

有限 Chevalley 単純群の

Schur Multiplier について

岩堀 長慶 (東大理)

§1. 序

この研究集会の主題は、有限群 G に対して、その $\mathbb{Z}$ 係数の homology, cohomology (trivial action の下での) を位相的方法で調べる由であり、それについて Chevalley 型の有限群 G に対する $H^3(G, \mathbb{Z})$ を与える R. Steinberg の研究 [3] を紹介するように依頼された。それ故、別に新しい事もなく、[3] が入手困難という訳でもないのに、わざわざ紹介を再録するのも気がひけるが、解説記事として茲に書かせて頂く次第である。

§2. universal central extension; Schur Multiplier

今、群と準同型写像よりなる exact sequence

$$(1) \quad 1 \longrightarrow K \xrightarrow{i} \tilde{G} \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 1$$

に於て、 K が $\tilde{G}$ の中心に含まれるとき、対 $(\tilde{G}, \pi)$ を G の中心拡大 (central extension) という。群 G の中心拡

大(1)が次の性質をもつとき, これを G の universal な
中心拡大 (universal central extension, 略記 u.c.e.)
という:

群 G の任意の中心拡大

$$(2) \quad 1 \longrightarrow L \xrightarrow{j} G^* \xrightarrow{p} G \longrightarrow 1$$

に対して, 準同型 $f: \tilde{G} \longrightarrow G^*$ が存在して,

$$\pi = p \circ f$$

を満たす。しかも, かかる f は一意である。

すると次の事実が容易に判る。

(1°) 群 G の u.c.e. は, 同型を除いて高々一通りしか
存在しない。

(2°) 群 G の u.c.e. が存在する為の必要十分条件は,
 G とその交換子群 $[G, G]$ が一致することである。

かくして, $G = [G, G]$ なる群に対しては, 同型を除き
u.c.e. が決る。(1)を G の一つの u.c.e. とすれば, ker-
nel K の構造は一意確定する。このアーベル群 K を, 群
 G の Schur Multiplier と呼び, $K = M(G)$ と書く。

(3°) G を有限群とし, かつ $G = [G, G]$ とすれば, $M(G)$
も有限群であって, しかも

$$M(G) \cong H^2(G, \mathbb{C}^*) \cong H^3(G, \mathbb{Z})$$

が成り立つ。(cohomology は凡て trivial action の下で考える.)

(4°) 群 G が $G = [G, G]$ を満たせば, G の u.c.e. $(\tilde{G}, \pi)$ に対しても $\tilde{G} = [\tilde{G}, \tilde{G}]$ が成り立ち, しかも $M(\tilde{G}) = 1$ である. 実は逆も成り立つ:

(5°) 群 G が $G = [G, G]$ を満たせば, G の中心拡大 $(\tilde{G}, \pi)$ が u.c.e. $\iff \tilde{G} = [\tilde{G}, \tilde{G}], M(\tilde{G}) = 1$.

§3. Chevalley 群の Schur Multiplier

今, G を体 K 上に定義された半単純代数群とし, しかも次の条件が満たされているとする:

- (a) G は K 上 split (Chevalley 型ともいう) である. 即ち, G は K 上 split するような maximal torus をもつ.
- (b) G は単連結である.

しかも, 記述を容易にする為, 次の仮定もおく:

- (c) G は単純な代数群である.

この時, G の K -rational point のなす部分群を G_K と書く. すると, $G_K \neq [G_K, G_K]$ となるのは次の4つの場合に限ることが知られている.

