omega) d\omega \right\}$$

を得る。そこで、条件 (C5) に対応して、条件

(C6) ある $g > 0$ と任意の m へクトル η 、及び、任意の実数 ω に対して

$$\operatorname{Re} \left\{ \eta \left[(1+i\omega g) \tilde{k}_1(i\omega) - \frac{1}{k} E - g p_1 \right] \bar{\eta} \right\} \leq 0$$

が成り立つ

と仮定してよくと、 $p(s) \leq 0$ がわかる。

$$\begin{aligned} \int_0^s \tau f(\tau) \left| \dot{w} - \frac{1}{k} f(\tau) \right| d\tau + \int_0^s \tau f(\tau) p_1 \xi d\tau + g \int_0^s \tau f(\tau) \dot{\eta} d\tau \\ \leq \int_0^s \tau f(\tau) (z_1 + g \dot{z}_1) d\tau \end{aligned}$$

が成り立っている。ここで、 $0 \leq t \leq S$ においては、

$$w_s(t) = \alpha(t) + p_1 \xi(t) - Z_1(t)$$

であることを用いている。さて、 p_1 が対称ならば

$$\int_0^S f_1(0) p_1 \xi dt = \int_0^S \xi p_1 \xi dt = \frac{1}{2} \xi(S) p_1 \xi(S) - \frac{1}{2} \xi(0) p_1 \xi(0)$$

が成り立っている。そこで、仮定

(C7) p_1 は正定値対称行列

を付けば、ある正数 μ があって

$$\xi^T p_1 \xi \geq 2\mu \|\xi\|^2$$

が成り立ち、かつ、前と同様に (25) 及び

$$\int_0^S f_1(0) \alpha dt = U(\alpha(S)) - U(\alpha(0)) \geq \frac{K_2}{2} \|\alpha(S)\|^2 - \frac{K_2}{2} \|\alpha(0)\|^2$$

$$\left| \int_0^S f_1(0) (Z_1 + gZ_2) dt \right| \leq \frac{K_2 M_1 (1+g)}{\alpha} (\|\varphi\|_r + \|\xi(0)\|) \sup_{0 \leq t \leq S} \|\alpha(t)\|$$

であることを用いると、

$$\begin{aligned} (36) \quad & K_2 \int_0^S \|\alpha(t)\|^2 dt + \mu \|\xi(S)\|^2 + \frac{K_2 g}{2} \|\alpha(S)\|^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \xi(0) p_1 \xi(0) + \frac{K_2 g}{2} \|\alpha(0)\|^2 + \frac{K_2 M_1 (1+g)}{\alpha} (\|\varphi\|_r + \|\xi(0)\|) \sup_{0 \leq t \leq S} \|\alpha(t)\| \end{aligned}$$

を得る。まず、この不等式の左辺の第三項が右辺によって、

すべての $S \geq 0$ に対して押えられていることから、

$$\|\alpha(t)\| \leq S_1 (\|\varphi\|_r + \|\xi(0)\|), \quad S_1(0,0) = 0$$

を満たす S_1 が存在することになる。ここで、

$$\|\alpha(0)\| \leq \|Z_1(0)\| + \|p_1\| \cdot \|\xi(0)\| \leq M_1 (\|\varphi\|_r + \|\xi(0)\|) + \|p_1\| \|\xi(0)\|$$

であることを用いる。したがって、不等式 (36) の右辺は

$S_2 (\|\varphi\|_r + \|\xi(0)\|)$ で押えられることより、 $\sup_{0 \leq t \leq S} \|\alpha(t)\| \leq S_1$ であるから

えることによつて直ちにわかる。かつ、 $S_2(c, c) = 0$ である。

したがって、 $\mu\|\xi(t)\|$ はこの $S_2(\|\varphi\|_r, \|\xi(0)\|)$ で押えられ、同時に

$$(37) \quad \int_0^\infty \|\dot{\alpha}(t)\|^2 dt < \frac{1}{k_2} S_2(\|\varphi\|_r, \|\xi(0)\|)$$

