

力学系の最小スペクトルと応用

愛媛大学・理工 平出 耕一 (Koichi Hiraide)
Department of Mathematics, Ehime University

このノートでは、特異点を持たない力学系に対し最小スペクトルの概念を導入し、その応用として正拡大的 C^r 写像の C^r 構造安定性に関する逆問題の解決などについて述べる。

§1 最小スペクトル

X をコンパクト距離空間とし、 $f: X \rightarrow X$ を連続な全射とする。 $\pi: E \rightarrow X$ は有限次元ベクトルバンドルで $\dim E \geq 1$ とし、 $\|\cdot\|$ は Finsler 計量とする。 $F: E \rightarrow E$ をバンドル写像とし、 $f \circ \pi = \pi \circ F$ を満たすと仮定する。 また、 $F: E \rightarrow E$ は特異でないと仮定する。 すなわち、各 $x \in X$ に対し、線型写像 $F: E_x \rightarrow E_{f(x)}$ は同型とする。 ここで、 $E_x, E_{f(x)}$ はファイバーを表す。

$$S(E) = \{v \in E \mid \|v\| = 1\}$$

とし、

$$\begin{aligned}\mu_m &= \min\{\|F(v)\| \mid v \in S(E)\}, \\ \mu_M &= \max\{\|F(v)\| \mid v \in S(E)\}\end{aligned}$$

とおく。このとき、

$$0 < \mu_m \leq \mu_M < \infty.$$

任意の $v \in E$ と $n \geq 0$ に対し

$$\mu_m^n \|v\| \leq \|F^n(v)\| \leq \mu_M^n \|v\|$$

が成り立つ。与えられた $K > 1$ に対し

$$e(F, K) = \{\lambda > 0 \mid \exists v \in S(E) \text{ s.t. } \|F^n(v)\| \leq K\lambda^n \ (\forall n \geq 0)\}$$

とおく。 $\lambda \geq \mu_M$ ならば、 $\lambda \in e(F, K)$ である。従って、 $e(F, K) \neq \emptyset$ 。

$$\lambda_1(K) = \inf e(F, K) \geq \mu_m > 0$$

とおく。

Fact 1.1. $\lambda_1(K) \in e(F, K)$.

Proof. $\lambda_1(K)$ に収束する単調減少列 $\{\tau_j\}$ をとる。そのとき、 $v_j \in S(E)$ が存在して

$$\|F^n(v_j)\| \leq K\tau_j^n \ (\forall n \geq 0).$$

$S(E)$ はコンパクトなので、 v_j はある $v \in S(E)$ に収束するとしてよい。そのとき、 $n \geq 0$ を固定して

$$\|F^n(v)\| \leq K\tau_j^n$$

を得る。よって

$$\|F^n(v)\| \leq K\lambda_1(K)^n.$$

故に、 $\lambda_1(K) \in e(F, K)$ 。

Fact 1.2. $1 < K_1 < K_2$ に対し, $\lambda_1(K_1) = \lambda_1(K_2)$.

Proof. 定義より, $e(F, K_1) \subset e(F, K_2)$ を得る. 従って, $\lambda_1(K_1) \geq \lambda_1(K_2)$.

逆の不等式を示す. $\lambda_1(K_2) \in e(F, K_2)$ だから, $v_2 \in S(E)$ が存在して $\|F^n(v_2)\| \leq K_2 \lambda_1(K_2)^n$ ($\forall n \geq 0$). 任意の $n \geq 1$ に対し $m \geq 1$ が存在して

$$\|F^m \circ F^n(v_2)\| > K_1 \lambda_1(K_2)^m \|F^n(v_2)\|$$

が成り立つと仮定する. $K_1 > 1$ だから $K_1^\ell \mu_m > K_2 \lambda_1(K_2)$ を満たす ℓ が取れる. 従って, 仮定より $m_1, \dots, m_\ell \geq 1$ が存在して

$$\begin{aligned} \|F^{m_\ell + \dots + m_1 + 1}(v_2)\| &> K_1^\ell \lambda_1(K_2)^{m_\ell + \dots + m_1} \|F(v_2)\| \\ &> K_2 \lambda_1(K_2)^{m_\ell + \dots + m_1 + 1} \|v_2\|. \end{aligned}$$

これは矛盾. よって, ある $n \geq 1$ が在って, すべての $m \geq 1$ に対し

$$\|F^m(F^n(v_2))\| \leq K_1 \lambda_1(K_2)^m \|F^n(v_2)\|.$$

従って, $\lambda_1(K_2) \in e(F, K_1)$. 故に, $\lambda_1(K_1) \leq \lambda_1(K_2)$.

Definition. $\lambda_1 = \lambda_1(K) > 0$ を F の最小スペクトル (**minimal spectrum**) と呼ぶ.

Definition. 距離空間の写像 $g: A \rightarrow A$ に対し, 部分集合 $B \subset A$ が g の **return set** であるとは, すべての点 $x \in B$ に対し $n \geq 1$ が存在し $g^n(x) \in B$ が成り立つときをいう. ここで n を x の回帰時間という. B が g の **return set** であるとき, **return map** $r_B: B \rightarrow B$ が

$$r_B(x) = g^{n_x}(x)$$

によって定義される. ここで, $n_x \geq 1$ は第1回帰時間である. さらに B が有界 (**bounded**) であるとは, $\{n_x \mid x \in B\}$ が有界のとき, また B が非有界 (**unbounded**) であるとは, $\{n_x \mid x \in B\}$ が非有界のときをいう.

