

# 直交群 $O(3, 2)$ 上の一般化球関数および関連する局所ゼータ積分

東京大学数理科学 森山 知則  
(Tomonori Moriyama)

§0. 概要 村瀬 篤氏と菅野 孝史氏は直交群上の Rankin-Selberg convolution で定義されるゼータ積分  $Z_{F,f}(s)$  を導入した [MS-1]. ここで  $F$  および  $f$  はそれぞれサイズ  $(m+1), m$  の直交群上の保型形式である。適当な条件下で,  $Z_{F,f}(s)$  は無限成分  $Z_{F,f}^{(\infty)}(s)$  と有限成分  $Z_{F,f}^{(f)}(s)$  との積に分解し,  $Z_{F,f}^{(f)}(s)$  は  $F$  の standard  $L$ -関数と  $f$  のそれとの商を表す。さらに,  $Z_{F,f}^{(\infty)}(s)$  は実直交群上のある種の一般化された球関数 ("実新谷関数") の積分変換で書ける。ここでは, 特別な場合 ( $m=4$  で,  $F$  と  $f$  が無限素点で生成する表現等も限定する) に行った,  $Z_{F,f}^{(\infty)}(s)$  の計算について報告する。§1, 2 で [MS-1], [MS-2] から必要な部分を要約し, §3 で我々の結果を述べる。

## §1. 記号と状況設定

まず, この節では直交群に関する記号等を準備する。

(1.1) 直交群.  $S = {}^t S \in M(m+1, \mathbb{Z})$  を  $(m+1)$ -次の even-integral な非退化対称行列で, その左上の  $m \times m$  部分を  $S_0$  と書いてこれも非退化であるとする (あとで,  $m=4$ ,  $S_0$  の符号を  $(3+, 1-)$  とするのであるが, 話を見えやすくするために一般的に書いておく)。すると,

$$S = \begin{bmatrix} S_0 & -S_0 \alpha \\ -{}^t \alpha S_0 & -2a \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{Q}^m, \quad a \in \mathbb{Z},$$

と書ける。また,

$$S_1 := \begin{bmatrix} & 1 \\ S & \\ 1 & \end{bmatrix} \in M(m+2, \mathbb{Z}),$$

とおく。こうして, 3つの  $\mathbb{Q}$  上の quadratic vector space  $(V_0 = \mathbb{Q}^m, S_0)$ ,  $(V = \mathbb{Q}^{m+1}, S)$ ,  $(V_1 = \mathbb{Q}^{m+2}, S_1)$ , ができる。これらのあいだの等長的な埋め込み  $V_0 \xrightarrow{j_0} V \xrightarrow{j} V_1$  を次のように決める:

$$j_0(x) := \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad j\left(\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} -az - S_0(\alpha, y) \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

すると,

$$V_1 = V \hat{\oplus} \mathbb{Q} \cdot \eta, \quad \eta := \begin{bmatrix} a \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \in V_1; \quad V = V_0 \hat{\oplus} \mathbb{Q} \cdot \xi, \quad \xi := \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \in V;$$

となっている。\$S\_0, S, S\_1\$ についての直交群たちを, それぞれ \$G\_0 := O(S\_0), G = O(S), G\_1 = O(S\_1)\$ と書こう。これらの直交群の間の埋め込み \$G \xrightarrow{\iota\_0} G \xrightarrow{\iota} G\_1\$ を,

$$\begin{aligned}\iota_0(g_0)(j_0(x) + t\xi) &:= j_0(g_0x) + t\xi, & g_0 \in G_0, x \in V_0, t \in \mathbb{G}_m, \\ \iota(g)(j(x) + t\eta) &:= j(gx) + t\eta, & g \in G, x \in V, t \in \mathbb{G}_m,\end{aligned}$$

で決める。明らかに, \$G\_0\$ (resp. \$G\$) は, \$\xi\$ (resp. \$\eta\$) の \$G\$ (resp. \$G\_1\$) での固定化部分群になっている。一般性を損なうことなしに,

$$\Delta := S_1[\eta] = -S[\xi] > 0$$

としてよいので, そのようにする。

(1.2) \$G\_1\$ の極大放物型部分群 \$P\_1\$. 後で \$G\_1\$ 上の Eisenstein 級数を構成するために, \$G\_1\$ の極大放物型部分群

$$P_1 := \left\{ p_1 = \begin{bmatrix} \alpha(p_1) & * & * \\ & \beta(p_1) & * \\ & & \alpha(p_1)^{-1} \end{bmatrix} \in G_1 \mid \alpha(p_1) \in \mathbb{G}_m, \beta(p_1) \in G_0 \right\}.$$

を導入しておく。\$P\_1\$ のべき単根基 \$N\_1\$ は

$$N_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ & 1_m & * \\ & & 1 \end{bmatrix} \in G_1 \right\}.$$

で与えられる。\$g\_0 \in G\_0\$ と \$\alpha \in \mathbb{G}\_m\$ に対して

$$m_1(g_0, \alpha) := \begin{bmatrix} \alpha & & \\ & 1_m & \\ & & \alpha^{-1} \end{bmatrix} \cdot \iota_0(g_0)$$

