

Reductive Operator について

東北大 教養 北野孝一

H で separable, infinite-dimensional complex Hilbert space を、 $B(H)$ で H 上の bounded linear operator の全体を表わす。

operator が reductive であるとは invariant subspace がすべて reducing であるときである。J. A. Dyer, E. A. Pedersen 及び P. Porcelli [3] により、次の I, II が同値であることが証明された。

I. 任意の operator が自明でない invariant subspace をもつ。

II. 任意の reductive operator は normal である。

(E. A. Azoff, F. Gilfeather [2] は別証明を与えている。)

これで、invariant subspace の存在の問題と reductive operator の normality の問題が同値であることがわかったのである。以前から reductive operator の normality については研究されていたし、現在も多くの研究がなされてい

る。例えば、T. Andô [1], T. Saitô [14], K. Kitano [6], R. L. Moore [8], P. R. Halmos [5], P. Rosenthal, E. Nordgren, H. Radjavi [10], C. K. Fong [4] など。

この報告では reductive operator についてのいくつかの性質と quasi-similarity と normality との関連についての結果を紹介したいと思う。

$\mathbb{R}$ で reductive operator の全体を、 $\mathbb{T}$ で transitive operator の全体を表わす。ここで operator が transitive であるというのは、自明な invariant subspace しか持たないときである。それから operator A が invariant な subspace の全体を $\text{Lat} A$ で表わす。

§ 1. Reductive Operator の性質

この節の結果は P. R. Halmos, R. L. Moore によっている。

定理 $\mathbb{R}$ の内核 (内点全体) は $\mathbb{T}$ の部分集合である。

証明. reductive intransitive operator A が $\mathbb{R}$ の interior に入らないことを示せばよい。 A が intransitive より、自明でない invariant subspace が存在するこれを $\mathfrak{M}$ とする。更に A が reductive より、 $\mathfrak{M}$ は A^* でも invariant である。ここで $\mathfrak{M}$ は invariant であるがしかし reducing でないような operator $Q \in B(H)$ をとり、 $A + \frac{1}{n}Q$ (n は任意の自然数) を考える。

m は $A + \frac{1}{n}Q$ で invariant であるが $A^* + \frac{1}{n}Q^*$ で invariant ではない。従って $A + \frac{1}{n}Q$ は reductive ではない。 $n \rightarrow \infty$ のとき $A + \frac{1}{n}Q \rightarrow A$ であるから $A \notin \mathbb{R}$ の interior である。

系. $\mathbb{R}$ の開核は空集合である。

証明. まず $\{T: T \in B(H) \text{ s.t. } \sigma_p(T) \neq \emptyset\}$ なる集合は $B(H)$ の中で dense であることを示す。任意の $A \in B(H)$ に対して $\exists \sigma(A) \subset \sigma_{ap}(A)$ であるから $\sigma_{ap}(A) \neq \emptyset$ である。次に任意の $\lambda \in \sigma_{ap}(A)$, $\varepsilon > 0$ に対して、 $\|Ae - \lambda e\| < \varepsilon$ となるような単位ベクトル e が存在する。 e の projection を P とし、 $A_0 = A - (I-P)AP$ とおく。 $A_0 e = (Ae, e)e$ であるから $\sigma_p(A_0) \neq \emptyset$ である。ところで任意の $f \in H$ に対して

$$\begin{aligned} \|(A - A_0)f\| &= \|(I-P)APf\| \leq |(f, e)| \|(I-P)Ae\| \\ &\leq \|f\| \|Ae - (Ae, e)e\| \leq 2\varepsilon \|f\| \end{aligned}$$

従って $\|A - A_0\| \leq 2\varepsilon$. さて、eigenvalue をもつということは transitivity が成立しないから上に示したことより $\mathbb{T}$ の interior は空集合である。前に示した定理より系が得られる。

$\mathbb{R}$ の complement は dense であるばかりでなく、その interior は non-empty である。

定理. U を non-invertible isometry operator, $A \in \mathbb{R}$ とするとき、 $\|U - A\| \geq 1$ が成立つ。

