

符号理論の實用上の諸問題

日 電 中 研 岩 垂 好 裕

§ 1. 序

符号理論は最初 Shannon の雑音のある通信路に於ける符号化定理⁽¹⁾と具体的に実現する手段を求める目的では定められたと考えられるが、現在のところ代数的手法を用いる符号化、復号法によってはこの定理を満す符号は求められている。然レ乍ら符号理論の實用化を考える場合には、所詮通報の長さを無限に大きくするわけにいかず、従来求められている比較的短かつ、能率のよい符号、及び多少能率は劣化しても装置化が簡単になる符号系が主としてその対象に選ばれる。

一 現代社会に於ける要求としては、データ伝送、宇宙通信に於て誤り制御を用いる事は伝送データの信頼度を高める手段として既に常識化して居り、最近の傾向としてはデータ伝送速度の高速化、計算機のオンライン処理と関連していわゆる *forward acting* といわれる誤訂正符号の応用が盛んになりつつある。⁽²⁾⁽³⁾

誤り制御は復号の時間遅れ、コストの増大等の代償として

データの信頼度を高める事を目的としてゐるから、誤り制御方式は通信系全体のシステム、デザインの一環として定めるのが妥当であろう。然し乍ら従来情報理論、符号理論によって得られた結果が通信方式設計に取り入れられる事は稀で、誤り制御も方式設計の一環としてよりもむしろ独立したテクニックとして扱われて来た傾向にある。

本稿に於てはこのような傾向に着目し、誤り制御を通信システム・デザインの一環として扱う事を可能にする基礎概念を明らかにする事を目的とし、変調と符号化の関係、信号対雑音比と誤り率の関係、尖頭電圧対雑音比と誤り率の关系到符号化が如何なる影響を及ぼすかを検討する爲、位相変調方式及び多相位相変調同期検波方式に符号化を行つた場合について得られる種々の結果について述べる事とする。

§ 2. 変調と符号化⁽⁴⁾

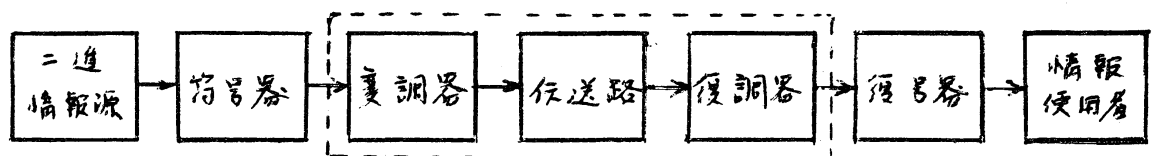


図1 通信系のモデル

誤り制御系の設計の基礎として用いられる通信系のモデルは図1に示され、この場合の最大の問題点は広義の変調と

誤り制御機能の分離である。現段階に於てはこれがどれだけの通信伝送能率の劣化を招くかは理論上明らかであるが、実用上便宜的にこの分離を行うのが普通である。従って変調と符号化の問題は、

(1) 伝送の変調; AM, PM等の狭義の変調, 波形生成, 波形伝送, 信号検出, 符号間干渉, 多値符号化, 伝送歪 etc.

(2) 符号化; 誤り制御に類別される。

ディジタル通信系の効率を表すパラメータとしては、1情報ビットの伝送に必要な受信エネルギー対雑音比 E_b/N_0 , 尖頭電圧対雑音比 C/N , 帯域と伝送速度の関係を示す W/R があり、此等のパラメータと誤り率の関係によつてディジタル通信系の効率が示される。