とおけば, これらの全体 \$M\_1 := \{m\_1(g\_0, \alpha) \mid g\_0 \in G\_0, \alpha \in \mathbb{G}\_m\}\$ は, \$P\_1\$ の一つの Levi 部分群になっている。

(1.3) 極大コンパクト部分群. \$\mathbb{Q}\$ の素点 \$v\$ に対して, \$G\_0\$ の \$\mathbb{Q}\_v\$-値点のなす群 \$G\_0(\mathbb{Q}\_v)\$ を \$G\_{0,v}\$ と書く。また, \$G\_{0,\infty} = G\_0(\mathbb{R})\$ の Lie 代数を \$\mathfrak{g}\_0\$ と書く。同様の記号法を \$G\$ と \$G\_1\$ に対しても用いる。

\$S\_0\$ の符号を \$(p+, q-)\$ とする (\$p+q=m\$)。\$\Delta > 0\$ としたので \$S\$ と \$S\_1\$ の符号は, それぞれ \$(p+, (q+1)-)\$, \$((p+1)+, (q+1)-)\$ となる。\$V\_0(\mathbb{R})\$ の擬直交基底

$$\mathcal{B}_0 = \{v_i^+, v_j^- \mid 1 \leq i \leq p+1, 1 \leq j \leq q+1\}$$

を一つ取って固定する。(すなわち, \$S\_0(v\_k^+, v\_l^+) = -S\_0(v\_k^-, v\_l^-) = \delta\_{k,l}\$, \$S\_0(v\_k^+, v\_l^-) = 0\$)。さらに

$$v_{q+1}^- := \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\xi, \quad v_{p+1}^+ := \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\eta,$$

とおけば, \$\mathcal{B}\_0 \cup \{v\_{q+1}^-\}\$ と \$\mathcal{B}\_0 \cup \{v\_{p+1}^+, v\_{q+1}^-\}\$ とがそれぞれ \$V(\mathbb{R})\$ と \$V\_1(\mathbb{R})\$ の擬直交基底を与える。この \$V\_1(\mathbb{R})\$ の基底 \$\{v\_1^+, \dots, v\_{p+1}^+, v\_1^-, \dots, v\_{q+1}^-\}\$ による \$G\_{1,\infty}\$ と

$$O(p+1, q+1) := \{g \in GL(m+2, \mathbb{R}) \mid {}^t g 1_{p+1, q+1} g = 1_{p+1, q+1}\}$$

との同一視を

$$\kappa : O(p+1, q+1) \cong G_{1,\infty}$$

と書こう。  $G_{1,\infty}$  の極大コンパクト部分群として  $K_{1,\infty} := \kappa(O(p+1) \times O(q+1))$  をとる。さらに  $G_\infty$  と  $G_{0,\infty}$  の極大コンパクト部分群として、それぞれ  $K_\infty := G_\infty \cap K_{1,\infty}$  と  $K_{0,\infty} := G_{0,\infty} \cap K_{1,\infty}$  をとる。以下  $G_1(\mathbb{A})$ ,  $G(\mathbb{A})$ ,  $G(\mathbb{A})$  上の保型形式の空間は、この極大コンパクト部分群の選択に対して定義されたものとする。

**(1.4) Hecke algebras.** 各有限素点  $p < \infty$  に対して  $G_{0,p}$  の開コンパクト部分群  $K_{0,p}$ ,  $K_{0,p}^*$  を

$$K_{0,p} := G_{0,p} \cap M_m(\mathbb{Z}_p), \quad K_{0,p}^* := \{k \in K_{0,p} \mid (k-1)S_0^{-1} \in M_m(\mathbb{Z}_p)\}.$$

で定める。  $S_0$  が  $p$  で "maximal" ならば (すなわち、  $\mathbb{Z}_p^m$  が  $S$  に関して極大な integral lattice in  $V_0 \otimes \mathbb{Q}_p$  ならば)  $K_{0,p}$  は  $G_{0,p}$  の極大コンパクト部分群である。  $G_{0,p}$  の  $K_{0,p}$  に関する Hecke algebra を  $\mathcal{H}_{0,p}$  で表す。すなわち、  $\mathcal{H}_{0,p}$  をコンパクト台を持つ局所定数関数  $\phi : G_{0,p} \rightarrow \mathbb{C}$  で、

$$\phi(u_1 g u_2) = \phi(g), \quad \forall (u_1, g, u_2) \in K_{0,p}^* \times G_{0,p} \times K_{0,p}^*$$

を満たすものの全体とし、convolution で積を入れる。  $\mathcal{H}_{0,p}$  は一般に非可換で、その中心を  $\mathcal{H}_{0,p}^+$  で表そう。また、  $K_{0,f}^* := \prod_{p < \infty} K_{0,p}^*$  とおく。ほとんどすべての  $p$  で  $K_{0,p} = K_{0,p}^*$  かつ  $\mathcal{H}_{0,p} = \mathcal{H}_{0,p}^+$  である。同様に、  $K_p, K_p^*, \mathcal{H}_p, \mathcal{H}_p^+, K_f^*, K_{1,p}, K_{1,p}^*, \mathcal{H}_{1,p}, \mathcal{H}_{1,p}^+, K_{1,f}^*$  を定める。