証明. もし $\|U - A\| < 1$ とする、 $\|U^* - A^*\| < 1$ となるが、

まず $\text{Ker } A^* \neq \{0\}$ を示す. $\|U^*U - A^*U\| < 1$ 即ち $\|1 - A^*U\| < 1$ であるから A^*U が invertible となる. ここで $\text{ran } A^* = H$ 即ち $\text{Ker } A^* = \{0\}$ とする. closed graph theorem より A^* が invertible. 従って U が invertible となり仮定に反する. ゆえに $\text{Ker } A^* \neq \{0\}$ である. 次に A が reductive であるから $\text{Ker } A = \text{Ker } A^*$ 従って $Af = 0$ なるような $f \neq 0$ が存在する. しかし

$$\|f\| = \|Uf\| = \|(U-A)f\| \leq \|U-A\|\|f\| < \|f\|$$

となり矛盾が生ずる. 従って $\|U-A\| \geq 1$ でなければならぬ.

この定理より. 任意の non-invertible isometry operator と $\mathbb{R}$ との距離は 1 であることがわかる.

次に reductivity と polar decomposition との関係について考えてみる.

補題. $A \in \mathbb{R}$ としその polar decomposition を $A = UP$ とする. そうすれば sub-space $\mathfrak{m} \subset H$ が存在して, $H = \mathfrak{m}^\perp \oplus \mathfrak{m}$ に属して

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と表わされる. 但し, $\text{Ker } A_1 = \text{Ker } P_1 = \{0\}$, U_1 は unitary operator である.

証明. $\mathfrak{m} = \text{Ker } A$ とおく. $A \in \mathbb{R}$ より $\mathfrak{m}$ は A を reduce するから A の行列表現は左辺のようになる. 但し $A_1 = A|_{\mathfrak{m}^\perp}$. ここで $A_1 = U_1 P_1$ を $\mathfrak{m}^\perp$ における polar decomposition とする. $\text{Ker } A_1 = \{0\}$ であるから decomposition の定義より $\text{Ker } U_1 = \text{Ker } P_1$

$= \{0\}$ である. 更に A_1 が reductive であるから $\text{Ker } A_1^* = \text{Ker } A_1$ 従って $\text{Ker } U_1^* = \{0\}$ となる. partial isometry で $\text{Ker } U_1 = \text{Ker } U_1^* = \{0\}$ であるから U_1 は unitary operator である. 次に $U_1 \oplus 0 = U$, $P \oplus 0 = P$ を示せばよい. $U_1 \oplus 0$ は partial isometry であり, $P \oplus 0$ は positive であり λ の上 $\text{Ker } U_1 = \text{Ker } P_1$ より $\text{Ker}(U_1 \oplus 0) = \text{Ker}(P \oplus 0)$ である従って polar decomposition の一意性より $U = U_1 \oplus 0$, $P = P \oplus 0$ が成立つことがわかる.

定理. $A \in \mathbb{R}$ で $\text{Ker } A = \{0\}$ とし. polar decomposition を $A = UP$ とするならば $\text{Lat } A \subset \text{Lat } U^* \cap \text{Lat } P$ が成立つ.

証明. $A \in \mathbb{R}$ 及び 1-1 より U は unitary かつ P は 1-1 となる. 任意の $m \in \text{Lat } A$ に対して $A^*m \subset m$ であるから $A^*A = P^2$ で m は invariant になる. ところで $\text{Lat } P^2 \subset \text{Lat } P$ であるから $m \in \text{Lat } P$ がいえる. 次に任意の $f \in m$ に対して $U^*f = g + h$, $g \in m$, $h \in m^\perp$ とする. $A \in \mathbb{R}$ より $A^*f \in m$ 即ち $A^*f = PU^*f = Pg + Ph \in m$. しかも $P^* = P$ より $Pg \in m$, $Ph \in m^\perp$ であり. 更に $Pg + Ph \in m$ であつたから $Ph = 0$ となる. P は 1-1 より $h = 0$, 即ち $U^*f \in m$ が得られる.

この定理は実はもっと強い形で成立つのである.

定理. $A \in B(H)$ で, polar decomposition を $A = UP$ とするとき. 次の (i), (ii), (iii) は同値である.

