

# 調和関数の Fourier-Ehrenpreis 積分表示

千葉工業大学自然系 山根英司  
Hideshi YAMANE, Chiba Institute of Technology

## 1 Ehrenpreis の基本原理

$z \in \mathbb{C}^n$  の多項式  $P_1(z), \dots, P_m(z)$  を考える.  $P = (P_1, \dots, P_m)$  は  $\mathbb{C}^n$  から  $\mathbb{C}^m$  への写像を定める.

$\mathbb{R}_t^n$  の有界凸開集合  $\Omega$  において定数係数線形偏微分方程式系

$$(*) \quad P_j(D)u(t) = 0, \quad 1 \leq j \leq m, \quad t \in \Omega \subset \mathbb{R}_t^n$$

を考える. ここで,  $\mathbb{R}_t^n$  の座標を  $t = (t_1, \dots, t_n)$  とし,  $D = D_t = (D_1, \dots, D_n)$ ,  $D_j = i\partial/\partial t_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) とする. ( $D_j$  の符号は慣用と違うが, Berndtsson-Passare に倣う.)

このとき Ehrenpreis の基本原理によれば  $P^{-1}(0) = \bigcap_{j=1}^m \{z \in \mathbb{C}^n; P_j(z) = 0\}$  に台を持つ測度  $\mu_k$  が存在して

$$u(t) = \sum_k \int_{P^{-1}(0)} A_k(z, t) e^{-i\langle z, t \rangle} d\mu_k(z), \quad t \in \Omega$$

が成り立つ. ここで  $A_k$  は多項式で, 各  $z \in P^{-1}(0)$  を固定したとき,  $t$  の関数  $A_k(z, t) e^{-i\langle z, t \rangle}$  は  $(*)$  の解である.

証明は構成的でなく, Hahn-Banach の定理を用いる. (Hahn-Banach は Zorn の補題を用いて示されることに注意しよう.)

## 2 基本原理の具体的バージョン

もともと基本原理は抽象的な存在定理で, 測度  $\mu_k$  を具体的な式で書くことは出来なかった. しかし, 多変数複素解析の積分公式の発達により, 測度の代わりにカレントを用いて, 解が具体的に書けるようになった. ここでは Berndtsson-Passare の結果を紹介しよう.

まず  $\Omega \subset \mathbb{R}_t^n$  は 0 を含み, 有界かつ狭義凸で, 境界は滑らかとする.

$z \in \mathbb{C}^n$  を  $t$  に dual な変数とし,  $y = \text{Im} z \in \mathbb{R}^n$  とおく.  $\psi(y) = \sup_{t \in \Omega} \langle t, y \rangle$  を  $\Omega$  の台関数とする.

$\psi$  は 1 次斉次 ( $\psi(\lambda y) = \lambda\psi(y)$ ,  $\lambda > 0$ ) で狭義凸な関数であり,  $y \neq 0$  で滑らかである.  $y = 0$  における特異性は都合が悪いので,  $\psi$  の値を  $y = 0$  の近くで適当に修正して,  $\mathbf{R}_y^n$  全体で滑らかな狭義凸関数  $\varphi(y) > 0$  を作る.  $|y| \gg 0$  で  $\varphi \equiv \psi$  である.  $\varphi' = \text{grad}\varphi$  とおく.  $\varphi' : \Omega \rightarrow \bar{\Omega}$  かつ

$$\begin{aligned} \varphi'(y) &\in \partial\Omega & \text{if } |y| \gg 0, \\ \varphi'(y) &\in \Omega & \text{if } 0 \leq |y| \ll 1 \end{aligned}$$

となるように  $\varphi$  を作れる.

多項式の族  $\{g_{jk}(z, \zeta)\}_{j=1, \dots, m; k=1, \dots, n}$  を  $\{P_j\}$  に付随する Hefer map とする. すなわち

$$P_j(\zeta) - P_j(z) = \sum_{k=1}^n g_{jk}(z, \zeta)(\zeta_k - z_k), \quad 1 \leq j \leq m$$

とする. ( $\{g_{jk}\}$  は一意ではないが, 一組を選ぶ.)

$$g_j(z, \zeta) = \sum_k g_{jk}(z, \zeta) dz_k, \quad g(z, \zeta) = g_m \wedge \dots \wedge g_1$$

とおく.  $g$  は  $z$  の  $(m, 0)$ -形式で,  $\zeta$  をパラメータに持つ.