## § 2. ゼータ積分

前節では、3つの直交群  $G_0, G, G_1$  が出てきたが、このうち  $G_0$  と  $G_1$  の以下での役割は補助的なものである。つまり、  $G(\mathbb{A})$  の保型表現の保型的  $L$ -関数の解析的性質を、  $G_0(\mathbb{A})$  のそれに帰着して調べようというのが [MS-1,2] の目論みであろう ( $S$  が定値かつ maximal のときには、この戦略が完遂されている)。この節では、それを簡単に説明する。以下、さまざまな群の表現  $X$  に対して、その反傾表現を  $X^*$  で表す。

**(2.1)**  $\pi_0, \pi$  をそれぞれ  $G_0(\mathbb{A})$  および  $G(\mathbb{A})$  の尖点的保型表現とする。  $\pi_0$  および  $\pi$  を無限成分と有限成分に分けて、  $\pi_0 = \pi_{0,\infty} \boxtimes \pi_{0,f}$ ,  $\pi = \pi_\infty \boxtimes \pi_f$  と書く。ここで、あとの議論にとって重大な次の仮定

$$(\star) : \dim_{\mathbb{C}} \text{Hom}_{\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}, K_{0,\infty} \times K_\infty}(\pi_{0,\infty}^* \boxtimes \pi_\infty, C^\infty(G_\infty)) \leq 1$$

をおく。ただし、  $C^\infty(G(\mathbb{R}))$  には  $G_{0,\infty}$  と  $G_\infty$  がそれぞれ左移動および右移動で作用するものとする。  $\pi_{0,\infty}$  (resp.  $\pi_{0,\infty}$ ) に一意的に現れる  $K_{0,\infty}$  (resp.  $K_\infty$ ) の有限次元 (既約) 表現  $(\tau_0, W_0)$  (resp.  $(\tau, W)$ ) をとる。さらに、  $K_{1,\infty}$  の有限次元 (既約) 表現  $(\tau_1, W_1)$  と  $K_{0,\infty} (\cong O(p) \times O(q))$ -準同型  $i_{W_0} : W_0 \rightarrow W_1$  と  $(K_\infty)^0 (\cong SO(p) \times SO(q+1))$ -準同型  $i_W : W_1 \rightarrow W$  をとる。ただし、  $i_W \circ i_{W_0}$  は zero でないものとする (そうでないと、後述のゼータ積分も zero になってしまうので)。これらは、次の (a), (b) を満足するものとする：

(a) :  $\tau_1(\kappa(\text{diag}(1_p, -1, 1_q, -1)))$  の  $i_{W_0}(W_0)$  への制限は自明である；

$$(b) : \tau_1(\kappa(\text{diag}(1_{p-1}, r_\theta, 1_{q+1}))) = \text{id}_{W_1} \quad \forall r_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

(2.2)Eisenstein-級数.  $f$  を  $\pi_{0,\infty}^*$  に属す  $W_0$ -値の尖点的保型形式とする。言い換えると,  $(g_0, K_{0,\infty})$ -準同型  $\pi_{0,\infty}^* \hookrightarrow \mathcal{A}^{cusp}(G_0(\mathbb{Q}) \backslash G_0(\mathbb{A}))$  の  $K_{0,\infty}$ -埋め込み  $W_0^* \hookrightarrow \pi_{0,\infty}^*$  による引き戻し

$$W_0^* \hookrightarrow \pi_{0,\infty}^* \hookrightarrow \mathcal{A}^{cusp}(G_0(\mathbb{Q}) \backslash G_0(\mathbb{A}))$$

を考える。ここで,  $\mathcal{A}^{cusp}(G_0(\mathbb{Q}) \backslash G_0(\mathbb{A}))$  は  $G_0(\mathbb{A})$ -上の尖点的保型形式の空間とする。Eisenstein-級数を定義するために, まず, "holomorphic section"  $\Psi(f, s; g_1)$  を

$$\Psi(f, s; g_1) := \tau_1(k_{1,\infty}(g_1)^{-1})i_{W_0}(f(\beta(g_1)))|\alpha(g_1)|^s, \quad (s \in \mathbb{C}, g_1 \in G_1(\mathbb{A}))$$

$$g_1 = m_1(\beta(g_1), \alpha(g_1))n_1(g_1)k_{1,\infty}(g_1)k_{1,f}^*(g_1)$$

$$m_1(\beta(g_1), \alpha(g_1)) \in M_1(\mathbb{A}), \quad n_1(g_1) \in N_1(\mathbb{A}),$$

$$k_{1,\infty}(g_1) \in K_{1,\infty}, \quad k_{1,f}^*(g_1) \in K_{1,f}^*$$

で定義する。ここで  $\Psi(f, s; g_1)$  の定義が  $g_1$  の分解によらないことは, (2.1)(a) によって保証される。この  $\Psi(f, s; g_1)$  を用いて,  $W_1$ -値の Eisenstein-級数

$$E(f, s; g_1) : \left\{ s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \frac{m}{2} \right\} \times G_1(\mathbb{A}) \rightarrow W_1$$