$b > 1$ を固定し

$$\Lambda_b = \{x \in X \mid \exists v \in E_x \setminus \{0\} \text{ s.t. } \|F^n(v)\| \leq b \lambda_1^n \|v\| \text{ } (\forall n \geq 0)\}$$

とおく. Λ_b は X の空でない閉集合である.

Fact 1.3. Λ_b は f の **return set** である.

Proof. 点 $x \in \Lambda_b$ が存在して, すべての $n \geq 1$ に対し $f^n(x) \notin \Lambda_b$ であると仮定する. 定義より, $v \in E_x \setminus \{0\}$ があって, $\|F^n(v)\| \leq b \lambda_1^n \|v\|$ ($\forall n \geq 0$). $f(x) \notin \Lambda_b$ だから, $n_1 \geq 1$ があって $\|F^{n_1}(F(v))\| > b \lambda_1^{n_1} \|F(v)\|$. $f^{n_1+1}(x) \notin \Lambda_b$ だから, $n_2 \geq 1$ があって

$$\begin{aligned} \|F^{n_2}(F^{n_1+1}(v))\| &> b \lambda_1^{n_2} \|F^{n_1+1}(v)\| \\ &> b^2 \lambda_1^{n_2+n_1} \|F(v)\|. \end{aligned}$$

この議論を繰り返して, 任意の $\ell \geq 1$ に対し $n_1, n_2, \dots, n_\ell \geq 1$ をとることができて

$$\begin{aligned} \|F^{n_\ell + \dots + n_1 + 1}(v)\| &> b^\ell \lambda_1^{n_\ell + \dots + n_1} \|F(v)\| \\ &\geq b^\ell \mu_m \lambda_1^{n_\ell + \dots + n_1} \|v\| \end{aligned}$$

$b > 1$ より, $b^\ell \mu_m > b \lambda_1$ となる ℓ が存在するから, これは矛盾である. よって, Fact 3 が成り立つ.

§2 Minimal return sets

Definition. 距離空間の写像 $g: A \rightarrow A$ の *return set* B は空でない閉集合とする. B が **minimal** であるとは, $C \subset B$ が空でない閉集合で $r_B(C) \subset C$ であるとき $B = C$ でなければならないときをいう.

Fact 2.1. *return set* B はコンパクトとすると, 次が成り立つ.

- (1) $r_B: B \rightarrow B$ に対し *minimal return set* $B' \subset B$ が存在する.
- (2) B が *minimal* ならば, $\overline{r_B(B)} = B$ である. ここで $\overline{}$ は閉包である.

Proof. (1): $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} = \{B_\lambda \mid B_\lambda \subset B, B_\lambda \neq \emptyset, B_\lambda \text{ is closed, } r_B(B_\lambda) \subset B_\lambda\}$$

で定めると, $B \in \mathcal{O} \neq \emptyset$. また,

$$r_B(\cap_\lambda B_\lambda) \subset \cap_\lambda B_\lambda$$

なので, $\mathcal{O}$ は包含関係に関し帰納的. よって Zorn の補題より結論を得る.

(2): 定義より明らか.

Fact 2.2. B が *minimal return set* で有界とすると, $n_0 > 0$ が存在して $\cup_{n=0}^{n_0} g^n(B)$ は g の (通常の意味の) *minimal* な不変集合である.

Proof. Fact 2.1 (2) より従う.

minimal return set が非有界の場合を扱うために, コンパクト距離空間の連続な全射 $f: X \rightarrow X$ は正拡大的かつ開写像と仮定する. このとき, 次が成り立つ.

Fact 2.3. 上の仮定もとで, B が f の *minimal return set* とし非有界とすると, $n > 0$ が存在し $r_B^n(x)$ の $r_B: B \rightarrow B$ による後方軌道の全体は B で稠密である.

§3 有界な場合

$\lambda_1 > 0$ を $F: E \rightarrow E$ の最小スペクトルとし, $b > 1$ を固定する. Λ_b を §1 のものとし, $\Lambda \subset \Lambda_b$ を *minimal return set* とする. この節では Λ は有界と仮定する. このとき, $b > 1$ を十分大とすると, Λ は f -不変としてよい. 各点 $x \in \Lambda$ に対し

$$E_x(0) = \{v \in E_x \mid \exists C_v > 1 \text{ s.t. } \|F^n(v)\| \leq C_v \lambda_1^n \|v\| \ (\forall n \geq 0)\}$$

とおく.

Lemma 3.1. すべての $x \in \Lambda$ に対し, $E_x(0)$ は E_x の部分空間である.