1. $G_K = SL(2, \mathbb{F}_2)$ ($\mathbb{F}_q$ は q 元の有限体の意)

$$\text{ロ. } G_K = SL(2, \mathbb{F}_3)$$

$$\text{ハ. } G_K = Sp(2, \mathbb{F}_2) \subset GL(4, \mathbb{F}_2)$$

$$\text{ニ. } G = (G_2) \text{ 型, } K = \mathbb{F}_2$$

従って、これら4つの場合を除けば、 $M(G_K)$ が考えられる。さて、 G_K の中心を Z_K と書くと、次の Chevalley の定理が成り立つ。

(1°) 上記4つの場合を除けば、 G_K/Z_K は単純群である (不変部分群が trivial なものに限る)。

以下、上記の4つの場合は考察から省くことにする。また $G_K \neq SL(2, K)$ とする。さて Steinberg [3] の基本定理は次の通りである：

(2°) K が有限体の代数拡大であり、しかも K 中に少なくとも5個の元があれば、

$$M(G_K) = 1, \quad M(G_K/Z_K) \cong Z_K.$$

この定理を使えば、 K が有限体 $\mathbb{F}_q$ であるとき、 $M(G_K/Z_K) \cong Z_K$ の構造は直ちに得られる。すなわち、今 G のルート系を Δ とし、 Δ の張る加群を P_0 とする。また、 G の weight 全体のなす加群を P とする。 P_0 は P の部分群で、 P/P_0 は有限アーベル群である。今、

$$P/P_0 \cong \mathbb{Z}_{e_1} \times \mathbb{Z}_{e_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{e_r}$$

を巡回群の直積への分解とすれば、

$$\mathbb{Z}_K \cong \mathbb{Z}_{(e_1, g-1)} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{(e_r, g-1)}$$

が成り立つ。

注意 1. (A_ℓ) 型 $\sim (E_8)$ 型 に対し, 組 $(e_1, \dots, e_r)$ は勿論次の如く周知である:

$$(A_\ell) \quad r=1, e_1=\ell+1; \quad (B_\ell), (C_\ell) \quad r=1, e_1=2$$

$$(D_\ell) \quad r=2, e_1=e_2=2; \quad (D_{2\ell+1}) \quad r=1, e_1=4$$

$$(G_2), (F_4), (E_8) \quad r=1, e_1=1$$

$$(E_6) \quad r=1, e_1=3$$

$$(E_7) \quad r=1, e_1=2.$$

注意 2. $K = \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_4$ に対しては, 実際 (2°) は成立しない例がある。例えば, $G_K = SL(4, \mathbb{F}_2)$ は 8 次交代群と同型で, $M(G_K) \cong \mathbb{Z}_2$ となる。Steinberg は $M(G_K) \neq 1$ なる G の type は有限個しかないと述べているが筆者はその証明を知らない。 $G_K = SL(n, K)$ の型の時の $M(G_K) \neq 1$ なる例は, 次の 5 個であることが知られている。

$$SL(2, \mathbb{F}_4), SL(2, \mathbb{F}_9), SL_3(\mathbb{F}_2), SL(3, \mathbb{F}_4), SL(4, \mathbb{F}_2).$$

注意 3. $G_K = SL(2, K)$, K は有限体の代数拡大とすると, $M(G_K) \neq 1$ となるのは, $K = \mathbb{F}_4, K = \mathbb{F}_9$ の時に限る。

注意 4. 最近 C. C. Moore, H. Matsumoto により, 一般の K に対して, $M(G_K)$ が決定された。それは, 生成系と基本関係式の形で与えるのであるが, これについては §5 でも

う一度触れる。

§4. 証明の筋道

ここでは Steinberg の証明方針のみスケッチする。まず、 G_K の良く知られた生成系 $x_\alpha(t)$ (α はルート系 Δ 上を動き、 t は体 K 上を動く。) をとると、次の関係が成り立っている：

$$(A) \quad x_\alpha(t+s) = x_\alpha(t) x_\alpha(s) \quad (\forall \alpha \in \Delta, \forall t, s \in K)$$

(B) $\alpha \in \Delta, \beta \in \Delta, \alpha + \beta \neq 0$ のとき、Chevalley の交換子関係

$$[x_\alpha(t), x_\beta(s)] = \prod x_{i\alpha+j\beta} (C_{ij\alpha\beta} t^i s^j)$$