が

$$E(f, s; g_1) := \sum_{\gamma \in P_1(\mathbb{Q}) \backslash G_1(\mathbb{Q})} \Psi(f, s + \frac{m}{2}; \gamma_1 g_1)$$

で定義される。 $E_1(f, s; g_1)$  は全  $s$ -平面に有理型に解析接続され, 極以外では  $G_1(\mathbb{A})$  上の保型形式を定める (cf. [MW, II.1.5, IV.1])。

(2.3)ゼータ積分.  $F$  を  $W^*$ -値の  $\pi_\infty$  に属す尖点的保型形式とする:

$$F : W \hookrightarrow \pi_\infty \hookrightarrow \mathcal{A}^{cusp}(G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})).$$

本稿では, 次のような  $F(g)$  と  $E(f, s; g_1)$  の Rankin-Selberg convolution

$$Z_{F,f}(s) := \int_{G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})} \langle E(f, s - \frac{1}{2}; g), i_W^*(F(g)) \rangle dg$$

で定義されるゼータ積分を考える。ここで  $\langle, \rangle$  は  $W_1$  と  $W_1^*$  との間の標準的な pairing を表すものとする。

(2.4) 大域的新谷関数と基本等式. 上のベクトル値尖点的保型形式,  $F$  および  $f$  によって

$$W_0^* \boxtimes W \hookrightarrow \mathcal{A}^{cusp}(G_0(\mathbb{Q}) \backslash G_0(\mathbb{A})) \boxtimes \mathcal{A}^{cusp}(G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}))$$

が定まる。これと

$$\mathcal{P} : \mathcal{A}^{cusp}(G_0(\mathbb{Q}) \backslash G_0(\mathbb{A})) \boxtimes \mathcal{A}^{cusp}(G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})) \longrightarrow C^\infty(G(\mathbb{A}))$$

$$\mathcal{P}(\phi_1 \otimes \phi_2)(g) := \int_{G_0(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} \phi_1(g_0)\phi_2(g_0 g) dg_0 \quad (g \in G(\mathbb{A}))$$

とを合成して,  $C^\infty(G(\mathbb{A})) \otimes W_0 \otimes W^*$  の元を得る。この  $G(\mathbb{A})$  上の  $W_0 \otimes W^*$ -値関数を  $(F, f)$  に付随する大域的新谷関数と呼んで  $W_{F,f}(g)$  であらわす。もし,  $W_{F,f}$  が  $G(\mathbb{A})$  上恒等的に zero でないならば 条件 (★) の下で

$$W_{F,f}(g_\infty g_f) = W_{F,f}^{(\infty)}(g_\infty) W_{F,f}^{(f)}(g_f), \quad (g_\infty, g_f) \in G(\mathbb{R}) \times G(\mathbb{A}_f),$$

と分解する（結果的に (★) において等号が成立する）。次の Proposition (Basic Identity) は、通常の unfolding technique で示される (cf. [MS-1, Theorem (1.5)])。

**Proposition.**

$$Z_{F,f}(s) = \int_{G_0(\mathbb{A}) \backslash G(\mathbb{A})} \epsilon_1 \circ (i_{W_0} \boxtimes (\tau_1^*(k_{1,\infty}) \circ i_W^*)) W_{F,f}(\beta(g)^{-1}g) |\alpha(g)|_{\mathbb{A}}^{s+(m-1)/2} dg.$$

ここで、 $\epsilon_1 : W_1 \otimes W_1^* \rightarrow \mathbb{C}$  は  $W_1$  と  $W_1^*$  の間の自然な pairing が引き起す  $\mathbb{C}$ -線型写像である。

さて、上述のように  $W_{F,f} = W_{F,f}^{(\infty)} W_{F,f}^{(f)}$  と分解しているときには、 $Z_{F,f}(s)$  も

$$Z_{F,f}(s) = Z_{F,f}^{(\infty)}(s) Z_{F,f}^{(f)}(s)$$

$$Z_{F,f}^{(\infty)}(s) := \int_{G_0(\mathbb{R}) \backslash G(\mathbb{R})} \epsilon_1 \circ (i_{W_0} \boxtimes \tau_1^*(k_{1,\infty}) \circ i_W^*) W_{F,f}^{(\infty)}(\beta(g_\infty)^{-1}g_\infty) \times |\alpha(g_\infty)|_{\infty}^{s+(m-1)/2} dg_\infty.$$

$$Z_{F,f}^{(f)}(s) := \int_{G_0(\mathbb{A}_f) \backslash G(\mathbb{A}_f)} W_{F,f}^{(f)}(\beta(g_f)^{-1}g_f) |\alpha(g_f)|_{\mathbb{A}_f}^{s+(m-1)/2} dg_f,$$

と分解する。

**(2.5)  $Z_{F,f}^{(f)}(s)$  と standard  $L$ -関数.**  $S$  および  $S_0$  が "maximal" で、 $F$  (resp.  $f$ ) が  $\otimes'_{p<\infty} \mathcal{H}_p$  (resp.  $\otimes'_{p<\infty} \mathcal{H}_{0,p}$ )-eigen form であるとする。このとき

$$Z_{F,f}^{(f)}(s) = \frac{L(F, s)}{L(f, s + 1/2)} \begin{cases} 1, & m \equiv 0 \pmod{2}, \\ \zeta(2s)^{-1}, & m \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases}$$

