

Introduction to generalized character theory

京大理 田辺 理正 (Michimasa Tanabe)

M. Atiyah は [1] において, 有限群 G の分類空間 BG の複素 K 理論 $K(BG)$ が G の複素表現環 $R(G)$ の augmentation ideal $I(G) = (\text{virtual dimo representations})$ における完備化 $\hat{R}(G) = \varprojlim_i R(G)/I(G)^i$ に環同型であることを示した。最近この Atiyah の結果が M. Hopkins, N. Kuhn, D. Ravenel [2] によってある種の v_n -周期的コホモロジー論にまで "generalized group character" (ここでは高次元群指標と呼ぶことにする。) という形で拡張されたが, 以下これについて簡単な紹介をする。

1. Morava K 理論と高次元指標 p を素数とし E を Baas-Sullivan 構成によって得られるコホモロジー論でその mod p reduction が p における n 番目の Morava K 理論 $K(n)$ になっているものとする。
 E の p における完備化 $\varprojlim_i E^*(\cdot; \mathbb{Z}/p^i)$ を $\hat{K}(n)^*(\cdot)$ と書き p 進 Morava K 理論と呼ぶことにする。以下では v_n -周期的コホモロジーと

しては、この Morava K 理論だけを考えることにする。 $\mathbb{C}_p$ を p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の代数的閉包の p 進付値に関する完備化とし、 $\mathbb{C}_p$ の付値環を $\mathcal{O}_p$ 、付値イデアルを $\mathfrak{m}_p$ とする。 $K(\hat{n})^* = K(\hat{n})^*(pt) = \mathbb{Z}_p[V_n, V_n^{-1}]$ の $\mathcal{O}_p$ への埋め込みを一つ決めておいて $K(\hat{n})^*$ を $\mathcal{O}_p$ の部分環とみなすことにする。 G を有限群、 H をその部分群とすると transfer map $K(\hat{n})^*(BH) \rightarrow K(\hat{n})^*(BG)$ を定義できるが、これを induction として対応 $G \mapsto K(\hat{n})^*(BG)$ は有限群の圏 Group から環の圏 Ring への Mackey 関手になる。

次に $\text{Hom}(\mathbb{Z}_p^n, G)$ を $\mathbb{Z}_p^n$ から G への連続準同型 (G は離散群と考える。) の全体とし、共役作用により G 集合と考える。このとき

$$\begin{aligned} (1.1) \quad \mathcal{C}_{n,p}(G) &= \text{Map}_G(\text{Hom}(\mathbb{Z}_p^n, G), \mathbb{C}_p) \\ &= \text{Map}(\text{Hom}(\mathbb{Z}_p^n, G)/G, \mathbb{C}_p) \end{aligned}$$

とすると $\mathcal{C}_{n,p}(G)$ は $\mathbb{C}_p$ の和と積を用いて環になる。さらに H を G の部分群とすると、

$$(1.2) \quad \text{ind}_H^G: \mathcal{C}_{n,p}(H) \longrightarrow \mathcal{C}_{n,p}(G)$$

を

$$(1.3) \quad \text{ind}_H^G(f)(\alpha) = \sum_{gH \in (G/H)^{\text{Im } \alpha}} f(c_g \alpha)$$

によって定義することができる。ただし $f \in \mathcal{O}_{np}(H)$, $\alpha \in \text{Hom}(\mathbb{Z}_p^n, G)$ で, $\text{Im } \alpha$ は G/H に在かる G の積によって作用するものとする。また c_g は g によって定まる G の内部自己同型とする。上の ind_H^G を induction として対応 $G \mapsto \mathcal{O}_{np}(G)$ は Mackey 関手になる。

以上の定義のもとに Hopkins, Kuhn, Ravenel [2] の主結果 (先進 Morava K 理論に対する) は次のように述べられる。

定理 1.4 ([2]) Mackey 関手の間の自然変換

$$\pi_G: K(\hat{n})^*(BG) \longrightarrow \mathcal{O}_{np}(G)$$

で, 同型

$$\pi_G \otimes_{C_p}: K(\hat{n})^*(BG) \otimes_{K(\hat{n})^*} C_p \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{np}(G)$$