Proof. 定義により, $v \in E_x(0), k \in \mathbb{R}$ ならば $kv \in E_x(0)$ であることは明らか. $v, w \in E_x(0)$ とすると $C_v > 1, C_w > 1$ が存在して, すべての $n \geq 0$ に対し

$$\|F^n(v)\| \leq C_v \lambda_1^n \|v\|, \quad \|F^n(w)\| \leq C_w \lambda_1^n \|w\|.$$

よって, $v + w \neq 0$ ならば, 任意の $n \geq 0$ に対し

$$\begin{aligned}\|F^n(v + w)\| &\leq \|F^n(v)\| + \|F^n(w)\| \\ &\leq C_v \lambda_1^n \|v\| + C_w \lambda_1^n \|w\| \\ &= \frac{C_v \|v\| + C_w \|w\|}{\|v + w\|} \lambda_1^n \|v + w\|.\end{aligned}$$

これは $v + w \in E_x(0)$ を意味する. 故に結論が得られる.

$$\hat{\Lambda} = \{v \in E_\Lambda \mid \|F^n(v)\| \leq b \lambda_1^n \ (\forall n \geq 0)\}$$

とおく. $\hat{\Lambda}$ が閉集合であることを示すのは容易である.

$$P = \pi|_{\hat{\Lambda}} : \hat{\Lambda} \rightarrow \Lambda$$

とおく.

Lemma 3.2. 任意の $x \in \Lambda$ に対し

$$E_x(0) = \{kv \mid v \in P^{-1}(x), k \in \mathbb{R}\}$$

が成り立つ.

Proof. $w \in E_x(0)$, $w \neq 0$ とすると, $C_w > 1$ が存在し

$$\|F^n(w)\| \leq C_w \lambda_1^n \|w\| \ (\forall n \geq 0)$$

が成り立つ.

$$v = \frac{b}{C_w \|w\|} w$$

とすると, $\|F^n(v)\| \leq b \lambda_1^n \ (\forall n \geq 0)$. よって $v \in P^{-1}(x)$. 従って

$$w = \frac{C_w \|w\|}{b} v \in \{kv \mid v \in P^{-1}(x), k \in \mathbb{R}\}.$$

逆に, $w = kv$, $v \in P^{-1}(x) \setminus \{0\}$, $k \in \mathbb{R}$ とすると, $\|F^n(v)\| \leq b \lambda_1^n \ (\forall n \geq 0)$ だから

$$\begin{aligned}\|F^n(w)\| &\leq |k| b \lambda_1^n \\ &= \frac{b}{\|v\|} \lambda_1^n \|w\|.\end{aligned}$$

がすべての $n \geq 0$ に対して成り立つ. よって, $w \in E_x(0)$.

$1 \leq d \leq \dim E$ に対し

$$\Lambda(d) = \{x \in \Lambda \mid \dim E_x(0) = d\}$$

とおく. $f : \Lambda \rightarrow \Lambda$ は minimal で $F : E \rightarrow E$ は特異でないので, $\Lambda(d)$ は空集合か Λ の稠密な部分集合である. 従って, $1 \leq d_1 < \dots < d_\ell \leq \dim E$ が存在して

$$\Lambda = \bigcup_{i=1}^{\ell} \Lambda(d_i)$$

は稠密な部分集合による互いに交わりのない和集合である.

Lemma 3.3. 定数 $C > 1$ が存在して, 任意の $x \in \Lambda(d_1)$ に対し

$$(3.1) \quad E_x(0) = \{v \in E_x \mid \|F^n(v)\| \leq C\lambda_1^n \|v\| \ (\forall n \geq 0)\}$$

が成り立つ.

Proof. $x \in \Lambda$ とし, $\{v_1, \dots, v_d\}$ を $E_x(0)$ の基底で $\|v_i\| = 1$ ($1 \leq i \leq d$) を満たすものとする. このとき, $v \in E_x(0)$, $\|v\| = 1$ に対し $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ が存在し $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_d v_d$ が成り立ち, $|\alpha_i| \leq \alpha_x$ ($1 \leq i \leq d$) を満たす $\alpha_x > 0$ を取ることができる. よって, $C_1, \dots, C_d > 0$ が存在して, 任意の $n \geq 0$ に対し

$$\begin{aligned} \|F^n(v)\| &\leq |\alpha_1|C_1\lambda_1^n + \dots + |\alpha_d|C_d\lambda_1^n \\ &\leq \alpha_x(C_1 + \dots + C_d)\lambda_1^n. \end{aligned}$$

$C_x = \alpha_x(C_1 + \dots + C_d)$ と置いて, すべての $v \in E_x(0)$, $\|v\| = 1$ に対し $\|F^n(v)\| \leq C_x\lambda_1^n$ ($\forall n \geq 0$) を得る. 従って, $\varepsilon_x v \in P^{-1}(x)$. ここで $\varepsilon_x = b/C_x$.