が成り立っている。したがって、 $\alpha(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ であること

を証明することだけが残っている。これは次のように証明される。

まず、(35) の第一式の両辺を微分すると $k_1(t)$ は常に微分可能で微係数が有界であることによつて、

$$(38) \quad \dot{\alpha}(t) = \dot{Z}_1(t) + \int_0^t k_1(t-s) f(\alpha(s)) ds + k_1(0) f(\alpha(t)) - p_1 \xi(t).$$

したがって、 $\xi = f(\alpha)$ を代入して、殆んど恒等的に成り立つ

$$\|\dot{\alpha}(t)\| \leq M_1(\|\varphi\|_r + \|\xi(0)\|) + \frac{M_1 k_2 S}{2} + M_1 k_2 S + \|p_1\| k_2 S_1.$$

すなわち、有界であることがわかる。このことと、(37) をあわせて、直ちに、 $\alpha(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ が証明される。したがって、

$$\int_0^t k_1(t-s) f(\alpha(s)) ds \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty).$$

ゆえに、 $Z_1(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ に注意して、また、(39) によつて

p_1 は正則であることに注意して、 $\xi(t) \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ が得られる。

条件 (C₀), (C₁) について考える。まず、

$$\tilde{k}_1(i\omega) = \frac{1}{i\omega} \{ \tilde{k}(i\omega) + k_1(0) \}, \quad k_1(0) = -\tilde{k}(0).$$

ゆえに、 $p_1 = p + k_1(0)$ であるから、条件 (C₀) は

$$\operatorname{Re} \left[\eta \left(\eta + \frac{1}{i\omega} \right) \tilde{k}(i\omega) - \left(\frac{1}{k} E + \eta p - \frac{1}{i\omega} \tilde{k}(0) \right) \tilde{\eta} \right] \leq 0$$

が成り立つことに等しく、さらに、 $\tilde{k}(0)$ が対称行列ならば、

この不等式は

$$(39) \quad \operatorname{Re} \left\{ \eta \left(\left(q + \frac{1}{\lambda \omega} \right) \tilde{K}(\lambda \omega) - \left(\frac{1}{\lambda} E + q P \right) \right) \tilde{\eta} \right\} \leq 0$$

に等値である。又、条件 (C_2) は

$$p + {}^T c(0) A(0)^{-1} b = {}^T p + {}^T b^T A(0)^{-1} c(0) > 0$$

で与えられ、特に、 $m=1$ のときは、これらは、それぞれ、

$$\left(q + \frac{1}{\lambda \omega} \right) \tilde{K}(\lambda \omega) - \left(\frac{1}{\lambda} E + q P \right) \leq 0,$$

$$p > -{}^T c(0) A(0)^{-1} b$$

となる。

以上をまとめると、

定理 6. 仮定 (C_1) のもとで、制御系 (26) の絶対安定性のための充分条件は (C_3) あるいは (C_4) と (C_5) が成り立つことであり、制御系 (30) の絶対安定となるための充分条件は (C_6) および (C_7) が成り立つことである。

特に、 $\tilde{z}_1(t)$ が連続的 2 回微分可能と

$$\|\tilde{z}_1(t)\| \leq M_1 e^{-\alpha t} \{\|\varphi\|_r + \|\xi(0)\|\}$$

をみたしている場合に、特性函数の族を $\mathcal{O}((0, \infty))$ として考える (以下、前述に於いて、 $h=\infty$ として考える)。

$$\begin{aligned} \int_0^s {}^T \tilde{f}(t) (\tilde{z}_1 + q \tilde{z}_1) dt &= \int_0^s {}^T \tilde{\xi}(t) (\tilde{z}_1 + q \tilde{z}_1) dt \\ &= {}^T \tilde{\xi}(t) (\tilde{z}_1(t) + q \tilde{z}_1(t)) \Big|_0^s - \int_0^s {}^T \tilde{\xi}(t) (\dot{\tilde{z}}_1 + q \dot{\tilde{z}}_1) dt \end{aligned}$$