となる (cf. [MS-2, Theorem (2.11)]). ここで、 $L(F, s) = \prod_{p<\infty} L_p(F, s)$  は  $F$  の standard  $L$ -関数である（「分岐」素点  $p$  での  $L_p(F, s)$  の定義は [MS-2, §1.4] 参照）。 $L(f, s)$  も同様。したがって、 $Z_{F,f}^{(\infty)}(s)$  は  $\pi_\infty, \pi_{0,\infty}$  から定まるべき  $\Gamma$ -因子と関係するはずである（現状では、「関係する」という甚だ曖昧な述べ方しかできないが）。次節で  $Z_{F,f}^{(\infty)}(s)$  の計算例を述べる。

### § 3. ゼータ 積分の archimedean part の計算

**(3.1) 積分の変形.** 今しばらく、 $(p, q)$  を一般としておく。ただし  $q > 0$  とする。 $q > 0$  のときには、

$$G_0(\mathbb{R}) \backslash G(\mathbb{R}) \cong G_0(\mathbb{R})^0 \backslash G(\mathbb{R})^0$$

であるから、局所ゼータ積分  $Z_{F,f}^{(\infty)}(s)$  の積分域を  $G_0(\mathbb{R})^0 \backslash G(\mathbb{R})^0$  にとりかえてよい。 $G(\mathbb{R})^0 \cong SO_0(p, q+1)$  のベクトル部分群  $A$  を、

$$A := \left\{ a_t := \kappa \left( \left[ \begin{array}{cc|cc} 1_{p-1} & & & \\ & \text{ch } 2t & & -\text{sh } 2t \\ & & 1 & \\ \hline & -\text{sh } 2t & & 1_q \\ & & & \text{ch } 2t \end{array} \right] \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

で定義すれば  $G(\mathbb{R})^0 = G_0(\mathbb{R})^0 AK_\infty^0$  となる。この分解に応じて  $G(\mathbb{R})^0$  の不変測度を分解してやることで (cf. [Fj, Theorem (2.6)])

$$Z_{F,f}^{(\infty)}(s) = \int_0^\infty dt \int_{K_\infty^0} dk \epsilon_1 \circ (i_{W_0} \otimes \tau_1^*(k_{1,\infty}(a_t k)) \circ i_{W^*}) \\ \times W_{F,f}^{(\infty)}(\beta(a_t k)^{-1} a_t k) |\alpha(a_t k)|_\infty^{s+(m-1)/2} (\text{sh } 2t)^{p-1} (\text{ch } 2t)^q,$$

となる。 $a_t$  は

$$a_t = m_1(1_m, \frac{1}{\text{ch } 2t}) n_1 \kappa \left( \left[ \begin{array}{c|c} 1_{p-1} & \\ \hline & u \\ \hline & 1_{q+1} \end{array} \right] \right), \quad (n_1, u) \in N_1(\mathbb{R}) \times SO(2)$$

と  $G_1(\mathbb{R})$  の中で Iwasawa 分解される。これより, さらに

$$Z_{F,f}^{(\infty)}(s) = \int_0^\infty dt \int_{K_\infty^0} dk \epsilon_1 \circ (i_{W_0} \otimes \tau_1^*(k_{1,\infty}(a_t) k) \circ i_{W^*}) \\ \times \tau^*(k^{-1}) W_{F,f}^{(\infty)}(a_t) (\text{ch } 2t)^{-s-(m-1)/2} (\text{sh } 2t)^{p-1} (\text{ch } 2t)^q,$$

と変形できる。最後に,  $i_W$  が  $K_\infty^0$ -準同型であることと条件 (b) を用いると

$$Z_{F,f}^{(\infty)}(s) = \int_0^\infty \epsilon_1 \circ (i_{W_0} \otimes i_{W^*}) W_{F,f}^{(\infty)}(a_t) (\text{sh } 2t)^{p-1} (\text{ch } 2t)^{-s-(p-q-1)/2} dt,$$

を得る。

**(3.2) 実新谷関数.** したがって,  $Z_{F,f}^{(\infty)}(s)$  を計算するには,  $W_{F,f}^{(\infty)}(a_t)$  の明示形が分かれば良い。さて,  $W_{F,f}^{(\infty)}$  は, ある  $\Phi \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}, K_{0,\infty} \times K_\infty}(\pi_{0,\infty}^* \boxtimes \pi_\infty, C^\infty(G_\infty))$  の  $W_0^* \boxtimes W \hookrightarrow H_{\pi_0}^* \boxtimes H_\pi$  による引き戻しとして得られることに注意する。ここで,  $\pi_{0,\infty}^*$  および  $\pi_\infty$  の表現空間をそれぞれ  $H_{\pi_0}^*, H_\pi$  で表した。 $\Phi$  が尖点保型形式の空間を経由するか否かは別にして, とにかくこのようにして得られる,  $G_\infty$  上の  $W_0 \otimes W^*$ -値のある種の球関数  $W^{(\infty)}(g_\infty)$  を 実新谷関数 と呼ぶことにしよう。[Ha],[Mo-1],[Mo-2] では, それぞれ  $(p, q) = (2, 3), (2, 2), (3, 1)$  の場合にいくつかの系列の  $\pi_\infty, \pi_{0,\infty}$  に対してこれが計算されている。

