

Power Cone Programming の弱双対定理

小崎 敏寛*

ステラリンク株式会社 (Stera Link, Co., Ltd.)

概要

Power Cone Programming[1] を考える. この問題を徐々に一般化した 3 つの問題に対して, 弱双対定理を証明する. その後, 目的関数に凸二次関数にした 4 つの問題を考え, 弱双対定理を証明する.

1 はじめに

Power Cone Programming[1] は次の問題

$$\begin{aligned}
 & \min c^T x \\
 & \text{s.t. } Ax = b \\
 & \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \geq |z| \\
 & x \in \{(x_i, z) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}\} \\
 & \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad 0 < \alpha_i < 1 \quad i = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{P}$$

双対問題は次のようになる.

$$\begin{aligned}
 & \max b^T y \\
 & \text{s.t. } A^T y + s = c \\
 & \prod_{i=1}^n \left(\frac{s_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \geq |t| \\
 & s \in \{(s_i, t) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}\} \\
 & \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad 0 < \alpha_i < 1 \quad i = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{D}$$

*toshihirokosaki@gmail.com

目的関数の差は次のようになる.

$$\begin{aligned}
 c^T \mathbf{x} - b^T \mathbf{y} &= (A^T \mathbf{y} + \mathbf{s})^T \mathbf{x} - (A\mathbf{x})^T \mathbf{y} \\
 &= \mathbf{x}^T \mathbf{s} \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i s_i + zt \\
 &\geq \sum_{i=1}^n x_i s_i - \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i s_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

1つ目の不等号は錐に入っていることより, 2つ目の不等号は相加相乗平均の不等式よりなりたつ. したがって, 弱双対定理がなりたつ.

2 ユークリッドノルムのとき

絶対値をユークリッドノルムに一般化した次の問題を考える.

$$\begin{aligned}
 &\min c^T \mathbf{x} \\
 &\text{s.t. } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
 &\quad \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \geq \|\mathbf{z}\|_2 \\
 &\quad \mathbf{x} \in \{(x_i, z_j) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^m\} \\
 &\quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad 0 < \alpha_i < 1 \quad i = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{P-2}$$

双対問題は次のようになる.

$$\begin{aligned}
 &\max b^T \mathbf{y} \\
 &\text{s.t. } A^T \mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{c} \\
 &\quad \prod_{i=1}^n \left(\frac{s_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \geq \|\mathbf{t}\|_2 \\
 &\quad \mathbf{s} \in \{(s_i, t_j) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^m\} \\
 &\quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad 0 < \alpha_i < 1 \quad i = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{D-2}$$

目的関数の差は次のようになる.

$$\begin{aligned}
 c^T x - b^T y &= (A^T y + s)^T x - (Ax)^T y \\
 &= x^T s \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i s_i + \sum_{j=1}^m z_j t_j \\
 &\geq \sum_{i=1}^n x_i s_i - \|z\|_2 \|t\|_2 \\
 &\geq \sum_{i=1}^n x_i s_i - \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i s_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

1つ目の不等号はコーシーシュワルツの不等式より, 2つ目の不等号は錐に入っていることより, 3つ目の不等号は相加相乗平均の不等式よりなりたつ. したがって, 弱双対定理がなりたつ.

3 Lp ノルムするとき

ノルムを Lp ノルムに一般化した次の問題を考える.

$$\begin{aligned}
 &\min c^T x \\
 &\text{s.t. } Ax = b \\
 &\quad \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \geq \|z\|_p \\
 &\quad x \in \{(x_i, z_j) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^m\} \\
 &\quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad 0 < \alpha_i < 1 \quad i = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{P-p}$$

双対問題は次のようになる.

$$\begin{aligned}
 &\max b^T y \\
 &\text{s.t. } A^T y + s = c \\
 &\quad \prod_{i=1}^n \left(\frac{s_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \geq \|t\|_q \\
 &\quad s \in \{(s_i, t_j) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^m\} \\
 &\quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad 0 < \alpha_i < 1 \quad i = 1, \dots, n.
 \end{aligned} \tag{D-p}$$

ただし, $p \geq 1$ の有理数で, q は $1/p + 1/q = 1$ をみたす定数.