此等のパラメータのうち E_b/N_0 は変調と符号化の兼ね合いを表すものである事が次のように見てわかる。第1図の通信系の受信々々電力を S , 片側白色雑音を N_0 , 伝送速度 R , 1情報ビットの伝送に必要な受信エネルギーとすれば

$$E_b/N_0 = (S/N_0) \cdot (1/R) \quad (1)$$

で与えられる事がわかる。⁽⁴⁾ 第1図のモデルで各 T 秒に M 個の相異なる信号の1つが伝送されるとすれば、1つの波形あたりの伝送速度は、

$$R = R_T \quad (\text{bit/waveform}) \quad (2)$$

で表され、 $E_r = S T$ を受信波形あたりのエネルギーとすれば

$$(E_b/N_0) = (E_r/N_0) \cdot (1/R) \quad (3)$$

で表される。

電話線に於けるデータ伝送では、伝送速度 R は回線の符号間干渉によって定められ、又逐次復号法を用いた通信回線では R は平均計算数が収斂する最大の伝送速度 R_{comp} によって上限され、此処で R_{comp} は回線の性質によって定められる値である。このように変調方式及び回線の性質によって定められる伝送速度を $R_{\text{max}} (\text{bit/waveform})$ とすれば、誤り制御機構を有する通信系に対しては

$$E_b/N_0 = \gamma = (E_r/N_0) \cdot (1/R_{\text{max}}) \quad (4)$$

が成立し、此処で γ は広義の変調方式のみによって定められ、誤り制御の爲の符号化、復号法とは独立な量になる。

誤り制御の爲の符号化を行うと、その伝送速度 R は R_{max} より小となり、従って

$$\alpha = R/R_{\text{max}} \quad (5)$$

とかけば

$$E_b/N_0 = \gamma/\alpha \quad (6)$$

が成立する。そこで通信系の設計としては装置化の複雑さと誤り率等の条件の下に、 γ を出来るだけ小さくし、 α を出来る

るだけ大きくする設計が望まれる。

E_b/N_0 は二のように変調と符号化の通信方式設計上の等価性を与える重要なパラメータである。更に宇宙通信の場合のように微弱な信号電力を有効に利用して情報伝送を行う場合の基本パラメータを与えるものとなる。これに対して地上の通信に於ては、回線の過負荷等の要求から尖頭電力は厳しく制限されるが、伝送に必要な全体の信号電力に対する要求はゆるい場合が多い。このような場合のパラメータとしては C/N が適当であり、従って通信方式設計上 E_b/N_0 と C/N の二つのパラメータを併用する事が望ましいと考えられる。帯域を表すパラメータ W/R は、宇宙通信の場合にはさきおいて大きくとられるが、地上の通信の多くは帯域制限であり、小さな値に制限される事が多い。

§ 3. 位相変調方式と符号化

位相変調方式は Viterbi⁽¹⁵⁾ によつて宇宙通信に於ける直交符号の応用に関して詳しく論じられているので詳細を省き、その概略を述べて直交符号と代数的復号法による符号の比較を行う。

$M=2^k$ 個の信号と T 秒の時間に W Hz の帯域を持つ伝送路を用いて伝送する。各信号は厳密に T 秒に限られ、この区間

で信号は各 T/n 秒の n 個の部分区間に分けられ、この各々に継続時間 $1/n$ 秒の信号

$$S_0(t) = \sqrt{2S} \cos(\alpha \pi n/T) t \quad (7)$$

$$S_1(t) = -\sqrt{2S} \cos(\alpha \pi n/T) t \quad (8)$$

を送送する。この信号の搬送波は平衡変調器又は $\pm 90^\circ$ の位相変調で実現出来る。

受信側では直交符号は相関受信により、符号化される場合及び代数的復号法による符号はビット毎の判定を行うものとする。

(1) 直交符号の誤り率

$$1 - P_B = P_C = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-v^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \operatorname{erf}\left(v + \sqrt{\frac{2ST_B}{N_0}}\right) \right\}^{M-1} dv \quad (9)$$