$\varepsilon > 0$ に対し

$$S_\varepsilon(\Lambda) = \{v \in E_\Lambda \mid \|v\| = \varepsilon\}$$

とおく. 上の結果と Lemma 3.2 より

$$E_x(0) \cap S_{\varepsilon_x}(\Lambda) = P^{-1}(x) \cap S_{\varepsilon_x}(\Lambda).$$

従って, $\varepsilon > 0$ に対し

$$\Lambda^\varepsilon = \{x \in \Lambda \mid E_x(0) \cap S_\varepsilon(\Lambda) = P^{-1}(x) \cap S_\varepsilon(\Lambda)\}$$

とおくと, $x \in \Lambda^{\varepsilon_x}$. よって

$$\Lambda = \bigcup_{\varepsilon > 0} \Lambda^\varepsilon = \bigcup_{\varepsilon > 0} \overline{\Lambda^\varepsilon}.$$

従って, $\varepsilon_0 > 0$ が存在し $\text{int}\overline{\Lambda^{\varepsilon_0}} \neq \emptyset$.

$$\Lambda^{\varepsilon_0} = (\Lambda^{\varepsilon_0} \cap \Lambda(d_1)) \cup \dots \cup (\Lambda^{\varepsilon_0} \cap \Lambda(d_\ell))$$

であるから, ある i に対し $\text{int}\overline{\Lambda^{\varepsilon_0} \cap \Lambda(d_i)} \neq \emptyset$. $x \in \Lambda^{\varepsilon_0} \cap \Lambda(d_i)$ ならば, すべての $v \in E_x(0)$ に対し $\varepsilon_0 \frac{v}{\|v\|} \in P^{-1}(x)$. 従って, $\|F^n(v)\| \leq \frac{b}{\varepsilon_0} \lambda_1^n \|v\|$ ($\forall n \geq 0$). よって

$$(3.2) \quad E_x(0) = \{v \in E_x \mid \|F^n(v)\| \leq \frac{b}{\varepsilon_0} \lambda_1^n \|v\| \ (\forall n \geq 0)\}.$$

従って, $\Lambda^{\varepsilon_0} \cap \Lambda(d_i)$ の点列 $\{x_i\}$ が点 $x \in \Lambda$ に収束し, 部分空間の列 $\{E_{x_i}(0)\}$ が部分空間 E'_x に収束するならば, $E'_x \subset E_x(0)$ を得る. これは, $\dim E_x(0) \geq d_i$ を意味する. $\text{int}\overline{\Lambda^{\varepsilon_0} \cap \Lambda(d_i)} \neq \emptyset$ であり $\Lambda(d_1)$ は Λ で稠密であるから,

$$d_i = d_1$$

でなければならない. 故に, $\text{int}\overline{\Lambda^{\varepsilon_0} \cap \Lambda(d_1)} \neq \emptyset$ である.

$x \in \Lambda(d_1)$ とする. $f: \Lambda \rightarrow \Lambda$ は minimal だから, $N > 0$ と $0 \leq n \leq N$ が存在して, $f^n(x) \in \text{int}\Lambda^{\varepsilon_0} \cap \Lambda(d_1)$. $v \in E_x(0)$ とすると $F^n(v) \in E_{f^n(x)}(0)$. よって, 任意の $k \geq 0$ に対し

$$\begin{aligned} \|F^k \circ F^n(v)\| &\leq \frac{b}{\varepsilon_0} \lambda_1^k \|F^n(v)\| \\ &\leq C \lambda_1^{k+n} \|v\| \end{aligned}$$

ここで $C > 1$ は N に依存する定数である. 故に, 任意の $x \in \Lambda(d_1)$ に対し (3.1) が成り立つ.

Lemma 3.3 より

$$\bigcup_{x \in \Lambda(d_1)} E_x(0)$$

は $\Lambda(d_1)$ 上で連続であることに注意する.

Lemma 3.4. 定数 $C > 1$ が存在して, すべての $x \in \Lambda(d_1)$ と $v \in E_x(0)$ に対し

$$(3.3) \quad C^{-1} \|v\| \leq \frac{\|F^n(v)\|}{\lambda_1^n} \leq C \|v\| \quad (\forall n \geq 0).$$

Proof. (3.3) の上からの評価は Lemma 3.3 から従う. よって下からの評価を示せば十分である.

$$G(d_1) = \overline{\bigcup_{x \in \Lambda(d_1)} E_x(0)}$$

とおく. 次の性質を満たす $\Lambda(d_1)$ の点列 $\{x_i\}$ 全体の集合を S で表す: x_i は Λ の点 x に収束し, 部分空間の列 $E_{x_i}(0)$ は E_x の部分空間 ($E_{\{x_i\}}$ で表す) に収束する. このとき,

$$G(d_1) = \bigcup_{\{x_i\} \in S} E_{\{x_i\}}$$

が成り立ち, Lemma 3.3 より, すべての $E_{\{x_i\}}$ と $v \in E_{\{x_i\}}$ に対し

$$\|F^n(v)\| \leq C \lambda_1^n \|v\| \quad (\forall n \geq 0)$$

となる.

$\{x_i\} \in S$ に対し

$$\Gamma_{\{x_i\}} = \{v \in E_{\{x_i\}} \mid \inf \left\{ \frac{\|F^n(v)\|}{\lambda_1^n} \right\} = 0\}$$

とおく. $v \in \Gamma_{\{x_i\}}$ とすると, $\varepsilon > 0$ に対し $n \geq 0$ が存在し $\|w\| < \varepsilon$. ここで $w = 1/\lambda_1^n F^n(v)$. $\|F^m(w)\| \leq C \lambda_1^m \|w\|$ ($m \geq 0$) だから

$$\frac{1}{\lambda_1^{n+m}} \|F^m(w)\| \leq \frac{C}{\lambda_1^n} \|F^n(v)\| < C\varepsilon.$$

よって,

$$\frac{\|F^n(v)\|}{\lambda_1^n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

特に, $\Gamma_{\{x_i\}}$ は $E_{\{x_i\}}$ の部分空間である.

