

On the group of pseudo-isotopies

都立大 理 郡山 彬

§ 0. 序

M を compact, C^∞ -manifold, $\partial M = \emptyset$ とする.

$\text{Diff}(M \times I) = \{g \mid g: M \times I \rightarrow M \times I \text{ } C^\infty\text{-diffeo.}\}$ とする.

group of pseudo-isotopies of M とは, $\text{Diff}(M \times I)$ の subgroup

$\mathcal{P}(M) = \{g \in \text{Diff}(M \times I) \mid g \text{ keeps } M \times \{0\} \text{ pointwise fixed.}\}$

である. $\mathcal{P}(M)$ は $(g \cdot f)(x) = g(f(x), 1)$ ($f \in \text{Diff}(M)$, $x \in M$) によって, $\text{Diff}(M)$ に自然に作用する.

2つの diffeomorphisms $f, g \in \text{Diff}(M)$ は, この作用で

equivalent の時 pseudo-isotopic と呼ぶ. $\mathcal{P}(M)$ が

connected ならば pseudo-isotopic と isotopic は一致する.

このノートで $\mathcal{P}(M)$ が C^∞ -manifold になることを示す.

§ 1. Manifold の定義

この節の詳細については Lang [4] を参照されたい.

Def. 1.1. X を linear space とする.

$E = (X, \|\cdot\|)$ が次の (i) ~ (iii) を満たすとき *normed space* と呼ぶ。

$$(i) \quad 0 \leq \|x\| < \infty, \quad \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$(ii) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$(iii) \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Def. 1.2. *complete normed space* E を *Barach space*,
内積の定義された *Barach space* E を *Hilbert space* と呼ぶ。

Def. 1.3. E, F : *topological vector spaces*

$U \subset E$: *open subset*, $f: U \rightarrow F$: *conti. map* とする。

f が *diff'ble at* $x_0 \in U$ とは、

$\exists$ *conti. linear map* $Df(x_0): E \rightarrow F$

$$\text{s.t.} \quad \lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0+y) - f(x_0) - Df(x_0)y\|}{\|y\|} = 0$$

特に U の各点で *diff'ble* のとき、 f は *diff'ble on* U と呼ぶ。

この時、各 $Df(x)$ は f の *derivative* $Df: U \rightarrow L(E, F)$ を導く。

ここに $L(E, F) = \{g \mid g: E \rightarrow F : \text{conti. linear}\}$ 。

Def. 1.4. $f: U \rightarrow F$ が *diff'ble map of class* C^1 とは、

f は *diff'ble on* U かつ、*derivative* $Df: U \rightarrow L(E, F)$ が

continuous. また、 C^1 -map $f: U \rightarrow F$ が *diff'ble map*

of class C^2 とは、 $Df: U \rightarrow L(E, F)$ が U で *diff'ble* かつ、

derivative $D^2f = D(Df): U \rightarrow L(E, L(E, F))$ が *conti.*

以下、帰納的に定義する。

(Remark: $L(E, L(E, \dots, L(E, F)) \dots)$ is canonical $\times$
 $L(E, \dots, E; F)$ と identify される.)

Def. 1.5. E : fixed Banach (Hilbert) space

$X = (X, (\mathcal{U}_i, \varphi_i))$ が次の (0) ~ (3) の条件を満たすとき X を
 Banach (Hilbert) manifold modeled on E of class C^r と
 呼ぶ.

(0) X : set

(1) $\mathcal{U}_i \subset X$: subset s.t. $X = \bigcup \mathcal{U}_i$

(2) $\varphi_i: \mathcal{U}_i \rightarrow \varphi_i(\mathcal{U}_i) \subset E$: bijection (of sets)
_{open}

かつ、任意の i, j に対して

$\varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \subset E$: open subset

(3) map $\varphi_j \varphi_i^{-1}: \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \rightarrow \varphi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j)$ は C^r -isomorphism
 for each pair of indices i, j .