(2) 符号化される場合の誤り率

はビットの伝送で

$$P_C = 1 - P_B = \left(\operatorname{erf} \sqrt{\frac{2ST_B}{N_0}} \right)^L \quad (10)$$

$$\text{但し } T_B = T/n \text{ sec/bit} \quad (11)$$

(3) 代数的符号を用いた場合の誤り率

符号長 n , 情報ビット数 k , 訂正ビット数 t の符号を (n, k, t) で表せば、

$$P_B \approx \frac{n!}{(t+1)!(n-t-1)!} P_E^{t+1} = \frac{n!}{(t+1)!(n-t-1)!} \left(1 - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{2ST_B}{N_0} \frac{k}{n}} \right)^{t+1} \quad (12)$$

供し以上よりすれば

P_c : 1つのブロックが正しく受信される確率

P_E : 1つの伝送ビットが誤る確率

P_B : 1つのブロックが誤って受信される確率

と与えられる。帯域を表すパラメータは

$$W/R = n/2 \log_2 M = n/2 \log_2 16 \quad (13)$$

で与えられる。そして $E_b/N_0 = 5E_B/N_0$ とする。

まず BCH 符号と参考、 $n=100$ 前後を持つ $(127, 120, 1)$, $(127, 114, 2)$, $(127, 106, 3)$ 及び $(127, 99, 4)$ の符号と符号化する際の E_b/N_0 とブロック誤り率をオ2図に示す。この図からわかる様に τ が比較的小さい場合、同じ誤り率を得る為の E_b/N_0 が改善される。符号化する際の E_b/N_0 に対する改善度を db で表して符号化利得 (coding gain) という事にすれば、 $\tau \leq 4$ の場合の符号化利得は $2.5 \sim 4.5 db$ 。又 W/R の値は

符号化する、 $(127, 120, 1)$, $(127, 114, 2)$, $(127, 106, 3)$, $(127, 99, 4)$

W/R	0.5	0.53	0.55	0.6	0.64
-------	-----	------	------	-----	------

で、通交符号の $W/R = 5 \times 10^{-7}$ に比してきわめて小さい。即ちわずかな帯域の拡大で数 db の利得を得る事が出来る。

オ2図は又変調と符号化の役割を明確に示している。即ちオ2図で符号化する際の E_b/N_0 の曲線は、符号間干渉等の伝送歪の無い場合の値を示し、ビット毎の信号検出方式や誤差の差

調方式に依存してゐる。そして伝送歪等が存在するとその場合の誤り率は符号化その場合の曲線の上側にプロットされ、伝送歪除去の努力は、この誤り率を出来るだけ理想的な符号化その場合の曲線に近づける事を意味する。これに對し符号化を行う事は誤り率を符号化するその場合より更に低くする効果を持つわけである。

第2図では $k=3$ と $k=4$ の場合の誤り率が殆んど等しくなつてゐるが、一般に k がある値以上に保ち、冗長ビット数を増加せると如何なる振舞をするかは興味があらう。更に符号理論に於ては最大系列長符号や、これと主眼を類似した骨子込み一様符号は宇宙通信への応用が有望であるとされてゐる。⁽¹⁰⁾ 最大系列長符号は $(2^k-1, k, 2^{k-2}-1)$ 符号があり、与えられた符号長に對して最大のハミング距離を持つ。従つてこの符号は直交符号と同一の帯域を占有し、且伝送的復号誤によるこのような低伝送速度を持つ符号の能力の限界を示すと考えられる。

最大系列長符号に對しては(12)式から

$$\begin{aligned}
 P_B &\approx \frac{(2^k-1)!}{(2^{k-1})!(2^k-1-2^{k-2})!} (1 - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{2.5 N_b}{N_c} \frac{k}{2^k-1}})^{2^{k-2}} \\
 &= \frac{(2^k)!}{(2^{k+1})! (3 \cdot 2^{k-2})!} \cdot \frac{3}{4} \cdot (1 - \operatorname{erf} \sqrt{\frac{2.5 N_b}{N_c} \frac{k}{2^k-1}})^{2^{k-2}} \quad (14)
 \end{aligned}$$