を得る。したがって、(36) 式に対応して、

$$\mu \|\tilde{\xi}(s)\|^2 + \int_0^s {}^T \tilde{f}(t) \tilde{z}_1 dt + q \int_0^s {}^T \tilde{f}(t) \tilde{z}_1 dt$$

$$\leq \frac{1}{2} \xi(0) P_0 \xi(0) + \left(\frac{1}{2} + 2\right) M_1 (1 + \gamma) (\|\varphi\|_r + \|\xi(0)\|) \sup_{0 \leq t \leq s} \|\xi(t)\|$$

が得られて、 $q \geq 0$ ならば、 $\|\xi(t)\|$ は有界で、かつ、その bound は $\|\varphi\|_r + \|\xi(0)\|$ と共に零になることとわかる。

$$x(t; \varphi) = y(t; \varphi) + \int_0^t X(t-\tau) b \xi(\tau) d\tau$$

に代入して、 $x(t)$ したがって、 $\dot{x}(t)$ もこの性質をもつこととわかる。かつ、(33) および (38) から、これらの微係数もまたこの性質をもっている。このことと

$$\int_0^T f(r) \phi dt$$

が有界であることを用いて、直ちに $\phi(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) がわかる。同時に $f(\phi(t)) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) も成り立つから、これを用いて (35) から $\xi(t) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$) が示される。すなわち、この場合には、条件 (C6) において、 $q \geq 0$ であればよい。

§5. Liapunov の直接法と Popov の方法の比較。常微分方程式の場合 (2) にもとって、Liapunov の直接法と Popov の方法との比較について述べてみたい。

そのとき、 A は安定として特性函数の族は $\alpha(0, \infty)$ とする。

それについて述べる前に、系 (2b) に対して Lur'e - Postnikov の型の Liapunov 函数 (12) に対して、より一般的な Popov の型の Liapunov 函数、すなわち、 (x, ϕ) に関する二次型式に $\beta \in$ スカラーとして $\beta U(\phi)$ を加えた形で与えられたものについて

考えてみたい。これは直ちに適当に対称行列 $B, M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ で

$$V(x, \sigma) = {}^T x B x + {}^T (\sigma - {}^T c A^{-1} x) M (\sigma - {}^T c A^{-1} x) + \beta U(\sigma) + {}^T \sigma N x$$

の形で表わされる。まず、この V が定理 2 の条件を満たすた

めには $N=0, \beta \geq 0, M \geq 0$ かつ、 $\det M=0$ ならば $\beta > 0, \beta=0$ ならば $M > 0$ であることを証明しよう。これらは、いわゆる

ε-方法と呼ばれる方法で証明される。まず、 $\dot{V} \in (26)$ によ

$$x \rightarrow \varepsilon x, \quad \sigma \rightarrow \sigma, \quad f(\sigma) \rightarrow \varepsilon^2 f(\sigma)$$

(ε は正の定数) とおくことにより、

$$\dot{V} = \varepsilon {}^T \sigma N A x + O(\varepsilon^2)$$

が得られる。これが、すべての (σ, x) に対して定符号である

ためには、 ${}^T \sigma N A x = 0$ でなくてはならない。 A は安定したが、
て正則だから、 $N=0$ でなくてはならない。

$$x \rightarrow \varepsilon x, \quad \sigma \rightarrow \sigma, \quad f \rightarrow \varepsilon^2 f$$

とすると、

$$V = {}^T \sigma M \sigma + O(\varepsilon)$$

となり、これが正定値でなくてはならないから、 $M \geq 0$ 。

$$x \rightarrow \varepsilon^2 x, \quad \sigma \rightarrow \varepsilon^2 \sigma, \quad f(\sigma) \rightarrow f(\sigma)$$

