

C^* -代数の同型写像について

東北大 教養 岡安隆照

§1. 主定理など.

von Neumann 代数 M から von Neumann 代数 N の上への同型写像 ρ は, M から N への $*$ 同型写像 μ と, M の内部自己同型写像で正の正則な要素で定義されたもの ϕ との積として一意に書けることがわかっている:

$$\rho = \mu \phi ([\cdot \cdot]).$$

この事実¹は所謂作用素の極分解との類似性から自己同型写像の極分解と名づけたのであるが, 作用素の極分解と比較するとき分解の条件があまりきれいでないことが不満であると言わざるを得ない.^{しかし}この不満をとり除きたいという我々の目的はこの小論でほぼ達せられるであろう. そのために我々は C^* -代数の自己同型写像について, その自己共役性と正值性をうまく定義する.

ところで, von Neumann 代数の微分, 即ちその上の線型

写像で任意の二つの要素 x, y の対に対して

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$$

を満すものかすべて内部微分であることは66年に境[5]や

Kadison[3]によって示されたが, von Neumann代数以外の C^* -代数も時にはこの性質を具えている. 実際境^[6]は単純で単位をもつ C^* -代数が, 又 Σ Liou^[1] は III 型の AW^* -代数がこの性質を具えていることを示した. この性質は以下の我々の議論では非常に都合がよいもので, 便宜上我々はそれに性質(D)という名前を与える.

さて我々の目的とする定理は次の通りである. なお議論を簡潔にするためにこの小論では単位をもつ C^* -代数のみを扱うことにしよう.

主定理 性質(D)をもつ C^* -代数 A から C^* -代数 B の上への同型写像 ρ に対して A から B の上への $*$ 同型写像 μ と, A の正值自己同型写像 ϕ が一意に存在して

$$\rho = \mu\phi$$

が成り立つ. 更に対応 $\rho \mapsto (\mu, \phi)$ は metrical に両側連続である.

H, K を Hilbert 空間, s を H から K 上への可逆な有界線型写像とすると

$$\text{Ad } s(x) = sxs^{-1} \text{ for } x \in \mathfrak{K}(H)$$

は $\mathfrak{K}(H)$ から $\mathfrak{K}(K)$ の上への同型写像である. 更に C^* -代数

A, B がそれぞれ H, K 上に作用しているとき $Ad_s(A) = B$ ならば Ad_s の A 上への制限 $Ad_s|_A$ は A から B 上への "spatial π " 同型写像になる。spatial な $\ast$ 同型写像は必ず等距離線型写像によって定義されることは自然である。

C^* -代数 A の, その maximal left ideal I による商空間 A/I は Hilbert 空間になる。 A の maximal left ideal の全体を $\mathcal{L}(A)$, A から A/I への自然な準同型写像を π_I , $A_I = A/I$ の直和を $\mathcal{H}(A)$, そしてその上への A の自然な表現を π_A と書くことにしよう。勿論 $\mathcal{H}(A)$ は A_I を自然に含んでいると考えられる。

次に B も C^* -代数で, ρ が A から B 上への同型写像ならば, 各 $I \in \mathcal{L}(A)$ に対して $\rho(I) \in \mathcal{L}(B)$ で, 写像

$$s_I(x_I) = \rho(x)_{\rho(I)} \quad \text{for } x \in A$$

は well-defined になる。更に $s = \sum_I s_I$ とするとこれは $\mathcal{H}(A)$ から $\mathcal{H}(B)$ の上への可逆な有界線型写像であり, しかも

$$\rho = \pi_B^{-1} (Ad_s|_{\pi_A(A)}) \pi_A$$

を満たすことが調べられる。なお ρ が $\ast$ 同型写像であるためには s が等距離線型写像であることが必要且十分になる。

C^* -代数 A の正則な要素を a とするとき

$$Ada(x) = axa^{-1} \quad \text{for } x \in A$$

は明らかに A の自己同型写像であるが, 自己同型写像がこの

形をもつならばそれは内部自己同型写像であるという。 $\text{Ad} a$ の spectrum $\text{Sp}(\text{Ad} a)$ と a の spectrum $\text{Sp}(a)$ との間には

$$\text{Sp}(\text{Ad} a) \subseteq \text{Sp}(a) \text{Sp}(a)^{-1} = \{ \lambda \mu^{-1} : \lambda, \mu \in \text{Sp}(a) \}$$

なる関係が確かめられる。

§2. 内部自己同型写像と内部微分の関係.