が成り立つ。($C_{ij\alpha\beta}$ は Δ から決まる有理整数で、 K には無関係。積の順序は、例えば (i, j) の辞引順である。 i, j は次のような自然数上を動く： $i\alpha + j\beta \in \Delta$ 。)

簡単のため、 $G_K \neq SL(2, K)$ とする。いま、 $t \in K^* = K - \{0\}$ に対し、

$$w_\alpha(t) = x_\alpha(t) x_{-\alpha}(-\frac{1}{t}) x_\alpha(t) \quad (\alpha \in \Delta)$$

$$h_\alpha(t) = w_\alpha(t) w_\alpha(1)^{-1} \quad (\alpha \in \Delta)$$

とおく。すると G_K において、次の関係も成り立つ：

$$(C) \quad h_\alpha(ts) = h_\alpha(t)h_\alpha(s) \quad (\forall \alpha \in \Delta, \forall t, s \in K^*).$$

Steinberg は (A) + (B) + (C) が, 生成系 $\{x_\alpha(t)\}$ に関して, G_K の基本関係になることを証明する。しかも G_K の u.c.e. を $(\tilde{G}_K, \pi)$ とするとき, $\tilde{G}_K$ は生成系 $\{\tilde{x}_\alpha(t); \alpha \in \Delta, t \in K\}$ と, 基本関係 (A) + (B) (勿論 (A), (B) で $x_\alpha(t)$ を $\tilde{x}_\alpha(t)$ で置き換えたものの意である) で与えられることを証明する。ここまでは一般の体 K でよい。最後に, K が有限体の代数拡大で, しかも K が少なくとも5個の元を持つならば, (C) が (A) + (B) から導かれることを示すのである。

生成系 $\{\tilde{x}_\alpha(t)\}$ と基本関係 (A) + (B) とで定義された群 $\tilde{G}_K$ から G_K 上への準同型 $\pi: \tilde{x}_\alpha(t) \mapsto x_\alpha(t)$ が生ずるが, $(\tilde{G}_K, \pi)$ が G_K の u.c.e. であることをいうには, 次の諸点をいえばよい: 1. $\text{Ker}(\pi) \subset \text{center of } \tilde{G}_K$; 2. universality.

これをいうには, 対応して $\tilde{w}_\alpha(t)$ ($\alpha \in \Delta, t \in K^*$) と $\tilde{h}_\alpha(t)$ ($\alpha \in \Delta, t \in K^*$) とを定義し, これらに対して, 次のような (Chevalley 群論で周知の) 関係式を, (A) + (B) から導く:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{x}_\beta(s) \tilde{w}_\alpha(t)^{-1} = \tilde{x}_{\beta'}(t^c s \cdot \eta_{\alpha,\beta}); \\ \eta_{\alpha,\beta} = \pm 1 \text{ は } K \text{ に無関係, } \beta' = w_\alpha(\beta), c = \frac{2(\beta', \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \text{ (以下同じ)} \\ \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{w}_\beta(u) \tilde{w}_\alpha(t)^{-1} = \tilde{w}_{\beta'}(\eta_{\alpha,\beta} t^c u) \\ \tilde{w}_\alpha(t) \tilde{h}_\beta(u) \tilde{w}_\alpha(t)^{-1} = \tilde{h}_{\beta'}(\eta_{\alpha,\beta} t^c u) \tilde{h}_{\beta'}(\eta_{\alpha,\beta} t^c)^{-1} \\ \tilde{h}_\alpha(t) \tilde{x}_\beta(u) \tilde{h}_\alpha(t)^{-1} = \tilde{x}_\beta(t^d u), \quad d = \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \\ \tilde{h}_\alpha(t) \tilde{w}_\beta(u) \tilde{h}_\alpha(t)^{-1} = \tilde{w}_\beta(t^d u) \\ \tilde{h}_\alpha(t) \tilde{h}_\beta(u) \tilde{h}_\alpha(t)^{-1} = \tilde{h}_\beta(t^d u) \tilde{h}_\beta(t^d)^{-1}. \end{array} \right.$$