$P$  に関して次の 2 つの仮定をおく:

(H1):  $P : \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^m$  は complete intersection, すなわち,  $\text{codim}_{\mathbf{C}} P^{-1}(0) = m$ . 特に  $m \leq n$ .

(H2):  $P$  は準楕円型である. すなわち正数  $A, \gamma$  が存在して, 任意の  $z \in P^{-1}(0)$  に関して  $|z|^\gamma \leq A(1 + |y|)$  が成り立つ.

**定理 1 (Berndtsson-Passare)** もし  $u(t) \in C^\infty(\bar{\Omega})$  が  $\Omega$  で  $(*)$  をみたすならば, 任意の  $t \in \Omega$  に対して

$$(\#) \quad u(t) = \frac{1}{(2\pi i)^n} R(z) \cdot g(z, D_t) u(\varphi'(y)) \wedge e^{-i\langle z, t - \varphi'(y) \rangle} (2\bar{\partial}\partial\varphi(y))^{n-m}$$

が成り立つ. ここで  $R(z) = \bar{\partial}[1/P_1(z)] \wedge \dots \wedge \bar{\partial}[1/P_m(z)]$  である.

$R(z)$  はいわゆる留数カレントであり, 主値のようなものである ([2], [7]).  $P_j \neq 0$  のところで  $\bar{\partial}[1/P_j] = 0$  だから  $\text{supp } R(z) \subset P^{-1}(0)$  は明らか.  $R(z)$  は  $z$  に関する微分を含むことがあり, その場合  $te^{-i\langle z, t \rangle}$  のような項が現れる.  $A_k(z, t)$  に相当する因子が見かけ上現れないのはこれが理由である. なおこの結果は Rigat によって一般化されている.

さて、ラプラシアンの場合にこの式がどうなるか調べてみよう． $P(z) = z_1^2 + \cdots + z_n^2$ ,  $g(z, \zeta) = \sum_{k=1}^n (z_k + \zeta_k) dz_k$  より,

$$g(z, D_t)u(\varphi'(y)) = \sum_{k=1}^n \{z_k u(\varphi'(y)) + (D_k u)(\varphi'(y))\} dz_k$$

となる． $u(\varphi'(y))$  は Dirichlet 境界値 (と  $u$  の  $\Omega$  での値) であり,  $(D_k u)(\varphi'(y))$  は大体 Neumann 境界値にあたる．調和関数は Dirichlet 境界値だけで決まるから, (#) には無駄がある．Dirichlet 境界値だけを含む Fourier-Ehrenpreis 積分表示を得たい．そのような結果を, 3 変数の場合に関して, 次の節で述べる．2 変数の場合は第 5 節で述べる．

### 3 主結果

$n = 3$  とする． $\Omega = \{t \in \mathbf{R}^3; |t| < 1\}$  とすると  $\partial\Omega = S^2$  である． $V = \{z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbf{C}^3; z^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0\}$  とおく． $V$  の smooth locus  $V \setminus \{0\}$  に沿う積分のカレントを  $[V]$  と表す．( $V \setminus \{0\}$  は複素多様体だから自然な向きがある．)  $2\pi i[V] = \bar{\partial}[1/z^2] \wedge d(z^2)$  であるから,  $[V]$  による積分表示が得られれば, 留数カレント  $\bar{\partial}[1/z^2]$  による積分表示も同時に得られたことになる．

次が主結果である．

**定理 2 (山根)**  $u(t) \in C^0(\bar{\Omega})$  が  $\Omega$  で調和と仮定する． $v = u|_{\partial\Omega} \in C^0(S^2)$  を Dirichlet 境界値とする．このとき

$$u(t) = [V] \cdot \frac{1}{4\pi^2} \left(2 - \frac{1}{|y|}\right) v(y/|y|) e^{-i\langle z, t - y/|y| \rangle} (\bar{\partial}\partial|y|)^2, \quad t \in \Omega$$

が成り立つ．特に,  $u(t)$  は  $\left\{ \exp(-i\langle z, t - y/|y| \rangle) \right\}_{z^2=0, y/|y| \in \text{supp } v}$  の重ね合わせである．