が成立する。Stirlingの式

$$\ln n! = \frac{1}{2} \ln 2\pi - n + (n + \frac{1}{2}) \ln n \quad (15)$$

を用いれば

$$\ln P_B = 2^{k-1} \left[8 \ln 2 - 3 \ln 3 + \ln \left(1 - \exp \sqrt{\frac{2ST_0}{N_0}} \frac{k}{2^k - 1} \right) \right] \quad (16)$$

を得、 $\ln P_B = 0$ 即ち $P_B = 1$ (但し此処では近似計算のため $\ln P_B < 0$ 即ち $P_B = 1$ とする。), $\ln P_B < 0$ 即ち $P_B < 1$ とあるから、(16)式を解いて $P_B < 1$ とする ST_0/N_0 は

$$ST_0/N_0 > 0.98 (2^k - 1)/k \quad (17)$$

となり、明らかに $k \rightarrow \infty$ の時 $ST_0/N_0 \rightarrow \infty$ とする。

次に比較の最低伝送速度の BCH 符号について検討する。BCH パラメータによれば既約の BCH 符号は符号長 $n = 2^m - 1$ となる。高々 m 個のバリティチェックで m 個迄の誤りを訂正出来る。 $m = k$ とすれば $(2^k - 1, k, \frac{2^k - 1}{k})$ 符号を得る。従って

$$P_B \approx \frac{n!}{\left(\frac{2^k - 1}{k}\right)! \left(n - \frac{2^k - 1}{k}\right)!} P_E^{\frac{2^k - 1}{k}} \quad (18)$$

前と同様に $\ln$ ととり Stirling の式を用いて k を代入して

$$\ln P_B \approx \frac{2^k}{k} \left(\ln \frac{k}{(1 - \frac{1}{k})^{k-1}} + \ln \left(1 - \exp \sqrt{\frac{2ST_0}{N_0}} \frac{k}{2^k - 1} \right) \right) \quad (19)$$

$P_B < 1$ とする ST_0/N_0 は

$$\frac{k}{(1 - \frac{1}{k})^{k-1}} \left(1 - \exp \sqrt{\frac{2ST_0}{N_0}} \frac{k}{2^k - 1} \right) < 1 \quad (20)$$

の解となる。この式から $k \rightarrow \infty$ の時に (20) 式は成立せず。

従ってこの符号も無限大の ST_0/N_0 を要求する事になる。(16) 式

120) 式は α が大の時によく近似される解であるが、その振舞は α が小の時の値を示した予より図から類推されよう。

この図からわかるように、いずれの場合にも $\alpha \rightarrow \infty$ で所要 $STB/\alpha \rightarrow \infty$ となる。即ち此等の符号は直交符号と置換する事が出来る。従って比較的小なる直交符号の組と代数的符号の組合せ、又は逐次復号法との組合せ⁽¹⁷⁾が実用的な宇宙通信方式を構成すると考えられる。

§4 多相位相変調方式と符号化

前1節で述べた様に1情報ビットの伝送に必要な受信エネルギー対雑音比と誤り率との関係を求める事の利便の1つは変調と符号化の問題を同じ基準で論じる事が出来る事にある。そこで多相位相変調方式に符号化を用いて実際に E_b/N_0 と一定の誤り率に於いて改善する場合に生ずる変調と符号化の等価性を明らかにし、併せて多相位相変調方式に符号化を用いる通信方式の意義について検討する。多相位相変調は前1節の議論では明らかに広義の変調方式に属する問題であり、通信回線の信号対雑音比に余裕のある場合、多相化により R_{max} を高める効果を有す。他方多相化を行えば雑音マージンが減少し、一定の誤り率を得る1情報ビットあたりの受信エネルギー対雑音比は多相化レベル $m \geq 3$ の場合に減少する