$W^{(\infty)}(a_t)$  の計算方法について簡単に説明する。 $\Phi$  は,

$$\tilde{\Phi} : H_\pi \rightarrow \text{Hom}_{\mathfrak{g}_0, K_{0,\infty}}(\pi_{0,\infty}^*, C^\infty(G(\mathbb{R})))$$

なる  $(\mathfrak{g}, K_\infty)$ -準同型を定める。 $W$  の基底  $\{w_k\}_k$  と  $H_{\pi_0} = (H_{\pi_0}^*)^*$  の基底  $\{v_i\}_{i \in I}$  をとってやると,

$$\tilde{\Phi}(w_k)(g_\infty) = \sum_{i \in I} \phi_{i,k}(g_\infty) \otimes v_i, \quad \phi_{i,k} \in C^\infty(G_\infty), g_\infty \in G_\infty$$

と (記号的に) 書ける。Casimir 作用素と Schmid 作用素により  $\phi_{i,k}(g_\infty)$  たちの満たす差分-微分方程式系ができる。それを解くことで  $W^{(\infty)}(a_t)$  の明示公式が求まる。

**(3.3)  $\pi_\infty, (\tau, W)$  のとり方.** 以下,  $(p, q) = (3, 1)$  とする。 $G_{0,\infty}$  (resp.  $G_\infty$ ) の既約許容表現  $\pi_{0,\infty}$  (resp.  $\pi_\infty$ ) とその部分  $K_{0,\infty}$  (resp.  $K_\infty$ )-表現  $(\tau_0, W_0), (\tau, W)$  を (2.1) の (★), (a), (b) を満たすようにとらねばならない。

まず  $(\pi_+, H_{\pi,+}) = \pi(\lambda, \nu_J)$  ( $\lambda \in \mathbb{Z}, \lambda \geq 2, \nu_J \in \mathbb{C}$ ) を  $G_\infty^0 \cong SO_0(3, 2)$  の長い単純ルートに対応した放物部分群  $P = LN$  より誘導した一般化主系列表現とする。ただし,  $P$  の Levi 部分群  $L$  は  $\mathbb{R}_{>0} \times SL(2, \mathbb{R})$  に同型で  $\nu_J$  は  $\mathbb{R}_{>0}$  の quasi-character のパラメータ,  $\lambda$  は  $SL(2, \mathbb{R})$  の (正則) 離散系列の Blattner parameter である (講演では, 誤って  $L \cong \mathbb{R}_{>0} \times SO_0(2, 1)$  と述べてしまった, 訂正します。尚, 二重被覆  $Sp(2, \mathbb{R}) \rightarrow SO_0(3, 2)$  による  $L$  の引き戻しは  $\mathbb{R}^* \times SL(2, \mathbb{R})$  に同型で,  $P$  の引き戻しは  $Sp(2, \mathbb{R})$  の Jacobi 型放物部分群である)。  $\gamma := \kappa(\text{diag}(1_4, -1, 1)) \in G_{0,\infty}$  とおく。

$$H_\pi := \text{Ind}(SO_0(3, 2) \rtimes \langle \gamma \rangle \uparrow SO_0(3, 2), \pi_+) = H_{\pi,+} \oplus \pi(\gamma)H_{\pi,+},$$

とおくと

$$H_\pi|_{SO_0(3,2)} \cong \pi(\lambda, \nu_J) \oplus \pi(-\lambda, \nu_J)$$

となる。さらに,  $-1_5$  を  $H_\pi$  の上に自明に作用させて  $G_\infty \cong O(3, 2)$  の表現を得る。これを,  $\pi_\infty$  として取って,  $(\pi_\infty(\lambda, \nu_J), H_\pi)$  と書こう。  $w_+ (\neq 0) \in H_{\pi,+}$  を

$$\pi_+(\kappa(\text{diag}(1_4, r_\theta)))w_+ = \exp(\sqrt{-1}\lambda\theta)w_+, \quad r_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

で定数倍を除いて特徴づけられるベクトルとする。

$$(\tau, W) := \mathbb{C}w_+ \oplus \mathbb{C}w_-, \quad w_- := \pi_\infty(\gamma)w_+ \in H_\pi$$

で  $(\tau, W)$  を定める。

**(3.4)  $\pi_{0,\infty}, \tau_0$  のとり方.** まず  $(\pi_0, H_{\pi_0})$  ( $\nu \in \mathbb{C}$ ) を  $G_{0,\infty}^0 \cong SO_0(3, 1)$  の spherical な既約主系列表現する。ここで,  $\nu$  は 無限小指標を決めるパラメータである。  $H_{\pi_0}$  を  $\gamma$  による共役が引き起こす  $G_{0,\infty}^0$  の外部自己同型で twist したものは, もとの  $H_{\pi_0}$  に同型である。すなわち, 同型  $I: H_{\pi_0} \cong H_{\pi_0}$  が存在して

$$I \circ \pi_0(x) = \pi_0(\gamma x \gamma^{-1}) \circ I, \quad \forall x \in G_{0,\infty}^0$$