C^* -代数 A の微分が, $a \in A$ の要素として

$$\text{ad} a(x) = ax - xa \quad \text{for } x \in A$$

の形をもつとき, それは内部微分であるという。 $\text{Sp}(\text{ad} a)$ については

$$\text{Sp}(\text{ad} a) \subseteq \text{Sp}(a) - \text{Sp}(a) = \{ \lambda - \mu : \lambda, \mu \in \text{Sp}(a) \}$$

なる関係を見ることが出来る。

補題 B を C^* -代数, A をその部分 C^* -代数とし, $a \in B$ の要素で $\text{ad} a$ が A を不変にするようなものであるとする。

このとき $\text{ad} a|_A$ が $*$ 微分, 即ち $*$ を保存する微分であるための

必要十分条件は B の自己共役な要素 h が存在して

$$\text{ad} a|_A = i \text{ad} h|_A$$

となることである。

定理 (i) C^* -代数 A の要素 a に対して, $\text{Ad} \exp a = \exp \text{ad} a$.

(ii) C^* -代数 A の要素 a が負の半軸を含まない半平面に含まれていれば

$$\text{Log } \text{Ad } a = \text{ad } \text{Log } a.$$

但し Log は複素平面から負の半軸を除いた領域への $\log$ の解析接続である.

証明 (i) $p(t) = \text{Ad } \exp t a, -\infty < t < \infty$

とおくと $\{p(t)\}$ は metrical に連続な一径数群をなし, その生成作用素は直接の計算から $\text{ad } a$ であることがわかり,

$$\text{Ad } \exp t a = p(t) = \exp t \text{ad } a.$$

(ii) 適当に実数 θ を選べば, $b = \theta I + \text{Log } a$ とおくと

$$S_p(b) \subseteq \{\lambda : |\text{Im } \lambda| < \frac{\pi}{2}\}$$

であるように出来て, $\exp b = e^{i\theta} a$. 従って (i) から

$$\text{Ad } a = \text{Ad } e^{i\theta} a = \text{Ad } \exp b = \exp \text{ad } b = \exp \text{ad } \text{Log } a.$$

いま $\mathfrak{o}$ を $\text{ad } b$ と恒等写像とが生成した $\mathfrak{L}(A)$ の内部分代数とすると Lorch の定理から

$$\text{Log } \text{Ad } a = \text{ad } \text{Log } a + 2\pi i \sum_j n_j j_v.$$

ここに j_v は中等要素 $\neq 0$, n_j は整数である. 従って $\mathfrak{o}$ の任意の乗法的な線型汎函数 f に対して

$$f(\text{Log } \text{Ad } a) = f(\text{ad } \text{Log } a) + 2\pi i \sum_j n_j f(j_v).$$

一方,

$$S_p(\text{Log } \text{Ad } a) \subseteq \{\lambda : |\text{Im } \lambda| < \pi\},$$

$$S_p(\text{ad } \text{Log } a) = S_p(\text{ad } b) \subseteq \{\lambda : |\text{Im } \lambda| < \pi\}$$

であるから $f(j_v) = 0$ でなければならぬ. 従って j_v は $\mathfrak{o}$ の

根基に入ることになり, 結局 $w_0 = 0$ でなければならない.

故に

$$\text{Log } \text{Ad } a = \text{ad } \text{Log } a$$

である. 証了.

次定理は上の定理のオーの応用である:

Gardner の定理 [2] S は C^* -代数 A の閉部分空間であるとし, A の要素 a の spectrum は負の半軸を含まない半平面に含まれていて, $\text{Ad } a$ は S を不変にしているとする. このとき $\text{ad } \text{Log } a$ 及び $\text{Ad}(\exp t \text{Log } a)$ は S を不変にする.

又オーの応用として次の定理も示される:

定理 A を C^* -代数 B の部分 C^* -代数で, 単位をもち性質 (D) をもつものとする. B の正則な要素 a の spectrum が負の半軸を含まない半平面に含まれ, 且 $\text{Ad } a$ が A を不変にしているならば, $\text{Ad } a|_A$ は A の内部自己同型写像である.

証明. A は性質 (D) をもつから, A の要素 b が

$$\text{ad } \text{Log } a|_A = \text{ad } b$$

を満たしつつ存在するが, $c = \exp b$ とおけば

$$\text{Ad } a|_A = \exp \text{ad } b = \exp \text{ad } \text{Log } c = \text{Ad } c$$

であるから $\text{Ad } a|_A$ は A の内部自己同型写像である. 証了.

§3. 自己共役な同型写像と正值自己同型写像.