とすると、

$$V = \varepsilon^2 \beta U(\sigma) + O(\varepsilon^4)$$

となって、 $\beta \geq 0$ が示される。更に、 $x=0$ とおく

$$V = \alpha^T M \alpha + \beta U(\alpha)$$

が正定値だから、 $\beta=0$ ならば $M>0$ でなくてはならない。

また、 $\det M=0$ ならば、ある $\alpha \neq 0$ に対して $M\alpha=0$ となるから、このとき $V=\beta U(\alpha) > 0$ 、したがって $\beta > 0$ でなくてはならない。

これらの条件のもとで、

$$(40) \quad \dot{V} = 2^T(Ax+bf)Bx - 2^T(\alpha - \tau CA^T x)M(p + CA^T b)\bar{f} \\ + \beta^T(\tau Cx - pf)\bar{f}$$

が、 $H>0$ に対して、 $f(\alpha)=H\alpha$ とおいたとき (x, α) の負定値=2次型式となるための条件を求めめる。

そこで、任意の実行列 (対称でなくてもよい) P が、

$P+P^T>0$ をみたすための必要かつ充分な条件は、任意の複素ベクトル u に対して、

$$\operatorname{Re}\{\tau u P \bar{u}\} > 0 \quad (\|u\| \neq 0)$$

となることである。今、 η を任意な m ベクトル、

$$A(i\omega) = A - i\omega E$$

として、

$$x = -A(i\omega)^{-1}b\eta, \quad \sigma = H^{-1}\eta$$

に対して、2次型式 $-\dot{V}$ が正定値となる条件は上のことによつて、

$$Q = \operatorname{Re}\{-2^T(Ax+bf)B\bar{x} + 2^T(\alpha - \tau CA^T x)M(p + CA^T b)\bar{f}\}$$

$$-\beta^T(TCx - Pf)\bar{f}] > 0 \quad (\|\eta\| \neq 0)$$

となることである。明らかに、上の x に対して、

$$i\omega x = Ax + b\eta, \quad f(0) = \eta$$

であるから、

$$Q = \operatorname{Re} [-2i\omega^T x B \bar{x} + 2^T \eta^T (H^{-1} + {}^T C A^{-1} A(i\omega)^{-1} b) M (p + {}^T C A^{-1} b) \bar{\eta} \\ + \beta^T \eta^T ({}^T C A(i\omega)^{-1} b + p) \bar{\eta}]$$

を得る。ここで B は対称行列だから、 ${}^T x B \bar{x}$ は実数だから、

$$Q = \operatorname{Re}^T \eta \{ 2^T (H^{-1} + {}^T C A^{-1} A(i\omega)^{-1} b) M (p + {}^T C A^{-1} b) + \beta^T ({}^T C A(i\omega)^{-1} b + p) \} \bar{\eta}.$$

$$i\omega A^{-1} A(i\omega)^{-1} = A(i\omega)^{-1} - A^{-1}$$

を用いて書きかえると必要条件として、

$$Q = \operatorname{Re}^T \eta \{ {}^T \{ {}^T C A(i\omega)^{-1} b \} [2M(p + {}^T C A^{-1} b) \frac{1}{i\omega} + \beta E] \\ + 2^T (H^{-1} - \frac{1}{i\omega} {}^T C A^{-1} b) M (p + {}^T C A^{-1} b) + \beta p \} \bar{\eta} > 0 \quad (\|\eta\| \neq 0)$$

を得る。特に、 $M \neq 0$ 、 $m=1$ のときは $p + {}^T C A^{-1} b > 0$ に注意して、

$\delta = \beta / 2M(p + {}^T C A^{-1} b)$ とおけば仮定より $\delta \geq 0$ となつて条件 (39) と一致する。 $M=0$ のときも $\operatorname{Re} \frac{1}{i\omega} A(i\omega)^{-1}$ は下に有界であることが示されるので充分小さい M をとらんとこのことが成り立っている、いずれにしても $m=1$ のとき条件 (36) は必要条件であることがわかる。