(i) $A \in \mathbb{R}$,

$$(ii) \quad \text{Lat } A \subset \text{Lat } U^* \cap \text{Lat } P,$$

$$(iii) \quad \text{Lat } A = \text{Lat } U \cap \text{Lat } U^* \cap \text{Lat } P.$$

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii) 今 Q を $\text{Lat } A$ に属する sub-space への projection とする. $A \in \mathbb{R}$ より $AQ = QA$ である. $f \in \text{Ker } A$ に対し $AQf = QAf = 0$ であるから $Qf \in \text{Ker } A$ となる. ここで $\mathcal{M} = \text{Ker } A$ とおくと $\mathcal{M}$ 及び $\mathcal{M}^\perp \in \text{Lat } Q$ となる. $A_1 = A|_{\mathcal{M}^\perp}$ とし, $A_1 = U_1 P_1$ とする. (補題をみよ). そして $\mathcal{N} \in \text{Lat } A$ で $QH = \mathcal{N}$ としておく. $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2$, 但し $\mathcal{N}_1 \in \mathcal{M}^\perp$ かつ $\mathcal{N}_2 \in \mathcal{M}$ と表わせる. 前定理より $\mathcal{N}_1 \in \text{Lat } U^* \cap \text{Lat } P_1$ である. よって $\mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{N}_2$ は $U^* = U^* \oplus 0$ 及び $P = P_1 \oplus 0$ で invariant である. 即ち $\text{Lat } A \subset \text{Lat } U^* \cap \text{Lat } P$ がいえた.

(ii) $\Rightarrow$ (i). sub-space が A で invariant であれば, 仮定より U^* 及び P で invariant である. 従って $A^* = P U^*$ で invariant となる. 即ち $A \in \mathbb{R}$ である.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) 明らか.

(i) 又は (ii) $\Rightarrow$ (iii) (ii) から出発して $\text{Lat } A$ に属する space の orthogonal complement を考えることにより $\text{Lat } A^* \subset \text{Lat } U \cap \text{Lat } P$ を得る. (i) により $\text{Lat } A = \text{Lat } A^*$ であるから $\text{Lat } A \subset \text{Lat } U \cap \text{Lat } U^* \cap \text{Lat } P$ を得る. 次に U 及び P で invariant であれば A で invariant になるから $\text{Lat } A =$

$\text{Lat } U \cap \text{Lat } U^* \cap \text{Lat } P$ が得られる。

§2. reductive operator が normal となる十分条件

operator $A, B \in B(H)$ に対して, 1対1かつ dense range をもつような operator X, Y が存在して, $AX = XB$ 及び $YA = BY$ が成立つとき, A と B は quasi-similar であるという. この quasi-similarity と hyperinvariant sub-space に関して, 次の定理が成立つ. (S_2 -Nagy, C. Foias; cf. [9, 11, 13]).

定理. A と B が quasi-similar であるとする. もし A が自明でない hyper-invariant subspace を持つならば, B も又自明でない hyper-invariant subspace を持つ.

更に V. Lomonosov により次の定理が証明された. (もとの論文[7]では注に書いてある) (c.f. [7, 11, 13]).

定理. non-zero な compact operator と可換な non-scalar operator $A \in B(H)$ は自明でない hyper-invariant sub-space を持つ.

ここで $\leftrightarrow$ で可換, $\sim$ で quasi-similar を表わすならば, 上に示した2つの定理を考慮することにより次のような diagram を考えることができる.

$$K(\neq 0) \leftrightarrow A(\neq \lambda I) \sim B \leftrightarrow C$$

$C \in B(H)$ が自明でない invariant sub-space をもつことがわかる. K が non-zero compact operator という条件のもとで動いたとき,

C は $B(H)$ の中でどんな集合を作るか?。これが解ければよいのですが今のところよく解らない。しかしながら quasi-similar という概念は重要な働きをしていることがわかる。しかし unbounded operator を仲立ちにしているのが割りと取り扱い難い。最近 similar な operator に関してはいくつかの結果が得られている (例えば L.A. Fialkow, D.A. Herrero 等)。