事は明らかである。そこで多相化による S/N の低下と、誤訂正符号化による S/N の向上とが等しくなるような見方を求めて、この広義の変調に基づく方式と誤訂正方式との等価性を導き出すわけである。

この場合の通信系のモデルは図4回に示すようになる。受

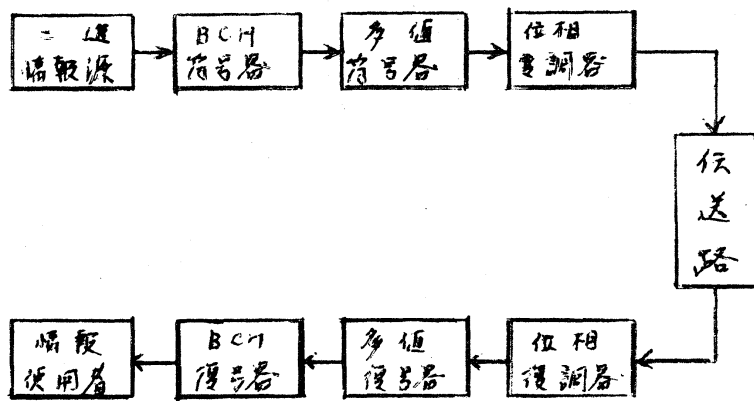


図4回 多相位相変調通信系のモデル

信側では同期検波による復調が行われ、多値符号を二進系列に直した後に BCD 復号器で誤訂正を行い、情報使用者に情報が伝達される。

Cahn⁽¹⁷⁾によれば、位相変調の伝送信号を

$$s(t) = \sqrt{2S} \cos(\omega_0 t + \theta), \quad \theta = \frac{2\pi k}{m}, \quad 0 \leq k \leq m-1 \quad (21)$$

とし、伝送路に加わる白色雑音を

$$n(t) = x(t) \cos \omega_0 t + y(t) \sin \omega_0 t \quad (22)$$

とする。但しここで $x(t)$, $y(t)$ は相互相関関数変数 n で、 $\bar{n} = 0$, $\bar{n}^2 = N$ とする。この時同期検波出力の位相分布は

$$p(\theta) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{N}} e^{-\theta^2/N} \quad |\theta| < \pi/2 \quad (23)$$

$$\approx 0 \quad |\theta| > \pi/2$$

を近似して、 I のシンボルの誤り率 P_s は

$$P_s = 1 - \int_{-\pi/m}^{\pi/m} p(\theta) d\theta = 1 - 2 \operatorname{erfc}\left(\frac{\pi}{m} \sqrt{\frac{2S}{N}}\right) \quad (24)$$

と与えられる。

次に帯域であるが(21)式の信号の振中は帯域制限の場合には θ の変化に対して一定となり得ず、厳密には回線フィルターを含めた考察を行わなければならない。然し此処では簡単の爲に Bennett & Dargy⁽⁵⁾ による多相位相変調の考察と同じく、信号振中一定と仮定して解析を行う。

gray 符号表示された多相符号は、相隣り符号同士は唯一つのビットが異なるという性質がある。レベル数 m が増加し、シンボル誤り率が大きくなると誤りは相隣り合う符号同士の誤りとは限らず、一つ又はそれ以上のビット誤りが生ずる可能性が大きくなって無視出来なす。然し本章に示て行われるように誤り率とビット誤り率をとり、結果的に此等の場合は殆んど $P_b = 1$ の場合に対応して影響を及ぼさす。

(24) 式に表れる S/N は 1 つのシンボルの伝送に必要な S/N であり、(10) 式等に含まれる S/N_b の $T_b = 1$ に正規化した場合の S/N と考えられる。誤訂正符号による多相符号伝送では、1 情報ビットあたりの伝送に必要な受信エネルギー対雑音比を