(Note: X には各 $\mathcal{U}_i$ 上の open set となる topology が unique である)

§ 2. Banach manifold $\mathcal{M}_k(N, M)$ ($k=0, 1, 2, \dots$)

この節でよく知られた manifold $\mathcal{M}_k(N, M)$ について概略を
 述べる。証明は全て省略する。詳しいことは, Omeri [2] を
 参照されたい。

N : compact, C^∞ -Riemann manifold, $\dim N = n < \infty$

M : complete, C^∞ -Riemann manifold, $\partial M = \emptyset$, $\dim M = m < \infty$

夫々の tangent bundle を $T(N)$, $T(M)$ と記す。

$$T^k(N) \equiv \begin{array}{c} T(N) \times \cdots \times T(N) \\ \downarrow \\ N \end{array} : k\text{個の直積}$$

また $T(N)$ に対する unit sphere bundle $S(N)$ に対して

$$S^k(N) \equiv \begin{array}{c} S(N) \times \cdots \times S(N) \\ \downarrow \\ N \end{array} : k\text{個の直積}$$

とする。 $S^k(N)$ は compact manifold である。

C^k -map $\varphi: N \rightarrow M$ に対して $\tilde{\mathcal{A}}^k \varphi: T^k(N) \rightarrow T(M)$ を次のように定義する。 実 $x \in N$, $\varphi(x) \in M$ に対する local coordinate を夫々 $(x^1, \dots, x^n)$, $(y^1, \dots, y^m)$ とする。 この時

$$(\tilde{\mathcal{A}}^k \varphi)(x) \equiv \sum_{\substack{|a|=k \\ A=1, \dots, m}} \frac{\partial^k \varphi^A}{\partial (x^1)^{a_1} \cdots \partial (x^n)^{a_n}}(0) (dx^1)^{a_1} \otimes \cdots \otimes (dx^n)^{a_n} \otimes \frac{\partial}{\partial y^A}$$

$$= \sum_{|a|=k} \frac{\partial^k \varphi^A}{\partial (x^1)^{a_1} \cdots \partial (x^n)^{a_n}}(0) \underbrace{(dx^1)^{a_1} \otimes \cdots \otimes (dx^n)^{a_n}}_{a\text{個}}$$

今後 $\tilde{\mathcal{A}}^k \varphi$ を $S^k(N) \rightarrow T(M)$ なる map と考える。

一般に compact manifold N' , Riemann manifold M' に対して

2つの maps $\varphi, \psi: N' \rightarrow M'$ の距離を

$$\tilde{\rho}(\varphi, \psi) = \max \{ \rho(\varphi(x), \psi(x)) ; x \in N' \}$$

と定義する。 これは M' に対する距離である。

よって set $\mathcal{M}_k(N, M) \equiv \{ \varphi | \varphi: N \rightarrow M \text{ は } C^k\text{-map} \}$ の metric

ρ_k を次のように定義する。

任意の $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_k(N, M)$ に対して

$$\rho_k(\varphi, \psi) \equiv \max \{ \tilde{\rho}(\tilde{\alpha}^i \varphi, \tilde{\alpha}^i \psi); i=0, 1, \dots, k \}$$

(Note: M の Riemann metric g に対して $y \in M$ に対応する tangent vector v の長さ $\|v\|$ を $\|v\|^2 = g_y(v, v)$ によって定義すると $T(M)$ に自然に距離が入る。上の定義式に対応する $\tilde{\rho}(\tilde{\alpha}^i \varphi, \tilde{\alpha}^i \psi)$ はその意味である。)

Prop. 2.1. $\mathcal{M}_k(N, M) \equiv \{ \mathcal{M}_k(N, M), \rho_k \}$ は complete metric space である。

Prop. 2.2. $\pi: T(M) \rightarrow M$: tangent bundle とする。

任意の $\varphi \in \mathcal{M}_k(N, M)$ を fix する。

$\mathcal{I}_\varphi \equiv \{ u \in \mathcal{M}_k(N, T(M)) \mid \pi \circ u = \varphi \}$ は linear space である。

さて、 M を $T(M)$ の zero-section と同一視すると

$\varphi: N \rightarrow M$ は $\varphi: N \rightarrow T(M)$ と考えられ、linear space $\mathcal{I}_\varphi$ の 0 元となる。