(2a) の場合には、もしも、 S -method によつて絶対安定性が示されるならば (36) は必要条件であることを示そう。このとき

2. Lyapunov 函数として

$$V(x, r) = x^T B x + \beta U(r), \quad \beta > 0$$

を考える。特性函数の族を $\mathcal{O}((R, R_2))$, A を安定として、 $R > R_2^2/R$, に対して

$$\begin{aligned} S &= \dot{V} + \gamma^T (C x - \frac{1}{R} f) \bar{f} \\ &= (Ax + bf)^T (2Bx + \beta c \bar{f}) + \gamma^T (C x - \frac{1}{R} f) \bar{f}, \quad \gamma \geq 0 \end{aligned}$$

を負定値にすることを考える。全く前と同様に、

$$x = -A(i\omega)^{-1} b \eta, \quad r = H^{-1} \eta, \quad f(r) = \eta$$

と置いて、 S が負定値になるための必要条件として、

$$\begin{aligned} Q &= \operatorname{Re} \{ -^T (Ax + bf) (2B\bar{x} + \beta c \bar{f}) - \gamma^T (C x - \frac{1}{R} f) \bar{f} \} \\ &= \operatorname{Re}^T \eta \{ (\gamma + i\omega\beta)^T C A(i\omega)^{-1} b + \frac{1}{R} \gamma E \} \eta > 0 \quad (\|\eta\| \neq 0) \end{aligned}$$

を得る。明らかに、 $\gamma \neq 0$ だから、 $\beta/\gamma = g$ として条件 (C_5) を得る。

§6. Critical case. これまではいずれも A を安定としてきた。すなわち、state system それ自体がすでに安定である。制御の目的から考えれば A が安定でないとした場合の絶対安定性を見出すことが望ましい。(勿論 §2 で述べたことから明らかに同様に A の安定性は特性函数の族のえらび方に依存する) 特性函数の族を $\mathcal{O}((0, R))$ とした場合に (2a) において、 A が正の実数をもつ特性根、および、単因子が一次である零根を二つもつことが許されないことはすでに述べた。そこで、

実部が零の特性根 $\varepsilon = \pm i\omega$ は、それは純虚数あるいは

$$(40) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の形の Jordan cell をもたなくてはならない。(2a)を書きかえて

$$(41) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bf(\sigma), \quad y = b_1 f(\sigma), \quad z = y + b_2 f(\sigma) \\ \sigma &= {}^T C_1 x + {}^T C_2 y + {}^T C_3 z. \end{aligned}$$

で表わされた系を考える。ここで、 x, σ は従来と同じく、 y, z は l ベクトルとする。かつ、 $l \leq m$ とする。これが絶対安定であるためには、明らかに C_2 の階数は l でなくてはならない。今 Lyapunov 函数として、

$$V(x, y, z, \sigma) = {}^T x B x + {}^T y B_1 y + U(\sigma)$$

を考える。 $B > 0$, $B_1 > 0$ とすればこれは、 (x, y, σ) に関して、 (x, y, z) に関して正定値である。

$$\dot{V} = -{}^T x C x + 2{}^T f^T d x + 2{}^T f^T d_1 y + {}^T f^T p f$$

$$d = Bb + \frac{1}{2}{}^T A c, \quad d_1 = B_1 b_1 + \frac{1}{2}{}^T C_2, \quad p = {}^T C b + {}^T C_1 b_1 + {}^T C_2 b_2.$$

これを負定値 ((x, y, z, σ) に関して) とすることは出来ない。
しかし、もし B_1 を $d_1 = 0$ となるようにえらぶことが出来たら、
かつ、 C を

$$(42) \quad \begin{pmatrix} C & -d \\ -{}^T d & -\frac{1}{2}({}^T p + {}^T p^T) \end{pmatrix} > 0$$

となるようにえらべれば、これは (x, f) に関して (x, σ) に関して負定値となる。このときは、常に $\dot{V} \leq 0$ であり $x=0, \sigma=0$ の