### 4 証明

大雑把にいつて  $V$  に座標を入れて計算する．

まず  $z^2 = 0$  は  $|x|^2 - |y|^2 = \langle x, y \rangle = 0$  と同値である．つまり  $|x| = |y|$  で,  $x$  と  $y$  は直交する．

$y \neq 0$  を固定すれば, 対応する  $x$  の全体は  $S^1$  と微分同相である. よって  $V$  は  $\mathbf{R}_y^3 \times S_\theta^1$  にほぼ等しい. しかし本当に等しいわけではない. (そのような写像を大域的に作るには位相的障害がある.) そこで  $V$  と  $\mathbf{R}_y^3$  それぞれの稠密な開集合

$$\begin{aligned}\hat{V} &= V \setminus \{y_1 = y_2 = 0\} \subset \mathbf{C}^3, \\ E &= \mathbf{R}_y^3 \setminus \{y_1 = y_2 = 0\}\end{aligned}$$

を導入する.  $\hat{V}$  は複素多様体である (特異点がない) から自然な向きを持つ.  $E \times S_\theta^1$  には  $dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 \wedge d\theta$  で向きをつける.

$E \times S^1$  から  $\hat{V}$  への, 向きを保つ微分同相  $\Phi$  を構成しよう. そのためにまず,  $y \in E$  に対し

$$\begin{aligned}v &= v(y) = \frac{|y|}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}(-y_2, y_1, 0), \\ w &= w(y) = \frac{1}{|y|}y \times v = \frac{(-y_1y_3, -y_2y_3, y_1^2 + y_2^2)}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}\end{aligned}$$

とおく.  $\langle y, v \rangle = \langle v, w \rangle = \langle w, y \rangle = 0$  かつ  $|y| = |v| = |w|$  である.

次に  $x = x(y, \theta) = v(y) \cos \theta + w(y) \sin \theta$  とおけば当然  $\langle x, y \rangle = 0, |x| = |y|$  であり,

$$\Phi: E \times S^1 \rightarrow \hat{V}, \quad (y, \theta) \mapsto z = x(y, \theta) + iy$$

は向きを保つ微分同相となる.

$\hat{V}$  は  $V$  の稠密な開集合だから,  $[V]$  を計算するには  $E \times S^1$  上の積分を考察すればよい. 後者と  $(\mathbf{R}_y^3 \setminus \{0\}) \times S^1$  上の積分との区別を必要に応じて忘れる.

### 補題 1

$$\begin{aligned}\Phi^*(-i\langle z, t - y/|y| \rangle) &= \langle y, t \rangle - |y| - i\langle x(y, \theta), t \rangle, \\ \Phi^*((\bar{\partial}\partial|y|)^2) &= \frac{1}{2|y|}dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 \wedge d\theta\end{aligned}$$

が成り立つ.

$t \in \Omega$  より第1式の右辺の実部は  $y \neq 0$  のとき負であることに注意しよう.

第2式を証明するには特別なアイデアはいらないが, 相当の計算量を要する. 筆者は Maple を用いた.

第2式の結果がこのように簡潔になる本当の根拠は不明で、計算してみたらきれいになったとしか言えない。角度  $\theta$  の選び方が特に効いているわけではない。実際  $\{y, v, w\}$  以外の orthogonal frame を用いて角度  $\xi$  を導入したとすれば (向きは同じとする)  $\xi = \theta + \eta(y)$  なる関数  $\eta(y)$  が存在するが、明らかに  $dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 \wedge d\xi = dy_1 \wedge dy_2 \wedge dy_3 \wedge d\theta$  が成り立つ。

$E \times S^1$  上の、あるいは  $(\mathbf{R}_y^3 \setminus \{0\}) \times S^1$  上の積分を計算するために極座標を導入しよう。  $q = |y|, s = y/|y| \in S^2$  とおくと  $dy_1 dy_2 dy_3 d\theta = q^2 dq d\theta ds$  となる。まず  $q$  についての積分は Laplace 型で容易に計算できる。次に  $\theta$  について積分すると、残るのは  $s \in S^2$  に関する積分で、これが Poisson 積分に一致することが証明できる。

## 5 2変数の場合

$\Omega = \{t \in \mathbf{R}^2; |t| < 1\}$  とすると  $\partial\Omega = S^1$  である。  $V = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2; z^2 = z_1^2 + z_2^2 = 0\}$  とおく。  $V$  の smooth locus  $V \setminus \{0\}$  に沿う積分のカレントを  $[V]$  と表す。