Prop. 2.3. $\mathcal{I}_\varphi$ の元 u に対して norm を $\|u\|_k \equiv \rho_k(\varphi, u)$ と定義すると $\mathcal{I}_\varphi$ は Banach space となる。

今、 $\mathcal{I}_\varphi$ を φ に対応する set $\mathcal{M}_k(N, M)$ の tangent space と考え、exponential map $\tilde{\text{Exp}}_\varphi: \mathcal{I}_\varphi \rightarrow \mathcal{M}_k(N, M)$ を次のように定義する。

$$(\tilde{\text{Exp}}_\varphi u)(x) \equiv \text{Exp}_{\varphi(x)} u(x) \quad (x \in N, u \in \mathcal{I}_\varphi)$$

Prop. 2.4. $\tilde{\text{Exp}}_\varphi$ は continuous map, local 1 対 1 onto となる。

Prop. 2.5. N : compact より、各 $\varphi \in \mathcal{M}_k(N, M)$ に対して

$$\exists r = r(\varphi) > 0 \quad \text{s.t.}$$

$$D_\varphi(r) \equiv \{u \in \mathcal{T}_\varphi \mid \|u\|_k < r\} \text{ に対して}$$

$$\widetilde{\text{Exp}}_\varphi|_{D_\varphi(r)} : D_\varphi(r) \longrightarrow \exists \sqcup(\varphi) : \text{homeomorphism}$$

以上の事から次の定理が成り立つ。

Theorem 2.1. $\mathcal{M}_k(N, M)$ は Banach manifold modeled on $\mathcal{T}_\varphi$ となる。実際には Exp の smoothness から座標変換の smoothness が示され $\mathcal{M}_k(N, M)$ は C^∞ -manifold となる。

§ 3. Hilbert manifold $H^s(N, M)$

N, M は § 2 と同じとする。

$$s > \frac{n}{2} \text{ とし}$$

$$H^s(N, M) \equiv \{\varphi : N \rightarrow M \mid \varphi \text{ は } s \text{ 階迄の微分が全 } L^2 \text{ 二乗可積分}\}$$

とする。任意の $\varphi \in H^s(N, M)$ に対して

$$T_\varphi H^s(N, M) \equiv \{f \in H^s(N, TM) \mid \pi_* f = \varphi\} \text{ とおくと}$$

$T_\varphi H^s(N, M)$ は Hilbert space となる。さらに Theorem 2.1. と

同様の議論により

Theorem 3.1. $H^s(N, M)$ は Hilbert manifold である。

§ 4. closed manifold 上の C^∞ -diffeomorphisms の作る manifold.

M : compact, C^∞ -Riemann manifold, $\partial M = \emptyset$

$$C^1\mathcal{D} \equiv \{\varphi \mid \varphi : M \rightarrow M : C^1\text{-diffeomorphism}\}$$

Prop. 4.1. $C^1\mathcal{D}$ is topological group, $C^1(M, M)$ is open subset. $\mathcal{D} \subset C^1\mathcal{D}$ is Banach manifold and $\mathcal{D}$ is topological group.

今 $s > \frac{n}{2} + 1$ かつ $\mathcal{D}^s \equiv H^s(M, M) \cap C^1\mathcal{D}$ とする。

Prop. 4.2. $\mathcal{D}^s \subset H^s(M, M)$ is open subset. $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^s$ is Hilbert manifold. $\mathcal{D}^s$ is topological group.

実際 $\mathcal{D}^s = \{\varphi \in H^s(M, M) \mid \varphi \text{ is bijective and } \varphi^{-1} \in H^s(M, M)\}$ と示す。

(Note: 単位元 $e \in \mathcal{D}^s$ かつ $T_e\mathcal{D}^s = H^s(M, TM)$ とする)

Theorem 4.1. (Omori [3])

$\mathcal{D} \equiv \{\varphi \mid \varphi: M \rightarrow M: C^\infty\text{-diffeomorphism}\}$ とすると

$\mathcal{D}$ is I. L. H. manifold i.e. $\mathcal{D} = \varprojlim \mathcal{D}^s$ とする。