$0 < a \leq 1$ に対し

$$\Gamma_{\{x_i\}}(a) = \{v \in E_{\{x_i\}} \setminus \{0\} \mid \inf\{\frac{\|F^n(v)\|}{\lambda_1^n}\} \geq a\|v\|\}$$

とおく. 任意の $\{x_i\} \in \mathcal{S}$ に対し $\Gamma_{\{x_i\}}(1) = \emptyset$ と仮定すると, 任意の $\{x_i\} \in \mathcal{S}$ と $v \in E_{\{x_i\}} \setminus \{0\}$ に対し $n \geq 1$ が存在して

$$\frac{\|F^n(v)\|}{\lambda_1^n} < \|v\|$$

となる. このとき, $G(d_1) \cap S_1(\Lambda)$ のコンパクト性を使って, λ_1 の取り方に矛盾を導くことができる. よって $\{y_i\} \in \mathcal{S}$ が存在し $\Gamma_{\{y_i\}}(1) \neq \emptyset$. このことから, 任意の $\{x_i\} \in \mathcal{S}$ に対し $\Gamma_{\{x_i\}}(C^{-1}) \neq \emptyset$ が得られる. 実際, $f: \Lambda \rightarrow \Lambda$ は minimal なので, 数列 $\{n_i\}$ が存在して $F^{n_i}(E_{\{y_i\}}) \rightarrow E_{\{x_i\}}$ ($i \rightarrow \infty$). $v \in \Gamma_{\{y_i\}}(1)$ とすると,

$$\frac{F^{n_i}(v)}{\lambda_1^{n_i}} \rightarrow w \in E_{\{x_i\}} \quad (i \rightarrow \infty)$$

としてよい. このとき,

$$\inf \frac{\|F^n(w)\|}{\lambda_1^n} \geq C^{-1}\|w\|$$

となる.

$$C_1 = C < C_2 < \cdots < C_k < \cdots \rightarrow \infty$$

となる数列を取る. $v \in E_{\{x_i\}} \setminus \Gamma_{\{x_i\}}(C_k^{-1})$ とすると,

$$\inf \frac{\|F^n(v)\|}{\lambda_1^n} < C_k^{-1}\|v\|$$

が成り立つ. $\varepsilon > 0$ を十分小とし $\|w\| < \varepsilon$ とすると

$$\frac{\|F^n(w)\|}{\lambda_1^n} \leq C\|w\| < C\varepsilon$$

だから

$$\inf \frac{\|F^n(v+w)\|}{\lambda_1^n} < C_k^{-1}\|v\| + C\varepsilon,$$

よって, $v+w \in E_{\{x_i\}} \setminus \Gamma_{\{x_i\}}(C_k^{-1})$. これは, $\Gamma_{\{x_i\}}(C_k^{-1})$ は $E_{\{x_i\}}$ の閉集合であることを意味する. 従って, $\{\Gamma_{\{x_i\}}(C_k^{-1}) \mid \{x_i\} \in \mathcal{S}\}$ は上半連続であることが得られる.

ある k に対し

$$\Gamma = \left\{ \bigcup_{\{x_i\} \in \mathcal{S}} \Gamma_{\{x_i\}}(C_k^{-1}) \right\} \cap \overline{\bigcup_{\{x_i\} \in \mathcal{S}} \Gamma_{\{x_i\}}} \neq \emptyset$$

を仮定すると, $\pi(\Gamma) = \Lambda$ となる. $\{\Gamma_{\{x_i\}}(C_k^{-1}) \mid \{x_i\} \in \mathcal{S}\}$ が上半連続であることから, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対し, 開集合 $U \subset \{\Gamma_{\{x_i\}}(C_k^{-1}) \mid \{x_i\} \in \mathcal{S}\}$ が存在して, U は ε -連続である. このとき, $\cup\{\Gamma_{\{x_i\}}(C_{k+1}^{-1}) \mid \{x_i\} \in \mathcal{S}, \pi(x) \in \pi(U)\}$ は $\cup U$ の近傍となる. 従って, $\Gamma_{\{x_i\}}(C_{k+1}^{-1}) \cap \Gamma_{\{x_i\}} \neq \emptyset$. これは矛盾である. 故に, $\Gamma = \emptyset$. 従って, すべての $\{x_i\} \in \mathcal{S}$ に対し $\Gamma_{\{x_i\}} = \emptyset$. よって, ある k が存在し

$$E_{\{x_i\}} = \Gamma_{\{x_i\}}(C_k^{-1})$$

がすべての $\{x_i\} \in \mathcal{S}$ に対して成り立つ. このことから (3.3) の下からの評価が得られる.

この後の議論を進めるために, $X = M$ を滑らかな閉リーマン多様体, $f : M \rightarrow M$ を正拡大的で正則な C^1 写像, $F = Df : TM \rightarrow TM$ を f の微分とする. このとき, 次が得られる.

Proposition 3.5. 上の仮定のもとで,

$$\Lambda(d_1) = \Lambda$$

が成り立つ.