以下において quasi-similarity と normality に関連して、H. Radjavi, P. Rosenthal [13] (p.197) にある問題に対して、C.K. Fong [4] が肯定的に解決を与えた。

定理. normal operator と quasi-similar な operator のすべての hyper-invariant sub-space が reducing なら、その operator は normal である。

証明. normal operator を N とし、これと quasi-similar な operator を $T \in B(H)$ とする。1対1かつ dense range を持つような X, Y なる operator が存在して $TX = XN$ 及び $NY = YT$ が成り立っているわけである。 N の spectral measure を E としておく。任意の Borel set σ に対して $E(\sigma)H$ は N の hyper-invariant sub-space となる。ここに $\mathcal{L}$ を N の hyper-invariant sub-space としたとき、 $q(\mathcal{L}) = \bigvee \{ \overline{AX\mathcal{L}} : AT = TA \}$ とおくと、次のことが成立することが示される (see [9: chap II, §5])。

(i) $q(\mathcal{L})$ は T の hyper-invariant sub-space になっている。

$$(ii) \quad \overline{Yg(\mathcal{L})} = \mathcal{L},$$

$$(iii) \quad \mathcal{L} \subset \mathcal{L}' \text{ ならば } g(\mathcal{L}) \subset g(\mathcal{L}') \text{ である,}$$

$$(iv) \quad \bigvee g(\mathcal{L}_\alpha) = g(\bigvee \mathcal{L}_\alpha),$$

$$(v) \quad g(\{0\}) = \{0\}, \quad g(H) = H.$$

定理の仮定と(i)より $g(\mathcal{L})$ が T を reduce することからわかる。ここで $P = P_{g(\mathcal{L})}$, $Q = P_{g(\mathcal{L}^\perp)}$ なる orthogonal projection P, Q を定義する。reducing より $TP = PT$ が得られる。ところで $g(\mathcal{L}^\perp)$ は T で hyperinvariant であるから P で invariant である即ち $QPQ = PQ$ 、従って $PQ = QP$ である。他方(iii)より

$$\overline{Yg(\mathcal{L})} \cap \overline{Yg(\mathcal{L}^\perp)} = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^\perp = \{0\}.$$

ゆえに $g(\mathcal{L}) \cap g(\mathcal{L}^\perp) = \{0\}$ である。また次の関係

$$\overline{g(\mathcal{L}) + g(\mathcal{L}^\perp)} \supset \overline{X\mathcal{L} + X\mathcal{L}^\perp} = \overline{X(\mathcal{L} + \mathcal{L}^\perp)} = H$$

が成り立つから $P = I - Q$ 、あるいは $g(\mathcal{L}^\perp) = g(\mathcal{L})^\perp$ であることがわかった。任意の Borel set σ, τ , $\sigma \cap \tau = \emptyset$ に対しては $E(\sigma)H \perp E(\tau)H$ 又は $E(\sigma)H \subset \{E(\tau)H\}^\perp$ であるから(ii)より $g(E(\sigma)H) \subset g(\{E(\tau)H\}^\perp) = g(E(\tau)H)^\perp$ 即ち $g(E(\sigma)H) \perp g(E(\tau)H)$ である。ここで任意の Borel set σ に対して

$$F(\sigma) = P_{g(E(\sigma)H)}$$

とおく。 $\sigma \cap \tau = \emptyset$ ならば $F(\sigma)F(\tau) = F(\tau)F(\sigma) = 0$ であり、(i),

(v)より F が spectral measure になることがわかる。ここで

$$M = \int \mathbf{z} dF_{\mathbf{z}}$$

により normal operator M を定義する. T と M が一致することを示せばよい. そのためにまず $E(\sigma)Y = YF(\sigma)$ を示す.