がなりたつ。よって,  $\pi_0(\gamma) := I$  とおくことで  $(\pi_0, H_{\pi_0})$  は  $G_{0,\infty}^0 \rtimes \langle \gamma \rangle$  の表現にまで延長される。さらに  $-1_4$  を自明に作用させて,  $G_{0,\infty} \cong O(3, 1)$  の表現を得る (講演の時とは, 若干変更した)。これを,  $\pi_{0,\infty}$  として取り,  $(\pi_{0,\infty}(\nu), H_{\pi_0})$  と書く。  $w_0$  を  $SO_0(3, 1)$ -spherical vector とする。必要なら,  $I$  を  $-I$  にとりかえて  $Iw_0 = w_0$  とする。そうしておいて  $(\tau_0, W_0) := \mathbb{C}w_0$  とおく。

**(3.5)  $(\tau_1, W_1), i_{W_0}, i_W$  のとり方.**  $W_1 = \mathbb{C}^2$  として, その上に  $K_{1,\infty}$  の作用  $\tau_1$  を

$$\tau_1(\kappa(\text{diag}(u_1, r_\theta)))(a, b) = (\exp(\sqrt{-1}\lambda\theta)a, \exp(-\sqrt{-1}\lambda\theta)b),$$

$$\forall u_1 \in SO(4), \forall r_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\tau_1(\gamma)(a, b) = (b, a), \quad \tau_1(\text{diag}(1_3, -1, 1_2))(a, b) = (a, b),$$

で決める。さらに  $i_{W_0}: W_0 \ni aw_0 \mapsto (a, a) \in W_1$ ,  $i_W: W_1 \ni (a, b) \mapsto aw_+ + bw_- \in W$  ( $a, b \in \mathbb{C}$ ) と定めると, 確かに  $i_{W_0}$  は  $K_{0,\infty} (\cong O(3) \times \{\pm 1\})$ -準同型で,  $i_W$  は  $(K_\infty)^0 (\cong SO(3) \times SO(2))$ -準同型であって, 条件 (a), (b) が満たされる。

(3.6) 結論. 上で選んだ,  $\pi_{0,\infty}, \pi_\infty, (\tau_0, W_0), (\tau, W), i_{W_0}, i_W$  に対して,  $W^{(\infty)}$  はある  $\phi \in C^\infty(G_\infty)$  を用いて

$$W^{(\infty)}(g_\infty) = \phi(g_\infty)w_0 \otimes w_+^* + \phi(\gamma^{-1}g_\infty\gamma)w_0 \otimes w_-^*$$

と書ける。ここで,  $w_+^*, w_-^* \in W^*$  は  $w_+, w_- \in W$  の双対基底である。  $\phi(a_t)$  は先に述べた差分-微分方程式系を解くことで求められ, 同時に我々の  $\pi_{0,\infty}, \pi_\infty$  が (★) を満たすことがいえる。  $\psi(t) := |\tanh 2t| \times \phi(a_t)$ , ( $t \in \mathbb{R}$ ) は偶関数で,  $y = (\operatorname{ch} 2t)^{-2}$  の関数と見ると

$$\left\{ y \prod_{k=1}^4 \left( y \frac{d}{dy} + \alpha_k \right) - \prod_{k=1}^4 \left( y \frac{d}{dy} - \gamma_k \right) \right\} \psi(y) = 0,$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &:= (-1)/2; & \alpha_2 &:= 0; \\ \alpha_3 &:= (-2\lambda + \nu)/4; & \alpha_4 &:= (-2\lambda - \nu)/4; \\ \gamma_1 &:= (\nu_J + \lambda + 2)/4; & \gamma_2 &:= (\nu_J + \lambda + 4)/4; \\ \gamma_3 &:= (-\nu_J + \lambda + 2)/4; & \gamma_4 &:= (-\nu_J + \lambda + 4)/4. \end{aligned}$$

なる一般超幾何微分方程式を満たす。この  $y = 1 (\Leftrightarrow t = 0)$  での特性根は  $1/2, 0, 1, 2$  である。  $\phi(a_t)$  が  $t = 0$  で滑らかでなくてはならないことを考えると, 特性根  $1/2$  に対応する解のみが適合する。 E. Nörlund [N, p.310, (2.44)] によると, それは, 定数倍を除いて

$$\psi(t) = \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \prod_{k=1}^4 \frac{\Gamma(\gamma_k - s)}{\Gamma(1 - \alpha_k - s)} \left( \frac{1}{\operatorname{ch}^2 2t} \right)^s ds,$$

なる Mellin-Barnes 型の積分で与えられる。ここで,  $\sigma \in \mathbb{R}$  は  $\sigma < \operatorname{Re}(\alpha_k)$  ( $1 \leq k \leq 4$ ) をみたすようにとる。この積分は Meijer の  $G$ -関数という特殊関数たちの一つである (cf. [Er, Ch.V]). これを (3.1) の最後の式に代入することで次の定理を得る。