§4 非有界な場合

前節と同様, $\lambda_1 > 0$ を $F : E \rightarrow E$ の最小スペクトルとし, $b > 1$ を固定する. Λ_b を §1 のものとし, $\Lambda \subset \Lambda_b$ を minimal return set とする. この節では Λ は非有界と仮定する. return map

$$r = r_{\Lambda_b|\Lambda} : \Lambda \rightarrow \Lambda$$

に対し $\overline{r(\Lambda)} = \Lambda$ が成り立つ. 以下で, $f : X \rightarrow X$ は正拡大的で開写像とする. $\tilde{F} : S(E) \rightarrow S(E)$ を

$$\tilde{F} = \frac{1}{\|F(v)\|} F(v)$$

で定義し,

$$\tilde{\Lambda}_b = \{v \in S(E) \mid \|F^n(v)\| \leq b\lambda_1^n \ (\forall n \geq 0)\}$$

とおく.

Lemma 4.1. $\tilde{\Lambda}_b$ は $\tilde{F}$ の return set で $\pi(\tilde{\Lambda}_b) = \Lambda_b$ が成り立つ.

return map を

$$R_b : \tilde{\Lambda}_b \rightarrow \tilde{\Lambda}_b$$

で表し

$$\tilde{\Lambda} = \{v \in \tilde{\Lambda}_b \mid \pi(v) \in \Lambda\}$$

とおく.

$$R : \tilde{\Lambda} \rightarrow \tilde{\Lambda}$$

を $R = R_b|_{\tilde{\Lambda}}$ で定義する. $x \in \Lambda$ に対し $E_x(0)$ を §2 と同様に定める.

Lemma 4.2. 任意の $x \in \Lambda$ に対し, $E_x(0)$ は E_x の部分空間である.

前節と同様に

$$\hat{\Lambda} = \{v \in E_\Lambda \mid \|F^n(v)\| \leq b\lambda_1^n \ (\forall n \geq 0)\}$$

とおいて

$$P = \pi|_{\hat{\Lambda}} : \hat{\Lambda} \rightarrow \Lambda$$

と定める.

Lemma 4.3. 任意の $x \in \Lambda$ に対し

$$E_x(0) = \{kv \mid v \in P^{-1}(x), k \in \mathbb{R}\}.$$

$1 \leq d \leq \dim E$ に対し

$$\Lambda(d) = \{x \in \Lambda \mid \dim E_x(0) = d\}$$

とおく. $\Lambda(d)$ は空集合であるか Λ の稠密な部分集合である (Fact 2.3). よって, $1 \leq d_1 < \dots < d_\ell \leq \dim E$ が存在して

$$\Lambda = \bigcup_{i=1}^{\ell} \Lambda(d_i)$$

は稠密な部分集合による互いに交わりのない和集合である.

Lemma 4.4. 定数 $C > 1$ と $x_0 \in \Lambda$, $\delta > 0$ が存在して, 任意の $x \in \Lambda(d_1) \cap B_\delta(x_0)$ に対し

$$E_x(0) = \{v \in E_x \mid \|F^n(v)\| \leq C\lambda_1^n \|v\| \ (\forall n \geq 0)\}$$

ここで $B_\delta(x_0)$ は中心 x_0 , 半径 δ の球体を表す.

Lemma 4.4 より

$$\bigcup_{x \in \Lambda(d_1)} E_x(0)$$

は $\Lambda(d_1)$ 上で連続であることが得られる.

Lemma 4.5. 定数 $C > 1$ が存在して, 任意の $v \in \tilde{\Lambda}$ と $n \geq 0$ に対し

$$C^{-1}\|v\| \leq \frac{\|F^{N_v + \dots + N_{R^{n-1}(v)}}(v)\|}{\lambda_1^{N_v + \dots + N_{R^{n-1}(v)}}}$$

ここで N は第 1 回帰時間である.

§3 と同様, この後の議論を進めるために, $X = M$ を滑らかな閉リーマン多様体, $f : M \rightarrow M$ を正拡大的で正則な C^1 写像, $F = Df : TM \rightarrow TM$ を f の微分とする. このとき, 次が得られる.

Proposition 4.6. 上の仮定のもとで,

$$\Lambda(d_1) = \Lambda$$

が成り立つ.

§5 Second stage

$M = X$ を滑らか閉リーマン多様体とし, $f : M \rightarrow M$ を正拡大的で正則な C^1 写像とする. $\lambda_1 > 0$ を微分 $Df : TM \rightarrow TM$ の最小スペクトルとし, $b > 1$ を固定する. $\Lambda_b(0) = \Lambda_b$ を前のものとし, $\Lambda(0) = \Lambda$ を minimal return set とする. §3 と §4 の結果から, $T_\Lambda M$ の連続な部分バンドル

$$E_\Lambda(0) = \bigcup_{x \in \Lambda} E_x(0)$$

が得られる.

線形空間 V と部分空間 E が与えられてとき, 商空間 V/E の元を $[v]$ ($v \in V$) で表し, $\| \cdot \|$ が V のノルムるとき, V/E のノルム $\| \cdot \|$ を $\|[v]\| = \inf\{\|w\| \mid w \in [v]\}$ により定める.

$$\Lambda_b(1) = \{x \in \Lambda(0) \mid \exists [v] \in T_x M / E_x(0) \setminus \{[0]\} \text{ s.t. } \|[Df^n(v)]\| \leq b\lambda_1^n \|[v]\| \ (\forall n \geq 0)\}$$

とおく. $\Lambda_b(1)$ は閉集合である.