とまに限る。又 $V=0$ となる。このとき、(41)より $\dot{y}=0$,

$\dot{z}=y_2^T C_1 y + C_2 z = 0$ がえられ、 C_2 の階数が 2ℓ であることから、

これをみたす y, z は零しかない。初めに、定理 5 により、絶対安定性がえられる。純虚数の組を持つ場合、

$$\dot{x} = Ax + b f(t), \quad \dot{y} = w z + b_1 f(t), \quad \dot{z} = -w y + b_2 f(t)$$

$$w = J C x + C_1 y + C_2 z, \quad w = \text{diag}(w_1, \dots, w_\ell)$$

のときは、Lapunov 函数

$$V(x, y, z, t) = x^T B x + \sum_{j=1}^{\ell} \alpha_j (y_j^2 + z_j^2) + U(t), \quad \alpha_j > 0$$

を考えて同様な結論が得られる。まづわち、今度は、 b, c のみなので、この V は定理 2 の条件 (1'), (2') をみたし、

$P = C b^T C b + C_2 b^2$ をもて、条件 (42) のもとで $\dot{V} \leq 0$ となる。

したがって、 $V=0$ における不変集合は、原点のみからなるため

条件を求めれば、(42) とあわせて充分条件が見出される。

$\dot{V}=0$ のときは $x=0, \dot{x}=0$ でなくてはならないから、その条件は系

$$\dot{y} = w z, \quad \dot{z} = -w y$$

の解に対して、 $C_1 y + C_2 z$ が恒等的に零となるのは $y=0$,

$z=0$ に限るための条件と同値で、それは

$$\text{rank} \begin{pmatrix} C_1 & -w C_2 \\ C_2 & w C_1 \end{pmatrix} = 2\ell$$

である。

注1 (p.3, p.28~29) 全安定に関する定理としては

Malkin の定理などが知られている。例えば、定理2 もそこで述べた系 $\dot{x} = F(x)$ の零解の全安定となるための条件を与えている。このとき、 $\|x\| \leq \alpha$ における $\|\frac{\partial V}{\partial x}\|$ の上限を $L(\alpha)$ とすれば、擾動項 $p(x)$ の許容範囲は

$$\|p(x)\| < L(\|x\|)C(\|x\|)$$

で与えられる。

注2 (p.14) これは次のようにしても求められる(古屋)。まず、定理1における逆、すなわち、行列の等式

$${}^TAB + BA = -C$$

において、 $B > 0$, $C > 0$ ならば A は安定であることが知られている(証明は Lefschetz (3))。今、 $M = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}E \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} A & b \\ {}^Tc & -p \end{pmatrix}$ とおけば、 $MN + {}^TNM = -P$ が得られている。そこで、仮定より、 $P > 0$, $M > 0$ したがって N は安定であることが上のことからわかる。ゆえに勿論、 $N = \begin{pmatrix} A & b \\ {}^Tc & -p \end{pmatrix}$ は正則である。

注3 (p.17)。このことは、注2の結果を用いれば容易に示される。すなわち、 $\begin{pmatrix} A & b \\ {}^Tc & -p \end{pmatrix}$ は安定な実行列であるから、

$\det \begin{pmatrix} -A & -b \\ {}^Tc & p \end{pmatrix}$ は正でなくてはならない。ゆえに、(14)式を用いると

$$\det \begin{pmatrix} -A & -b \\ {}^Tc & p \end{pmatrix} = \det(-A) \cdot \det(p + {}^TcAb) > 0$$

が得られる。 $\det(-A) > 0$ および $m=1$ に注意すれば、直ちに

(17) がえられる。

注4 (P.30). 明らかに, $\tau_j \geq 0$, a_j を定数として

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) + b f\left(\sum_{j=1}^p a_j \sigma(t - \tau_j)\right), \quad \sigma(t) = \tau_c x(t)$$

の場合を含んでいる。

注5 (P.34). この条件は, たとえば, 差分微分方程式の場合には明らかにみたされている。

注6 (P.38). *transfer function* ということは, 系(2a)

$$\dot{x} = Ax + b\xi, \quad \sigma = \tau_c x \quad (\xi = f(\sigma))$$

等において, ξ を *input*, σ を *output* と考えて, 記号的に $p = \frac{d}{dt}$ とおいた場合に

$$\sigma = -\tau_c A(p)^{-1} b \xi, \quad A(p) = A - pE$$

と表わされることに由来している。函数微分方程式の場合にはこれに対応する表現はない。また, 正確には

$k(p) = -\tau_c A(p)^{-1} b$ を *transfer function* とし, それに対して $k(i\omega)$ は *frequency response* と呼ばれている。