目的関数の差は次のようになる.

$$\begin{aligned}
c^T x - b^T y &= (A^T y + s)^T x - (Ax)^T y \\
&= x^T s \\
&= \sum_{i=1}^n x_i s_i + \sum_{j=1}^m z_j t_j \\
&\geq \sum_{i=1}^n x_i s_i - \|z\|_p \|t\|_q \\
&\geq \sum_{i=1}^n x_i s_i - \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i s_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

1つ目の不等号はヘルダーの不等式より, 2つ目の不等号は錐に入っていることより, 3つ目の不等号は相加相乗平均の不等式よりなりたつ. したがって, 弱双対定理がなりたつ.

4 一般のノルムするとき

ノルムを一般のノルム $f(\cdot)$ [2] に一般化した次の問題を考える.

$$\begin{aligned}
&\min c^T x \\
&\text{s.t. } Ax = b \\
&\quad \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \geq f(z) \\
&\quad x \in \{(x_i, z_j) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^m\} \\
&\quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad 0 < \alpha_i < 1 \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{P-n}$$

双対問題は次のようになる.

$$\begin{aligned}
&\max b^T y \\
&\text{s.t. } A^T y + s = c \\
&\quad \prod_{i=1}^n \left(\frac{s_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \geq f^D(t) \\
&\quad s \in \{(s_i, t_j) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^m\} \\
&\quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad 0 < \alpha_i < 1 \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{D-n}$$

ただし, f^D は f の双対ノルム [2] で,

$$f^D(y) := \max_{f(x)=1} |x^T y| \tag{1}$$

と定義される.

目的関数の差は次のようになる.

$$\begin{aligned}
c^T x - b^T y &= (A^T y + s)^T x - (Ax)^T y \\
&= x^T s \\
&= \sum_{i=1}^n x_i s_i + \sum_{j=1}^m z_j t_j \\
&\geq \sum_{i=1}^n x_i s_i - f(z) f^D(t) \\
&\geq \sum_{i=1}^n x_i s_i - \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i s_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

1 つ目の不等号は双対ノルムの定義より, 2 つ目の不等号は錐に入っていることより, 3 つ目の不等号は相加相乗平均の不等式よりなりたつ. したがって, 弱双対定理がなりたつ.

5 Quadratic Power Cone Programming

目的関数に凸二次関数を考える.

$$\begin{aligned}
&\min \frac{1}{2} x^T Q x + c^T x \\
&\text{s.t. } Ax = b \\
&\quad \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \geq |z| \\
&\quad x \in \{(x_i, z) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}\} \\
&\quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad 0 < \alpha_i < 1 \quad i = 1, \dots, n, \quad Q \in \mathcal{S}_+^n.
\end{aligned} \tag{PQ}$$

双対問題は次のようになる.

$$\begin{aligned}
&\max b^T y - \frac{1}{2} x^T Q x \\
&\text{s.t. } A^T y + s - Qx = c \\
&\quad \prod_{i=1}^n \left(\frac{s_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \geq |t| \\
&\quad s \in \{(s_i, t) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}\}
\end{aligned} \tag{DQ}$$

主問題の実行可能解 x と双対問題の実行可能解 (y, x', s) について, 目的関数の差は次のように

なる。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + c^T \mathbf{x} - (b^T \mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{x}'^T Q \mathbf{x}') &= (A^T \mathbf{y} + \mathbf{s} - Q \mathbf{x}')^T \mathbf{x} - (A \mathbf{x})^T \mathbf{y} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'^T Q \mathbf{x}' \\
&= \mathbf{x}^T \mathbf{s} + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^T Q (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&= \sum_{i=1}^n x_i s_i + zt + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^T Q (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&\geq \sum_{i=1}^n x_i s_i - \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i s_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^T Q (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