**Theorem.**  $\pi_{0,\infty} := \pi_{0,\infty}(\nu)$ ,  $\pi_\infty := \pi_\infty(\lambda, \nu_J)$ ,  $(\tau_0, W_0), (\tau, W), (\tau_1, W_1), i_{W_0}, i_W$  を上の通りとする。これらから生ずる実新谷関数を  $W^{(\infty)} : G_\infty \rightarrow W_0 \otimes W^*$  と書くとき,  $W^{(\infty)}$  に付随する局所ゼータ積分  $Z^{(\infty)}(W^{(\infty)}; s)$  を

$$\begin{aligned} Z^{(\infty)}(W^{(\infty)}; s) &:= \int_{G_0(\mathbb{R}) \backslash G(\mathbb{R})} \epsilon_1 \circ (i_{W_0} \boxtimes \tau_1^*(k_{1,\infty}) \circ i_W^*) W^{(\infty)}(\beta(g_\infty)^{-1}g_\infty) \\ &\quad \times |\alpha(g_\infty)|_\infty^{s+(4-1)/2} dg_\infty, \end{aligned}$$

で定義する。すると  $C \in \mathbb{C}$  を定数として次が成立する。

$$\begin{aligned}
 & Z^{(\infty)}(W^{(\infty)}; s) \\
 &= C \times \frac{\Gamma((2s + \nu_J + \lambda - 1)/4) \Gamma((2s + \nu_J + \lambda + 1)/4)}{\Gamma((2s + 3)/4) \Gamma((2s + 1)/4)} \\
 &\quad \times \frac{\Gamma((2s - \nu_J + \lambda - 1)/4) \Gamma((2s - \nu_J + \lambda + 1)/4)}{\Gamma((2s + 2\lambda + \nu + 1)/4) \Gamma((2s + 2\lambda - \nu + 1)/4)} \\
 &= C \times \pi^{1/2} 2^{-(s+\lambda-5/2)} \\
 &\quad \times \frac{\Gamma((2s + \nu_J + \lambda - 1)/2) \Gamma((2s - \nu_J + \lambda - 1)/2)}{\Gamma((2s + 1)/2) \Gamma((2s + 2\lambda + \nu + 1)/4) \Gamma((2s + 2\lambda - \nu + 1)/4)}.
 \end{aligned}$$

(二つ目の等式は、 $\Gamma$ -関数の倍角公式  $\Gamma(s)\Gamma(s+1/2) = 2^{1-2s}\pi^{1/2}\Gamma(2s)$  による。)

注意 Tsuzuki [T2] では、[T1] の計算に基づき  $Z^{(\infty)}(W^{(\infty)}; s)$  の計算が、実階数 1 のユニタリ群に対して行われている。ここでの定式化や計算も [T2] に倣った所が多い。

#### REFERENCES

- [Er] A. ERDELYI *et. al*, *Higher Transcendental Functions, vol. I*, McGraw-Hill (1953).
- [Fj] M. FLENSTED-JENSEN, Discrete series for semisimple symmetric spaces , Ann. Math. **111** (1980), 253-311.
- [Ha] T. HAYATA, Shintani functions on  $SU(2, 2)$  , Koukyuroku. RIMS Kyoto University. **1002** (1997), 160-168. in Japanese.
- [Mo-1] T. MORIYAMA, Spherical functions with respect to the semisimple symmetric pair  $(Sp(2, \mathbb{R}), SL(2, \mathbb{R}) \times SL(2, \mathbb{R}))$  , J. Math. Sci. Univ. Tokyo. **6** (1999), 127-179.
- [Mo-2] T. MORIYAMA, Spherical functions for the semisimple symmetric pair  $(Sp(2, \mathbb{R}), SL(2, \mathbb{C}))$  , preprint (2000).
- [MS-1] A. MURASE AND T. SUGANO, Shintani function and its application to automorphic  $L$ -functions for classical groups I, the orthogonal group case , Math. Ann. **299** (1994), 17-56.
- [MS-2] A. MURASE AND T. SUGANO, On standard  $L$ -functions attached to automorphic forms on definite orthogonal groups , Nagoya Math. J. **152** (1998), 57-96.
- [MW] C. MOEGLIN AND J.-L. WALDSPRUNGER, *Spectral decomposition and Eisenstein series*, Cambridge University Press (1995).
- [N] N. E. NÖRLUND, Hypergeometric functions , Acta. Math. **94** (1955), 289-349.
- [T1] M. TSUZUKI, Real Shintani functions for a symmetric pair  $(U(n, 1), U(n-1, 1) \times U(1))$  , preprint (1996)
- [T2] M. TSUZUKI, Archimedean local zeta integrals arising from certain Rankin-Selberg integrals on real rank one unitary groups, preprint (1997)

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, THE UNIVERSITY OF TOKYO, 3-8-1 KOMABA MEGURO-KU, TOKYO 153-8914, JAPAN

*E-mail address:* moriyama@ms318uo.ms.u-tokyo.ac.jp