を誘導するものが存在する。

上の定理の χ が高次元群指標であるが、次の節でその構成について述べる。

2. 高次元指標の構成 まず通常の群指標について考える。 G を有限群、

$$(2.1) \quad \mathcal{C}(G) = \text{Map}_G(\text{Hom}(\mathbb{Z}, G), \mathbb{C})$$

とすると $\mathcal{C}(G)$ は G かつ $\mathbb{C}$ への類関数全体と同一視でき、通常の群指標は Mackey 関手の間の自然変換

$$(2.2) \quad \chi_G: R(G) \rightarrow \mathcal{C}(G)$$

を与える。 $\alpha \in \text{Hom}(\mathbb{Z}, G)$ とすると α は

$$(2.3) \quad \alpha: \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi_N} \mathbb{Z}/N \xrightarrow{\alpha_N} G$$

なる分解を持つ。 ($\pi_N: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/N$ は自然な射影。) 従ってその自然性より任意の $\chi \in R(G)$ に対して

$$(2.4) \quad \chi_G(\chi)(\alpha) = (\chi_{\mathbb{Z}/N}(R(\alpha_N)\chi))(\pi_N)$$

が成立することが容易にわかる。

$\mathbb{Z}/N$ の $\mathbb{C}$ への作用

$$(2.5) \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/N \times \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \uparrow \\ (m, a) & \mapsto & e^{\frac{2\pi i}{N} m} a \end{array}$$

が定める $R(\mathbb{Z}/N)$ の元を t とすると

$$(2.6) \quad R(\mathbb{Z}/N) = \mathbb{Z}[t] / (t^N - 1)$$

で、環準同型

$$(2.7) \quad \epsilon_N: R(\mathbb{Z}/N) \rightarrow \mathbb{C}$$

を $\epsilon_N(t) = e^{2\pi i/N}$ で定義すると、 $\chi_{\mathbb{Z}/N}(t)(\pi_N) = \epsilon_N(t)$ であるから、2.4 より

$$(2.8) \quad \chi_{\mathbb{G}}(\alpha)(\alpha) = \epsilon_N(R(\alpha_N)\alpha)$$

を得る。従って通常群指標は $R(\mathbb{G})$ の関手性と様々な N に対する環準同型 $\epsilon_N: R(\mathbb{Z}/N) \rightarrow \mathbb{C}$ とから構成することができる。

そこでこの類似を $K(n)^*(B\mathbb{G})$ と $cl_{n,p}(\mathbb{G})$ に対して考える。

まず $\alpha \in \text{Hom}(\mathbb{Z}_p^n, \mathbb{G})$ とする。 α は分解

$$(2.9) \quad \alpha: \mathbb{Z}_p^n \rightarrow (\mathbb{Z}/p^n)^n \xrightarrow{\alpha_N} \mathbb{G}$$

を持つか、 $R(\mathbb{Z}/N)$ に対応するのは $K(\widehat{u})^*(B(\mathbb{Z}/p^n)^n)$ であるが、
これについては次の結果が成立する。

定理 2.10 (cf [4]) $K(\widehat{u})^*$ -代数の同型

$$K(\widehat{u})^*(B(\mathbb{Z}/p^n)^n) \cong K(\widehat{u})^*[[x_1, \dots, x_n]] / ([p^n](x_1), \dots, [p^n](x_n))$$

が存在する。ただし $[p^n](x_i) = x_i +_{F_n} \dots +_{F_n} x_i$ (p^n 個) で F_n は $K(\widehat{u})$ に付随する形式群とする。

次に環準同型 $e_N: K(\widehat{u})^*(B(\mathbb{Z}/p^n)^n) \rightarrow \mathbb{C}_p$ を定義することを考える。ここで 1 の原始 N 乗根 $e^{2\pi i/N}$ に対応するものは $[p^n](x) = 0$ の m_p における“原始”根である。これに関しては Lubin-Tate [3] の結果が存在するが、それを述べるために可換群 $F_n(m_p)$ を導入する。任意の $a, b \in m_p$ に対して $a +_{F_n} b$ は m_p の元を与えるから m_p に $+_{F_n}$ を加法とする可換群の構造が入るが、この群を $F_n(m_p)$ と書くことにする。このとき $[p^n](x) = 0$ の m_p における根