$\Lambda_b(1) \neq \emptyset$ と仮定する.

Lemma 5.1. $\Lambda_b(1)$ は f の return set である.

$\Lambda(1) \subset \Lambda_b(1)$ を minimal return set とし, $x \in \Lambda(1)$ に対し

$$\begin{aligned} E_x(1) &= \{v \in T_x M \mid \exists C_v > 1 \text{ s.t. } \|[Df^n(v)]\| \leq C_v \lambda_1^n \|[v]\| \ (\forall n \geq 0)\} \\ &\supset E_x(0) \end{aligned}$$

とおく.

Lemma 5.2. 任意の $x \in \Lambda(1)$ に対し, $E_x(1)$ は $T_x M$ の部分空間である.

商ベクトルバンドル $T_{\Lambda(1)} M / E_{\Lambda(1)}(0)$ の部分集合

$$\hat{\Lambda}(1) = \{[v] \in T_{\Lambda(1)} M / E_{\Lambda(1)}(0) \mid \|[Df^n(v)]\| \leq b\lambda_1^n \ (\forall n \geq 0)\}$$

を定義し

$$P_1 = \pi|_{\hat{\Lambda}(1)} : \hat{\Lambda}(1) \rightarrow \Lambda(1)$$

とおく.

Lemma 5.3. 任意の $x \in \Lambda(1)$ に対し

$$E_x(1) = \{kv \mid [v] \in P_1^{-1}(x), k \in \mathbb{R}\}.$$

$1 \leq d \leq \dim E$ に対し

$$\Lambda(d; 1) = \{x \in \Lambda(1) \mid \dim E_x(1) = d\}$$

とおく. $\Lambda(d; 1)$ は空集合であるか $\Lambda(1)$ で稠密である. よって $1 \leq d_1^1 < d_2^1 < \cdots < d_{\ell_1}^1 \leq \dim E$ が在って

$$\Lambda(1) = \bigcup_{i=1}^{\ell_1} \Lambda(d_i^1; 1)$$

は稠密な部分集合による互いに交わりのない和集合である.

Lemma 5.4. 定数 $C > 1$ と $x_0 \in \Lambda(1)$, $\delta > 0$ が存在して, 任意の $x \in \Lambda(d_1^1; 1) \cap B_\delta(x_0)$ に対し

$$E_x(1) = \{v \in T_x M \mid \|[Df^n(v)]\| \leq C\lambda_1^n \|[v]\| \ (\forall n \geq 0)\}.$$

よって

$$\bigcup_{x \in \Lambda(d_1^1; 1)} E_x(1)$$

は $\Lambda(d_1^1; 1)$ 上で連続になる.

Lemma 5.5. 定数 $C > 1$ が存在して, 任意の $v \in \tilde{\Lambda}(1)$ と $n \geq 0$ に対し

$$C^{-1}(N_v + \cdots + N_{R^{n-1}(v)})^{-1} \|v\| \leq \frac{\|Df^{N_v + \cdots + N_{R^{n-1}(v)}}(v)\|}{\lambda_1^{N_v + \cdots + N_{R^{n-1}(v)}}}$$

ここで N は第 1 回帰時間である.

Proposition 5.6. $\Lambda(d_1^1; 1) = \Lambda(1)$ が成り立つ.

§6 Filtration

§5 の議論を繰り返し行って minimal return set の狭義単調減少有限列

$$\Lambda(0) \supset \Lambda(1) \supset \cdots \supset \Lambda(i_0) \supset \Lambda(i_0 + 1) = \emptyset$$

と return map の微分で不変な $T_{\Lambda(i_0)} M$ の連続部分バンドルの狭義単調増加有限列

$$E_{\Lambda(i_0)}(0) \subset E_{\Lambda(i_0)}(1) \subset \cdots \subset E_{\Lambda(i_0)}(i_0) = E_{\Lambda(i_0)}(i_0 + 1)$$

を得る. 商バンドル $E_i = E_{\Lambda(i_0)}(i)/E_{\Lambda(i_0)}(i-1)$ に対し $S(E_i) = \{[v] \in E_i \mid \|[v]\| = 1\}$ において

$$\tilde{\Lambda}(i) = \{[v] \in S(E_i) \mid \|[Df^n(v)]\| \leq b\lambda_1^n \|[v]\| \ (\forall n \geq 0)\}$$

と定める. このとき, Df から自然に return map

$$R_i : \tilde{\Lambda}(i) \rightarrow \tilde{\Lambda}(i)$$

が導かれる.

Theorem 6.1. 定数 $C > 1$ が存在して次が成り立つ；

(1) ある $x_0 \in \Lambda(i_0)$ と $\delta > 0$ があって、任意の $x \in \Lambda(i_0) \cap B_\delta(x_0)$ と $v \in E_{\Lambda(i_0)}(i)$ ($\pi(v) = x$) に対し

$$\frac{\|Df^n(v)\|}{\lambda_1^n} \leq Cn^i \|v\| \quad (\forall n \geq 0),$$

(2) 任意の $v \in \tilde{\Lambda}(i)$ に対し

$$C^{-1}(N_v + \cdots + N_{R_i^{n-1}(v)})^{-i} \|v\| \leq \frac{\|Df^{N_v + \cdots + N_{R_i^{n-1}(v)}}(v)\|}{\lambda_1^{N_v + \cdots + N_{R_i^{n-1}(v)}}} \quad (\forall n \geq 0).$$

§7 Normal subbundle

次が成り立つ.