**定理 3 (山根)**  $u(t) \in C^0(\bar{\Omega})$  が  $\Omega$  で調和と仮定する。  $v = u|_{\partial\Omega} \in C^0(S^1)$  を Dirichlet 境界値とする。このとき

$$Q[v](t) = \frac{-1}{16\pi^2} [V] \cdot v(y/|y|) e^{-i\langle z, t - y/|y| \rangle} \bar{\partial} \partial |y|$$

とおけば、任意の  $t \in \Omega$  に対して  $u(t) = 2Q[v](t) - Q[v](0)$  が成り立つ。

## 6 $n$ 変数への一般化をめざして

$n$  変数調和関数の場合に同様の公式は今のところ得られていない。

Berndtsson-Passare の式と同様に、筆者の式も、背景には多変数複素解析の積分公式があると予想される。その積分公式を  $n$  変数で定式化できれば、調和関数の Fourier-Ehrenpreis 積分表示はすぐに求められると思う。

最後に、和田-森本の公式を簡単に紹介しよう。

$z \in \mathbf{C}^{d+1}$  に対し、  $z = x + iy$  とおくと、

$$N = \{z; z_1^2 + \cdots + z_{d+1}^2 = 0, |x| = |y| = 1\}$$

と定めると,  $N$  は規準的な測度  $dN$  を持つ. もし  $f(z)$  が (複素) 調和関数, すなわち  $(\partial^2/\partial z_1^2 + \cdots + \partial^2/\partial z_{d+1}^2)f(z) = 0$  ならば,

$$f(z) = \int_N f(\rho z'/2) \frac{1 + \bar{z}' \cdot (z/\rho)}{\{1 - \bar{z}' \cdot (z/\rho)\}^d} dN(z')$$

が成り立つ. ここで  $\rho$  は適当な正定数.

$N \subset \{z \in \mathbf{C}^{d+1}; z_1^2 + \cdots + z_{d+1}^2 = 0\}$  だから基本原理と関係があるかも知れないが, 指数関数とどう結びつくのかは明らかでない. また, 右辺は  $\frac{\rho}{2}N = \{\rho z/2; z \in N\}$  上での  $f$  の値で書けているが,  $\frac{\rho}{2}N \not\subset \mathbf{R}^{d+1}$  だから, 筆者の公式との関係はつきそうにない.

## References

- [1] C. A. Berenstein, R. Gay, A. Vidras and A. Yger, "*Residue currents and Bezout identities*", Birkhäuser, Basel, 1993.
- [2] B. Berndtsson and M. Passare, Integral formulas and an explicit version of the fundamental principle, *J. Funct. Anal.*, **84** (1989), 358-372.
- [3] J. E. Björk, "Rings of differential operators", North-Holland Publ. Co., Amsterdam, New York, Oxford, 1979.
- [4] N. R. Coleff and M. E. Herrera, "Les courants résiduels associés à une forme méromorphe", *Lect. Notes in Math.* **633**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.
- [5] L. Hörmander, "An introduction to complex analysis in several variables, third edition (revised)", North-Holland Publ. Co., Amsterdam, London, New York, Tokyo, 1990.
- [6] A. Meril and A. Yger, Problème de Cauchy globaux, *Bull. Soc. math. France*, **120** (1992), 87-111.
- [7] M. Passare, A calculus for meromorphic currents, *J. reine angew. Math.*, **392** (1988), 37-56.
- [8] M. Passare, Residue solutions to holomorphic Cauchy problems, "Seminar in Complex Analysis and Geometry 1987 (Rende, 1987)", EditEl, Rende, 1988, 101-105.

- [9] S. Rigat, Version explicite du principe fondamental d'Ehrenpreis-Malgrange-Palamodov dans le cas non homogène, *J. Math. Pures Appl.*, **76** (1997), 777-799.
- [10] H. Yamane, Residue currents and a Fourier integral representation of harmonic functions, preprint.
- [11] H. Yamane, Fourier integral representation of harmonic functions in terms of a current, preprint.
- [12] A. Yger, Formules de division et prolongement méromorphe, *Springer Lecture Notes in Math.*, **1295** (1987), 226-283.
- [13] R. Wada and M. Morimoto, A uniqueness set for the differential operator  $\Delta_z + \lambda^2$ , *Tokyo Journal of Math.*, **10**(1987), 93-105