(ii) より $\overline{YF(\sigma)H} = E(\sigma)H$ が成立する. ここで $F(\sigma)y = y$ なる y は $F(\sigma)H$ に属する. 従って $Yy \in E(\sigma)H$ ゆえに $E(\sigma)Yy = Yy = YF(\sigma)y$ である. 次に $F(\sigma)y = 0$ なる y は $F(\sigma^c)y$ と一致し, $\overline{YF(\sigma^c)H} = E(\sigma^c)H$ を考慮すれば $E(\sigma^c)Yy = Yy$ or $E(\sigma)Yy = 0$ となる. 以上より任意の $y \in H$ に対して $E(\sigma)Yy = YF(\sigma)y$ 即ち $E(\sigma)Y = YF(\sigma)$ が得られる. また $E(\sigma) = 0$ と $F(\sigma) = 0$ は同値であるから N と M は同じ spectrum を持つ. その spectrum 上 $|f(z) - z|$ が十分小さくなるような step function を f とする. そうすれば $\|f(N) - N\|$ 及び $\|f(M) - M\|$ 両方とも small でありしかも $f(N)Y = Yf(M)$ が成り立つ. 従って $NY = YM$ 即ち $YT = YM$ である. ところで Y は 1対1 であるから $M = T$ となり, T が normal operator であることが示された.

最後に invariant subspace の問題と同値な命題を 1 つ述べておくことにする. (H. Radjavi, P. Rosenthal [12], T.P. Wiggan [16]).

定理. 次の (i), (ii) は同値である.

- (i) A が reductive operator であるならば normal である.
- (ii) A が reductive operator であるならば $A \oplus A$ も reductive

operator ($H \oplus H$ 上の) である.

証明. (i) $\Rightarrow$ (ii): A と I により生成される weakly closed algebra を $W(A)$ とおく. $W(A)$ が star-algebra であれば $W(A \oplus A)$ も star-algebra になるから Sarason の定理 [15] より (i) $\Rightarrow$ (ii) の成り立つことがわかる.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $\mathcal{M}$ を A の graph とする. 即ち $\mathcal{M} = \{x \oplus Ax; x \in H\}$ とおけば $\mathcal{M}$ は $A \oplus A$ で invariant になる. 従って $A \oplus A$ が reductive ならば $(A^* \oplus A^*)(x \oplus Ax) = A^*x \oplus A^*Ax \in \mathcal{M}$ が任意の $x \in H$ に対して成り立つから $A^*Ax = AA^*x$ が得られ A が normal であることがわかる.

参考文献

- [1] T. Andô, Note on invariant subspaces of a compact normal operator, Arch. Math., 14(1963), 337-340
- [2] E. A. Azoff & F. Gilfeather, Measurable choice and the invariant subspace problem, Bull. AMS, 80(1974), 893-895
- [3] J. A. Dyer, E. A. Pedersen & P. Porcelli, An equivalent formulation of the invariant subspace conjecture, Bull. AMS, 78(1972), 1020-1023
- [4] C. K. Fong, A sufficient condition that an operator be normal, Michigan Math. J., 21(1974), 161-162
- [5] P. R. Halmos, Irreducible operators, Michigan Math. J., 15(1968), 215-223
- [6] K. Kitano, Some conditions on a reductive operator implying normality or spectrality, (to appear)
- [7] V. Lomonosov, On invariant subspace of families of operators commuting with a compact operator, Funkcional. Anal. i

Prilozen, 7(1973), 55-56

- [8] R. L. Moore, Properties of reductive operators, (preprint)
- [9] B. Sz.-Nagy & C. Foias, Harmonic analysis of operators on Hilbert space, North-Holland, Amsterdam, 1970
- [10] E. Nordgren, H. Radjavi & P. Rosenthal, On operators with reducing invariant subspaces, (to appear)
- [11] C. Pearcy & A. Shields, A survey of the Lomonosov technique in the theory of invariant subspaces, Math. Surveys, 13, Amer. Math. Soc., 1974
- [12] H. Radjavi & P. Rosenthal, A Sufficient condition that an operator algebra be selfadjoint, Canad. J. Math., 23(1971), 588-597
- [13] H. Radjavi & P. Rosenthal, Invariant subspaces, Springer-Verlag, New-York, 1973
- [14] T. Saitô, Some remarks on Andô's theorem, Tohoku Math. J., 18(1966), 404-409
- [15] D. Sarason, Invariant subspaces and unstarred operator algebras, Pacific J. Math., 17(1966), 511-517
- [16] T. P. Wigen, On direct sums of reductive operators, Proc. AMS, 45(1974), 313-314