C^* -代数 A から C^* -代数 B の上への同型写像 p に対して,

$$p^*(y) = (p^{-1}(y))^* \text{ for } y \in B$$

は B から A の上への同型写像になることはいうまでもないが、これを p に共役な同型写像と呼ぶ。そして特に $B=A$ で、 p が A の自己同型写像であるとき、 $p^*=p$ ならば p は自己共役であるという。 $(p^*)^{-1}=(p^{-1})^*$, $p^{**}=p$ や $\|p^*\|=\|p\|$ などはすぐにわかる。又写像 $p \rightarrow p^*$ は metrical に連続であることが

$$\|p^* - q^*\| \leq \|p^{-1}\| \|p - q\| \|q^{-1}\|$$

からわかる。更に p が $*$ 同型写像であることと、 p^*p ^{及び pp^*} が共に恒等写像であることは同値である。

補題. A を C^* -代数 B の部分 C^* -代数とし、 $a \in B$ の正則な要素で、 $Aa|A$ が A の自己同型写像であるようなものとする。 このとき $Aa^*|A$ も A の自己同型写像で、

$$(Aa|A)^* = Aa^*|A.$$

さて C^* -代数 A の自己共役な自己同型写像 p が正の spectrum をもつとき、 p は正值であるという。

補題. A は C^* -代数 B の部分 C^* -代数で単位を含みかつ性質 (D) をもつものとし、 a は B の正で正則な要素で、 Aa が A を不変にしているようなものとする。 このとき A の正で正則な要素 b で、 $Aa|A = ab$ を満たすものがあり、従って又

$A \ni a \mapsto A$ は A の正值自己同型写像である。

§4. 主定理の証明.

次に我々は C^* -代数の同型写像の絶対値と, 自己同型写像の平方根を定義する.

定理 (i) φ が C^* -代数 A から C^* -代数 B 上への同型写像ならば, $\varphi^* \varphi$ は A の正值自己同型写像であり, A の正值自己同型写像 σ で $\sigma^2 = \varphi^* \varphi$ を満たすものが一意に存在する. この σ を $|\varphi|$ と書くことにする.

(ii) φ が C^* -代数 A の自己同型写像ならば, φ が正值であることと, $\varphi = |\varphi|$ であることが同値であり, 特に A が性質 (D) をもっていれば φ が正の正則な要素で定義された内部自己同型写像であることも同値である. そしてこのときには A の正值自己同型写像 τ で $\tau^2 = \varphi$ を満たすものが一意に存在する. この τ を $\sqrt{\varphi}$ と書くことにする.

証明. (i) $\varphi^* = \Phi_B^{-1} (A \ni s^* \mapsto \Phi(A)s) \Phi_A$
であるから

$$\varphi^* \varphi = \Phi_B^{-1} (A \ni s^* s \mapsto \Phi(A)s) \Phi_A.$$

これは勿論正值. Gårdner の定理から $\sigma = A \ni s \mapsto \Phi(A)s$ は $\Phi(A)$ の自己同型写像で正值, 且 $\sigma^2 = \varphi^* \varphi$.

いま $\sigma'^2 = \varphi^* \varphi = \sigma^2$ とすれば, $S_p(\sigma), S_p(\sigma')$ は共に正だか

ら

$$\delta' = 2 \times \frac{1}{2} \log p^* p = \delta.$$

(ii) については省く、証了。

さて主定理を示す為に^{むしろ}十分の用意が出来た：

主定理の証明. $\phi = |p|$ は A の正值自己同型写像である、又 $\mu = p\phi^{-1}$ については

$$\mu^* \mu = \phi^{-1} p^* p \phi^{-1} = \phi^{-1} \phi^2 \phi^{-1} = \text{"恒等写像"},$$

$$\mu \mu^* = p \phi^{-2} \phi^* = p p^{-1} (p^*)^{-1} p^* = \text{"恒等写像"}$$

であるから、それは A から B への $*$ 同型写像である、次に

$$p = \mu' \phi' \text{ とすれば } \phi' = \mu'^{-1} p \text{ だから } \phi'^* = p^* \mu' \text{ で}$$

$$\phi' = \sqrt{\phi'^* \phi'} = \sqrt{p^* \mu' \mu'^{-1} p} = \sqrt{p^* p} = \phi.$$

従って又 $\mu' = p \phi' = p \phi = \mu$.

更に、spectrum の連続性と 2nd resolvent equation を利用することにより写像 $p \rightarrow \sqrt{p}$ が連続であることがわかり、従って更に $p \rightarrow \phi = |p|$ 及び $p \rightarrow \mu = p\phi^{-1}$ が連続であることがわかる、証了。

References

1. G. A. Elliott, On derivations of AW^* -algebras,
To appear.
2. L. T. Gardner, On isomorphisms of C^* -algebras,
Amer. J. Math. 87 (1965), 384-396.
3. R. V. Kadison, Derivations of operator algebras,
Ann. Math. 83 (1966), 280-293.
4. T. Okayasu, A structure theorem of auto-
morphisms of von Neumann algebras, Tohoku Math.
J. 20 (1968), 199-206.
5. S. Sakai, Derivations of W^* -algebras, Ann.
Math. 83 (1966), 273-279.
6. S. Sakai, Derivations of simple C^* -algebras,
J. Functional Analysis 2 (1968), 202-206.