注7 (P.48). このことは函数微分方程式の場合にも成り立つ。

このとき, $A(\omega)$ は一般には ω の多項式ではない。しかし, ω を実数としたとき, 積分 $\int_{-\infty}^0 e^{i\omega t} [dV_F(\omega)]$ は ω に無関係な上界をもっている。したがって, $A(i\omega)^{-1}$ は三つの函数の比として表わしたとき, 分母は $\det A(i\omega)$ で与えられて ω の有界函数を係数とし n 次の係数は零でない定数とする ω の n

次の多項式で、分子は ω の有界函数を係数とする ω の高々 $(n-1)$ 次の多項式を要素とする行列である。また分母は零となることはないから、 $\operatorname{Re} \frac{1}{i\omega} A(i\omega)^{-1}$ が下に有界であることとを示すには、 $\omega \rightarrow 0$ における極限が存在して有界であることを示せば充分である。まず、

$$B(\lambda) = \int_{-\gamma}^0 (e^{\lambda\theta} - 1) (d\nu_F(\theta)) - \lambda E$$

と置いて、 $A(0) = \int_{-\gamma}^0 (d\nu_F(\theta))$ が正則であることに注意して

$$A(i\omega) = A(0) + B(i\omega) = A(0) \{E + A(0)^{-1} B(i\omega)\}$$

を得る。そこで、

$$\frac{1}{\lambda} B(\lambda) = \int_{-\gamma}^0 \frac{e^{\lambda\theta} - 1}{\lambda} (d\nu_F(\theta)) - E,$$

したがって、

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} B(\lambda) = \int_{-\gamma}^0 \theta (d\nu_F(\theta)) - E$$

を得る。このことから、 λ が充分小さければ $B(\lambda)$ も充分小さいことがわかる。さて、一般に行列 X が充分小さいときには、

$$(E + X)^{-1} = E - X + X^2 - X^3 + \dots$$

が成り立つことを用いて、かつ、

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} B(\lambda)^j = 0, \quad j = 2, 3, \dots$$

に注意して、直ちに、実数 ω を零に近づけたとき

$$\operatorname{Re} \frac{1}{i\omega} A(i\omega)^{-1} \rightarrow A(0)^{-1} \{E - \int_{-\gamma}^0 \theta (d\nu_F(\theta))\} A(0)^{-1}$$

であることがわかる。特に、常微分方程式のときは

$$\operatorname{Re} \frac{1}{i\omega} A(i\omega)^{-1} \longrightarrow (A^{-1})^2 \quad (\omega \rightarrow 0)$$

となる。

注 8 (P. 50) このための条件は

$${}^T b, B, b, = -\frac{1}{2} {}^T b, C,$$

かつ、 $B, > 0$ であることから、 ${}^T b, C,$ は対称 (l, l) 行列で、

かつ、 $b, u \neq 0$ なる l ベクトル u に対して

$$-{}^T u {}^T b, C, u > 0$$

であることが必要充分である。特に、 $m=l=1$ のときはこの

条件は、 $b, c, < 0$ 、あるいは、 $b, = c, = 0$ となる。

参考文献。

- (1) M. A. Aizerman & F. R. Gantmacher, Absolute Stability of regulator systems, Holden-Day, 1964.
- (2) A. Halanay, Differential Equations: Stability, oscillations, time lags, Academic Press, 1966.
- (3) S. Lefschetz, Stability of nonlinear control systems, Academic Press, 1965.

絶対安定性に関しては、(1) は殆んど完全とも云える内容をもっている。Popov その他の論文については上の文献、特に(1) において、up to date の意味で殆んど完全な list が見られる。