1つ目の不等号は錐に入っていることより，2つ目の不等号は相加相乗平均の不等式と行列 Q の半正定値性よりなりたつ。したがって，弱双対定理がなりたつ。

6 ユークリッドノルムするとき

絶対値をユークリッドノルムに一般化した次の問題を考える。

$$\begin{aligned}
&\min \frac{1}{2}\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + c^T \mathbf{x} \\
&\text{s.t. } A \mathbf{x} = b \\
&\quad \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \geq \|\mathbf{z}\|_2 \\
&\quad \mathbf{x} \in \{(x_i, z_j) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^m\} \\
&\quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad 0 < \alpha_i < 1 \quad i = 1, \dots, n, \quad Q \in \mathcal{S}_+^n.
\end{aligned} \tag{PQ-2}$$

双対問題は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\max b^T \mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} \\
&\text{s.t. } A^T \mathbf{y} + \mathbf{s} - Q \mathbf{x} = c \\
&\quad \prod_{i=1}^n \left(\frac{s_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \geq \|\mathbf{t}\|_2 \\
&\quad \mathbf{s} \in \{(s_i, t_j) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^m\} \\
&\quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad 0 < \alpha_i < 1 \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{DQ-2}$$

主問題の実行可能解 $\mathbf{x}$ と双対問題の実行可能解 $(\mathbf{y}, \mathbf{x}', \mathbf{s})$ について，目的関数の差は次のように

なる.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + c^T \mathbf{x} - (b^T \mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{x}'^T Q \mathbf{x}') &= (A^T \mathbf{y} + \mathbf{s} - Q \mathbf{x}')^T \mathbf{x} - (A \mathbf{x})^T \mathbf{y} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'^T Q \mathbf{x}' \\
&= \mathbf{x}^T \mathbf{s} + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^T Q (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&= \sum_{i=1}^n x_i s_i + \sum_{j=1}^m z_j t_j + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^T Q (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&\geq \sum_{i=1}^n x_i s_i - \|\mathbf{z}\|_2 \|\mathbf{t}\|_2 + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^T Q (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&\geq \sum_{i=1}^n x_i s_i - \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i s_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^T Q (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

1 つ目の不等号はコーシーシュワルツの不等式より, 2 つ目の不等号は錐に入っていることより, 3 つ目の不等号は相加相乗平均の不等式と行列 Q の半正定値性よりなりたつ. したがって, 弱双対定理がなりたつ.

7 Lp ノルムするとき

ノルムを Lp ノルムに一般化した次の問題を考える.

$$\begin{aligned}
&\min \frac{1}{2}\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + c^T \mathbf{x} \\
&\text{s.t. } A \mathbf{x} = b \\
&\quad \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \geq \|\mathbf{z}\|_p \\
&\quad \mathbf{x} \in \{(x_i, z_j) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^m\} \\
&\quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad 0 < \alpha_i < 1 \quad i = 1, \dots, n, \quad Q \in \mathcal{S}_+^n.
\end{aligned} \tag{PQ-p}$$

双対問題は次のようになる.

$$\begin{aligned}
&\max b^T \mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} \\
&\text{s.t. } A^T \mathbf{y} + \mathbf{s} - Q \mathbf{x} = c \\
&\quad \prod_{i=1}^n \left(\frac{s_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \geq \|\mathbf{t}\|_q \\
&\quad \mathbf{s} \in \{(s_i, t_j) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^m\} \\
&\quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad 0 < \alpha_i < 1 \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{DQ-p}$$

ただし, $p \geq 1$ の有理数で, q は $1/p + 1/q = 1$ をみたす定数.