次に、ルートに順序を入れ、正のルート系 Δ^+ を考え、
 $\{x_\alpha(t); \alpha \in \Delta^+, t \in K\}$ の生成する $\tilde{G}_K$ の部分群を $\tilde{U}$
とし、また $\{h_\alpha(t); \alpha \in \Delta, t \in K^*\}$ の生成する $\tilde{G}_K$ の部
分群を $\tilde{H}$ とする。さらに、Weyl 群 W の元 w に対して、
 $\{\alpha \in \Delta^+; w(\alpha) \in \Delta^-\}$ を $\Delta(w)$ とし、 $\{x_\alpha(t); \alpha \in \Delta(w),$
 $t \in K\}$ の生成する $\tilde{U}$ の部分群を $\tilde{U}_w$ と書く。すると、上
の諸等式から、 G_K と同様に、 $\tilde{G}_K$ の Bruhat 分解が証明さ
れる：

$$\tilde{G}_K = \bigcup_{w \in W} \tilde{U} \tilde{H} \sigma(w) \tilde{U}_w \quad (\text{disjoint union})$$

ここで、 $\sigma(w)$ は、 w を鏡映の積

$$w = w_\alpha w_\beta \cdots w_\gamma \quad (\alpha, \beta, \dots, \gamma \in \Delta)$$

に表わす方法を一つずつ定めておき,

$$\sigma(w) = \tilde{w}_\alpha(1) \tilde{w}_\beta(1) \cdots \tilde{w}_\gamma(1)$$

とおいて定めた $\tilde{G}_K$ の元である。

しかも, $\tilde{U} \tilde{h}_\gamma \sigma(w) \tilde{U}_w$ の元は,

$$u h \sigma(w) u'$$

($u \in \tilde{U}$, $h \in \tilde{h}_\gamma$, $u' \in \tilde{U}_w$) の形に一意的に書ける。しかも, π を $\tilde{U}$ 上に制限した $\pi|_{\tilde{U}}$ は単射的であることも判る。

これから, $\text{Ker}(\pi)$ が $\tilde{G}_K$ の中心に入ること, および, $[\tilde{G}_K, \tilde{G}_K] = \tilde{G}_K$ が出る。 $\tilde{G}_K$ がその交換子群と一致することから, universality における構成すべき準同型写像の一意性が得られる。最後に, G_K の中心拡大 (G^*, π^*) に対して, 準同型 $f: \tilde{G}_K \rightarrow G^*$, $\pi^* \circ f = \pi$, を構成するのであるが, それには先ず map $\sigma: \tilde{G}_K \rightarrow G^*$ をとり, $\pi^* \circ \sigma = \pi$ であり, しかも次の性質が成り立つようにする: $k, c \in K^*$ をえらんで, $c = k^2 \neq 1$ ならしめると,

$$\tilde{x}_\alpha(t) = [\tilde{h}_\alpha(k), \tilde{x}_\alpha(\frac{t}{c-1})] \quad (\forall t \in K, \forall \alpha \in \Delta)$$

が自然に成り立つのであるが, σ のえらび方の条件として,

$$\sigma(\tilde{x}_\alpha(t)) = [\sigma(\tilde{h}_\alpha(k)), \sigma(\tilde{x}_\alpha(\frac{t}{c-1}))] \quad (\forall \alpha \in \Delta, \forall t \in K)$$

が成り立つようにするのである。このような σ の存在は容易にわかる。以下, $\sigma(x_\alpha(t)) = x_\alpha^*(t)$ 達が (A) + (B) を満たすことを示すのであるが, それが [3] の主要部となる計算であって, 原著にゆずる。