は $F_n(m_p)$ の位数 p^n の元に他ならない。いま $\text{Tor} F_n(m_p)$ を $F_n(m_p)$ のねじれ部分群とすると, F_n の p 級数 $[p](X)$ が合同式 $[p](X) \equiv v_n X^{p^n} \pmod{p}$ (すなわち F_n の高士が n) を満たすことから次を得る。

定理 2.11 ([3]) 可換群の同型

$$\text{Tor} F_n(m_p) \cong (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^n$$

が成立する。

上の定理の同型を一つ固定し, その同型で $(0, \dots, 0, \overset{j}{\frac{1}{p^i}}, 0, \dots, 0) \in (\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p)^n$ に対応する $F_n(m_p)$ の元も e_{ij} と書くことにすると明らかに

$$(2.12) \quad \begin{cases} [p^i](e_{ij}) = 0 \\ [p](e_{i+1,j}) = e_{ij} \end{cases}$$

が成立する。そこで環準同型

$$(2.13) \quad \varepsilon_N: K(\widehat{n})^*(B(\mathbb{Z}/p^N)^n) \longrightarrow \mathbb{C}_p$$

を $e_N(x_i) = e_{N,i}$ で定義する。ただし 2.10 により, $K(\widehat{n})^*(B(\mathbb{Z}/p^N)^n)$ を $K(\widehat{n})^*[[x_1, \dots, x_n]] / ([p^N](x_1), \dots, [p^N](x_n))$ と同一視した。この e_N を用いて

$$(2.14) \quad \chi_{\mathbb{F}}: K(\widehat{n})^*(B\mathbb{F}) \rightarrow \mathcal{O}_{n,p}(\mathbb{F})$$

を次で定義する。 $x \in K(\widehat{n})^*(B\mathbb{F})$, $\alpha \in \text{Hom}(\mathbb{Z}_p^n, \mathbb{F})$, $\alpha: \mathbb{Z}_p^n \rightarrow (\mathbb{Z}/p^N)^n \xrightarrow{\alpha_N} \mathbb{F}$ に対して,

$$(2.15) \quad \chi_{\mathbb{F}}(x)(\alpha) = e_N((B\alpha_N)^* x) \in \mathbb{C}_p$$

$((B\alpha_N)^*: K(\widehat{n})^*(B\mathbb{F}) \rightarrow K(\widehat{n})^*(B(\mathbb{Z}/p^N)^n))$ とする。まず $\chi(x)(\alpha) \in \mathbb{C}_p$ が α の分解のしかたによらないことを示す。いま $\alpha: \mathbb{Z}_p^n \rightarrow (\mathbb{Z}/p^N)^n \xrightarrow{\alpha_N} \mathbb{F}$ ($M > N$ と仮定する) と書けたとすると, $\alpha_M: (\mathbb{Z}/p^M)^n \xrightarrow{\pi_{NM}} (\mathbb{Z}/p^N)^n \xrightarrow{\alpha_N} \mathbb{F}$ (π_{NM} は自然な射影) であって, さらに次の補題が成立する。

補題 2.16 $(B\pi_{NM})^*: K(\widehat{n})^*(B(\mathbb{Z}/p^N)^n) \rightarrow K(\widehat{n})^*(B(\mathbb{Z}/p^M)^n)$ は $(B\pi_{NM})^* x_i = [p^{M-N}](x_i)$ で与えられる。ただし, $K(\widehat{n})^*(B(\mathbb{Z}/p^M)^n) = K(\widehat{n})^*[[x_1, \dots, x_n]] / ([p^M](x_1), \dots, [p^M](x_n))$, $K(\widehat{n})^*(B(\mathbb{Z}/p^N)^n) = K(\widehat{n})^*[[x_1, \dots, x_n]] / ([p^N](x_1), \dots, [p^N](x_n))$ とする。