§ 5. Pseudo isotopies of manifolds $\mathcal{P}(M)$

M : compact, C^∞ -manifold without boundary

$N = M \times I$, $I = [0, 1]$

$\mathcal{D} \equiv \{\varphi \mid \varphi: N \rightarrow N: C^\infty\text{-diffeomorphism}\}$

$\mathcal{P}(M) \equiv \{\varphi \in \mathcal{D} \mid \varphi(x) = x \text{ for all } x \in M \times \{0\}\}$

Theorem 5.1. (Ebin and Marsden [1])

$\mathcal{P}$ is I. L. H. manifold

proof. $s > \frac{n}{2} + 1$ ($n = \dim N$)

$\mathcal{D}^s \equiv \{\eta \mid \eta: N \rightarrow N: \text{bijective } H^s\text{-map, } \eta^{-1} \in H^s\text{-map}\}$

$\tilde{N} \subset N$ is dense and $N \subset \tilde{N}$ is canonical embedding.

この時 $\mathcal{D}^s(N)$ が $H^s(N, \tilde{N})$ の submanifold であることを示せば
 よい。まず $H^s(N, \tilde{N})$ は Theorem 3.1. から Hilbert manifold
 である。 ∂N が totally geodesic submanifold であることを γ を
 $\tilde{N}$ に Riemann metric を与える。

$\forall \eta \in \mathcal{D}^s(N) \subset H^s(N, \tilde{N})$: fix

是 η の η の exponential chart を

$$\exp: U \subset T_\eta H^s(N, \tilde{N}) \rightarrow H^s(N, \tilde{N})$$

とする。

$$\mathcal{X}_\eta^s(N) \equiv \{X \in H^s(N, T\tilde{N}) \mid \tilde{\pi} \circ X = \eta \text{ and } X(x) \in T_x \partial N \text{ for all } x \in \partial N\}$$

($\tilde{\pi}: T\tilde{N} \rightarrow \tilde{N}$: projection)

$\mathcal{X}_\eta^s(N)$ は tangent bundle $H^s(N, T\tilde{N}) = TH^s(N, \tilde{N})$ の closed
 subspace、また fibre $T_\eta H^s(N, \tilde{N})$ も $H^s(N, T\tilde{N})$ の closed
 subspace であるから $\mathcal{X}_\eta^s(N)$ は closed linear subspace of
 $H^s(N, T\tilde{N})$ となる。

$U_1 \equiv U \cap \mathcal{X}_\eta^s(N)$ とし、 $\mathcal{X}_\eta^s(N)$ の orthogonal complement である
 η の neighborhood を U_2 とすると、 U_1, U_2 を適当に小さく
 とすれば $U = U_1 \times U_2$ と仮定してよい。

∂N が totally geodesic ということから

$$\exp(U_1) = \exp(U) \cap \mathcal{D}^s(N)$$

故に $\mathcal{D}^s(N)$ は submanifold、 $\mathcal{D} = \varprojlim \mathcal{D}^s(N)$ より $\mathcal{D}$ は、
 I. L. H. manifold の構造をもつ。

Theorem 5.2. $\phi(M)$ is $\mathcal{D}$ submanifold. $\square$

proof. $Z_\eta^s(N) \equiv \{X \in \mathcal{X}_\eta^s(N) \mid X(x) = 0 \text{ for all } x \in M \times \{0\}\}$
 とする. $Z_\eta^s(N)$ is $\mathcal{X}_\eta^s(N)$ closed linear subspace.

Theorem 5.1. と同様にして.

$$V_1 \equiv L_1 \cap Z_\eta^s(N), \quad L_1 = V_1 \times V_2$$

$$\exp(V_1) = \exp(L_1) \cap \phi(M)$$

とすれば $\phi(M)$ is $\mathcal{D}$ submanifold とする.

References

- [1] Ebin and Marsden : Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid.
 Ann. of Math., 92 (1970)
- [2] Omori : 無限次元多様体と変分問題. 都立大学セミナ
 ー報告, (1967).
- [3] Omori : On the group of diffeomorphisms on a compact manifold. Proc. Sym. Pure Math. Amer. Math. Soc., 15 (1970)
- [4] Lang : Introduction to Differentiable Manifolds