§5. 基礎体 K が一般の場合

§3 で考えた G_K に対し, K が有限体の代数拡大でない
と一般には $M(G_K) \neq 1$ となる。 $M(G_K)$ の構造の決定は,
合同部分群の問題と密接に関連している ([1], [2] 参照) が,
ここでは, [1] により $M(G_K)$ の構造を概略述べよう。

§3 と同じく $\tilde{G}_K$ を考え, exact sequence

$$1 \longrightarrow M(G_K) \longrightarrow \tilde{G}_K \xrightarrow{\pi} G_K \longrightarrow 1$$

における kernel $M(G_K)$ を調べるのである。

Π をルート系 Δ の基本ルート系とする。まず,

$$b_\alpha(t, s) = \tilde{h}_\alpha(t) \tilde{h}_\alpha(s) \tilde{h}_\alpha(ts)^{-1} \quad (\alpha \in \Delta; t, s \in K^*)$$

とおくと, $b_\alpha(t, s) \in M(G_K)$ は明らかであるが, 実は,

$$\{b_\alpha(t, s); t, s \in K^*, \alpha \in \Pi\}$$

により $M(G_K)$ が生成されることがわかる。実は, 更に長い
方のルート β を一つ任意に固定すれば, 実は

$$(*) \quad \{ \phi_\beta(t, s); \quad t, s \in K^* \}$$

が $M(G_K)$ を生成することがわかる. よって $M(G_K)$ の構造を決定するには, この生成系 $(*)$ に関する群 $M(G_K)$ の基本関係式を与えればよい. 簡単の爲 $\phi_\beta(t, s) = \phi(t, s)$ とおく. すると求める基本関係式系は次の様になる. ($G = SL(2, K)$ の時を含む.)

$$(1) \quad \phi(t, s) \phi(ts, r) = \phi(t, sr) \phi(s, r) \quad (t, s, r \in K^*)$$

$$\phi(1, s) = \phi(s, 1) = 1 \quad (s \in K^*)$$

$$(2) \quad \phi(t, s) \phi(t, -\frac{1}{s}) = \phi(t, -1) \quad (t, s \in K^*)$$

$$(3) \quad \phi(t, s) = \phi(s^{-1}, t) \quad (t, s \in K^*)$$

$$(4) \quad \phi(t, s) = \phi(t, -ts) \quad (t, s \in K^*)$$

$$(5) \quad \phi(t, s) = \phi(t, (1-t)s) \quad (t, s \in K^*, t \neq 1)$$

しかも, Δ が $(C_n)_{n \geq 1}$ 型 ($(C_1) = (A_1)$ である) でない場合, 即ち $G_K \neq Sp(n, K)$ の時には, 実はもっと簡単な次の基本関係式系になる:

(1') $\phi(t, s)$ は t, s の各々について乗法的:

$$\phi(tt', s) = \phi(t, s) \phi(t', s) \quad (t, t', s \in K^*)$$

$$\phi(s, tt') = \phi(s, t) \phi(s, t')$$

$$(2') \quad \psi(t, s) = \psi(s, t^{-1}) \quad (s, t \in K^*)$$

$$(3') \quad \psi(t, -t) = 1 \quad (t \in K^*)$$

$$(4') \quad \psi(t, 1-t) = 1 \quad (t \in K^*, t \neq 1)$$

これら (1') ~ (4') は、局所体のノルム剰余記号のもつ性質である。この事実のもつ意義は、 K が局所体、代数体の時に明らかになるが、それについては [1], [2] を見られたい。

参考文献

- [1] C. C. Moore : Group extensions of p-adic and adelic linear groups, to appear in Publ. Math.
- [2] H. Matsumoto : Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simple déployés, to appear.
- [3] R. Steinberg : Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques, Colloque de Bruxelles, 1962, pp.113-127.