主問題の実行可能解 $\mathbf{x}$ と双対問題の実行可能解 $(\mathbf{y}, \mathbf{x}', \mathbf{s})$ について、目的関数の差は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + c^T \mathbf{x} - (b^T \mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{x}'^T Q \mathbf{x}') &= (A^T \mathbf{y} + \mathbf{s} - Q \mathbf{x}')^T \mathbf{x} - (A \mathbf{x})^T \mathbf{y} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'^T Q \mathbf{x}' \\
&= \mathbf{x}^T \mathbf{s} + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^T Q (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&= \sum_{i=1}^n x_i s_i + \sum_{j=1}^m z_j t_j + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^T Q (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&\geq \sum_{i=1}^n x_i s_i - \|\mathbf{z}\|_p \|\mathbf{t}\|_q + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^T Q (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&\geq \sum_{i=1}^n x_i s_i - \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i s_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^T Q (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

1つ目の不等号はヘルダーの不等式より、2つ目の不等号は錐に入っていることより、3つ目の不等号は相加相乗平均の不等式と行列 Q の半正定値性よりなりたつ。したがって、弱双対定理がなりたつ。

8 一般のノルムのとき

ノルムを一般のノルム $f(\cdot)$ [2] に一般化した次の問題を考える。

$$\begin{aligned}
&\min \frac{1}{2}\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + c^T \mathbf{x} \\
&\text{s.t. } A \mathbf{x} = b \\
&\quad \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \geq f(\mathbf{z}) \\
&\quad \mathbf{x} \in \{(x_i, z_j) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^m\} \\
&\quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad 0 < \alpha_i < 1 \quad i = 1, \dots, n, \quad Q \in \mathcal{S}_+^n.
\end{aligned} \tag{PQ-n}$$

双対問題は次のようになる。

$$\begin{aligned}
&\max b^T \mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} \\
&\text{s.t. } A^T \mathbf{y} + \mathbf{s} - Q \mathbf{x} = c \\
&\quad \prod_{i=1}^n \left(\frac{s_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} \geq f^D(\mathbf{t}) \\
&\quad \mathbf{s} \in \{(s_i, t_j) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}^m\} \\
&\quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1, \quad 0 < \alpha_i < 1 \quad i = 1, \dots, n.
\end{aligned} \tag{DQ-n}$$

ただし, f^D は f の双対ノルム [2] で,

$$f^D(\mathbf{y}) := \max_{f(\mathbf{x})=1} |\mathbf{x}^T \mathbf{y}| \quad (2)$$

と定義される.

主問題の実行可能解 $\mathbf{x}$ と双対問題の実行可能解 $(\mathbf{y}, \mathbf{x}', \mathbf{s})$ について, 目的関数の差は次のようになる.

$$\begin{aligned} c^T \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} - (b^T \mathbf{y} - \frac{1}{2} \mathbf{x}'^T Q \mathbf{x}') &= (A^T \mathbf{y} + \mathbf{s} - Q \mathbf{x}')^T \mathbf{x} - (A \mathbf{x})^T \mathbf{y} + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + \frac{1}{2} \mathbf{x}'^T Q \mathbf{x}' \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{s} + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^T Q (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &= \sum_{i=1}^n x_i s_i + \sum_{j=1}^m z_j t_j + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^T Q (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &\geq \sum_{i=1}^n x_i s_i - f(\mathbf{z}) f^D(\mathbf{t}) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^T Q (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &\geq \sum_{i=1}^n x_i s_i - \prod_{i=1}^n \left(\frac{x_i s_i}{\alpha_i} \right)^{\alpha_i} + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^T Q (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

1 つ目の不等号は双対ノルムの定義より, 2 つ目の不等号は錐に入っていることより, 3 つ目の不等号は相加相乗平均の不等式と行列 Q の半正定値性よりなりたつ. したがって, 弱双対定理がなりたつ.

9 結論と今後の課題

Power Cone Programming を一般化した 3 つの問題と目的関数を凸二次関数とした 4 つの問題に対して弱双対定理を証明した. 今後の課題としては, 強双対定理がなりたつか調べること, 問題を解くアルゴリズムを考えることがある.

参考文献

- [1] Peter R. Chares, Cones and Interior-Point Algorithm for Structured Convex Optimization involving Powers and Exponentials, Ph.D. thesis, Universite catholique de Louvain Ecole Polytechnique de Louvain, 2007.
- [2] Roger A. Horn and Chrles R. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge University Press, 2007.