Theorem 7.1. 定数 $C > 1$ と $\lambda_2 > \lambda_1$ が存在して、任意の $\mathbf{x} = (x_i) \in \lim_{\leftarrow} (r_{\Lambda(i_0)}, \Lambda(i_0))$ に対し $T_{x_0}M$ の $Dr_{\Lambda(i_0)}$ 不変な部分空間 $F(\mathbf{x})$ が存在して

(1) $E_{x_0} \oplus F(\mathbf{x}) = T_{x_0}M$,

(2) 任意の $v \in F(\mathbf{x})$ に対し

$$\|Dr_{\Lambda(i_0)}^n(v)\| \geq C\lambda_2^{N_v + \cdots + N_{Dr_{\Lambda(i_0)}^{n-1}(v)}} \|v\|,$$

(3) $\mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{x})$ は連続.

§8 応用

M を滑らか閉リーマン多様体とする., $1 \leq r \leq \infty$ に対し, $C^r(M)$ は M の C^r 写像全体の集合とし, C^r 位相を持つとする.

$$PE^r(M) = \{f \in C^r(M) \mid f \text{ は正拡大的} \}$$

とおき, $PE^r(M)^\circ$ は $C^r(M)$ の中での C^r 位相に関する $PE^r(M)$ の内部を表すとし,

$$\partial PE^r(M) = PE^r(M) \setminus PE^r(M)^\circ$$

とおく. このとき, 次の定理を示すことができる.

Theorem 8.1. $f: M \rightarrow M$ は C^r 写像で $1 \leq r \leq \infty$ とすると,

$$f \in PE^r(M)^\circ \iff f: M \rightarrow M \text{ は拡大写像}$$

が成り立つ.

Theorem 8.2. $f : M \rightarrow M$ は C^r 写像で $1 \leq r \leq \infty$ とし, f は正拡大的であると仮定する. このとき, $f \in \partial PE^r(M)$ であるための必要十分条件は, f は特異点を持つか, あるいは f は正則で次の (1), (2), (3) のいずれかが成り立つ;

(1) 周期点 p が存在し $D_p f^n : T_p M \rightarrow T_p M$ は絶対値 1 の固有値を持つ. ここで n は p の周期である.

(2) f の *minimal set* Λ (周期軌道でない) と Df -不変な連続部分バンドル $E \subset T_\Lambda M$, $\dim E \geq 1$ と定数 $C > 1$ が存在し, すべての $v \in E$ と $n \geq 0$ に対し

$$C^{-1}\|v\| \leq \|Df^n(v)\| \leq C\|v\|$$

である.

(3) f の非有界な *minimal return set* Λ と Dr_Λ -不変な連続部分バンドル $E \subset T_\Lambda M$, $\dim E \geq 1$ と定数 $C > 1$ が存在し, すべての $v \in E$ と $n \geq 0$ に対し

$$\|Df^n(v)\| \leq C\|v\|, \quad C^{-1}\|v\| \leq \|Dr_\Lambda^n(v)\|$$

である.

References

- [1] C.Bonatti, L.Díaz and F.Vuillemin, Cubic tangencies and hyperbolic diffeomorphisms, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 29 (1998), 99–144.
- [2] E.Coven and W.Reddy, Positively expansive maps of compact manifolds, Lecture Notes in Math. 819, Springer-Verlag, 1980, 96–110.
- [3] H.Enrich, A heteroclinic bifurcation of Anosov diffeomorphisms, Ergod. Th. and Dynam. Sys. 18 (1998), 567–608.
- [4] M.Gromov, Groups of polynomial growth and expanding maps, I.H.E.S. Publ. Math. 53 (1981), 53–78.
- [5] K.Hiraide, Positively expansive maps and growth of fundamental groups, Proc. Amer. Math. Soc. 104 (1988), 934–941.
- [6] K.Hiraide, Positively expansive open maps of Peano spaces, Topology and its Appl. 37 (1990), 213–220.
- [7] K.Hiraide, Nonexistence of positively expansive maps on compact connected manifolds with boundary, Proc. Amer. Math. Soc. 110 (1990), 565–568.
- [8] M.Hirsch, C.Pugh and M.Shub, Invariant manifolds, Lecture notes in Math. 583, Springer-Verlag, 1977.
- [9] R.Mañé, Expansive diffeomorphisms, Dynam. Sys. Warwick, Lecture notes in Math. 468, Springer-Verlag, 1974, 162–174.
- [10] R.Mañé, Hyperbolicity, sinks and measure in one-dimensional dynamics, Comm. Math. Phys. 100 (1985), 495–524.
- [11] W.Reddy, Expanding maps on compact metric spaces, Topology and its Appl. 13 (1982), 327–334.
- [12] M.Shub, Endomorphisms of compact differentiable manifolds, Amer. J. Math. 91 (1969), 175–199.