一方 2.12 の第二式より

$$(2.17) \quad [p^{M-N}](e_M(\alpha_i)) = e_N(\alpha_i)$$

が成立する。2.16, 2.17 及び $\alpha_M = \alpha_N \pi_{NM}$ を用いれば, 簡単な計算により, 任意の $\chi \in K(\hat{n})^*(B\mathfrak{g})$ に対して

$$(2.18) \quad e_M((B\alpha_M)^*\chi) = e_N((B\alpha_N)^*\chi)$$

が示せるから, 従って $\chi(\alpha)(\alpha) \in \mathbb{C}_p$ は α の分解のしかたによらず定まる。また任意の $g \in G$ に対して $\chi(\alpha)(g\alpha) = \chi(\alpha)(\alpha)$ は $Bg \simeq 1_{Bg}: B\mathfrak{g} \rightarrow B\mathfrak{g}$ より明らかなに成り立つので, 2.14 の写像は確かに定義される。この写像が環準同型で, G に関して自然であることは容易にわかるので次を得る。

命題 2.17 Group から Ring への関手の自然変換

$$\chi_G: K(\hat{n})^*(B\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{O}_{np}(G)$$

が存在する。

ここで定義した π が induction と可換, すなわち Mackey 関手の間の自然変換になっていること, 及び π が同型 $\pi_G \otimes C_p: K(\hat{G})^*(B\hat{G}) \otimes C_p \rightarrow C_{n,p}(G)$ を誘導することの証明には, ここでは立ち入らないことにするが, いずれも G が可換群の場合に帰着させて証明することを注意しておく。 $\pi \otimes C_p$ が同型であることの証明も G が可換群の場合に帰着させるのに次の結果が用いられる。

定理 2.20 ([2]) E を任意の複素向き付けられたコホモロジー理論, G を有限群とすると, 自然な写像

$$E^*(B\hat{G}) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}] \longrightarrow \lim_{A(G)} E^*(BA) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{|G|}]$$

は同型。ただし $A(G)$ は G の可換部分群を対象とし, 制限写像と G の共役作用により生成される射を持つ圏とする。

3. 高次元指標に関する問題 最後に高次元指標に関する問題を二つ上げることとする。まず第一のものは, $\pi_G: K(\hat{G})^*(B\hat{G}) \rightarrow C_{n,p}(G)$ が単射であるかどうかということであるがこれについては次の予想がある。

予想3.1 ([2]) 任意の有限群 G に対して $K(\hat{n})^*(BG)$ の各部分加群は自明である。すなわち $\pi_G: K(\hat{n})^*(BG) \rightarrow \mathcal{O}_{np}(G)$ は単射。

上の予想は G が可換群, 対称群, またはある種の Lie 型の有限群等について正しいことが確かめられているが, 現在までのところ一般の G に対する証明は得られていない。

予想3.1が正しいと $K(\hat{n})^*(BG)$ は $\mathcal{O}_{np}(G)$ のある最大 $K(\hat{n})^*$ -格子と同一視できるが, $\mathcal{O}_{np}(G)$ の部分 $K(\hat{n})^*$ -代数で最大 $K(\hat{n})^*$ -格子になっているものの環構造が一意的でないことはすぐにわかるので, 次の問題も考えることに意味がある。

問題3.2 $\text{Im } \pi_G \subset \mathcal{O}_{np}(G)$ の $K(\hat{n})^*$ -代数としての構造を代数的に記述すること。(例えば, $R(G)$ の構成に比較しうるような $\text{Im } \pi_G$ の構成法を与えること。)

上記問題を考えることは Morava K 理論を理解する上で重要なことのように思われる。

参考文献

[1] M. Atiyah: Characters and cohomology of finite groups. Publ. Math. IHES 9

(1961), 23-64.

[2] M. Hopkins, N. Kuhn, D. Ravenel : Generalized group characters and complex oriented cohomology theories. Preprint 1989.

[3] J. Lubin, J. Tate : Formal complex multiplication in local fields. Ann. of Math. 81 (1965), 296-302.

[4] D. Ravenel, S. Wilson : The Morava K-theories of Eilenberg-MacLane spaces and the Conner-Floyd conjecture. Amer. J. Math. 102 (1980), 691-748.