得る爲には、多相化による補正と、誤訂正符号化の爲に加えられる冗長度の補正を行なわなければならない。後者は帯域制限の場合には時間 T_B を $n/2$ 倍して行われる。此の事から、1情報ビットの伝送に必要な受信エネルギー対雑音比 S/N_0 の db 表示として、

$$10 \log_{10} \frac{S T_B}{N_0} = 10 \log_{10} \frac{S}{N} - 10 \log_{10} m + 10 \log_{10} \frac{n}{2} \quad (25)$$

が得られる。

このようにして計算した信号対雑音比と誤り率と、 $n=10$, $m=4$ の場合を一例にとり表 5 図に示す。又表 6 図に $m=3$ で符号化するレの場合、 $m=4$ で符号化するレと1つの誤り訂正の場合、 $m=5$ で1つ、2つ及び3つの誤り訂正を行った場合の誤り率を示す。この図から $m=3$ で符号化するレの場合と $m=4$ で1つの誤り訂正を行った場合、 $m=4$ で符号化するレの場合と $m=5$ で3つの誤り訂正を行った場合が大体等価である事がわかる。即ち多相レベルを3から4に増やす事で $m=4$ で1つの誤り訂正を行う場合に等価であり、 $m=4$ から5にあずる事は $m=5$ で3つの誤り訂正を行う事に等価である。このようにして一定の誤り率に対して S/N を劣化させる必要の要調の問題である多相符号化と S/N 改善の作用を持つ誤訂正符号の等価性が確立される事になる。又多相位相変調に誤訂正符号を用いる事は、多相化レベル m の変動に伴う S/N 比の

変化に細かり刻み中をうけて通信方式設計上の自由度を増加させる事が出来る点にある。

(25) 式右辺の第3項を除いた値は1伝送ビットの伝送に必要な受信々号エネルギー対雑音比を示す。この値に対する誤り率をオク図に示す。オク図から誤訂正符号を用いると常に一定の誤り率に対して必要な1伝送ビットあたりの受信々号エネルギー対雑音比を改善する事が出来る。この事は伝送パルス1つづつの電力は低く抑えなければならぬが、パルスを繰返して送るに要する全体の電力はあまり問題とならぬ場合、伝送速度の高り低いに不飽誤訂正符号はきわめて有用である事を示す。即ち尖頭電圧と雑音比が通信方式上の大きな制約である場合、きわめて大きな自由度で誤訂正符号の応用が可能になるわけである。

5.5 符号化通信方式設計上の諸問題

以上行われた検討は回線雑音が白色の場合に限られてゐるが、実際の回線ではバースト雑音、バーストとランダム誤りの混在する回線が数多く存在する。従つて符号化通信方式設計にあつては回線の測定によつて発生する雑音をよく確かめてこれに合う誤訂正符号を用いる事が肝要である。バースト性の雑音の場合には回線の測定から訂正すべきバースト長

と最適符号長を持つ冗長度最小の符号を用いる事が、符号の伝送効率を高める点で最適である事が知られている⁽⁹⁾。然し一般に白色ガウス雑音以外の場合の理論的解析は難し。従って第3節、第4節で行われた検討は符号化通信方式設計上のごく限られた問題に対する解答を与えているに過ぎないわけで、その意義は符号化通信方式設計の基本概念とそれと実際の設計に用いる場合の考え方の指標を与える事にあると考えられる。

最後に従来情報理論、符号理論で得られた結果が通信方式設計上あまり用いられるか、其理由の一つは、後者の最大の関心事である変復調器と伝送路と前者は二進符号回路のようにきわめて抽象的なモデルに置きかえる為、得られた結果の持つ意義が通信技術者によく理解されるがった事にあると考えられる。然しこのように抽象化した回路により得られた結果は又通信方式の如何にかかわらず成り立つという利便を持つ。例之はBCK符号はAMには応用出来るがPMには応用出来ない等という事なく、任意の変調方式に応用される。

§ 6. 結論

位相変調方式、多相位相変調方式に符号化を用いた場合の検討を行う、この通信方式上の意義を明らかにした。

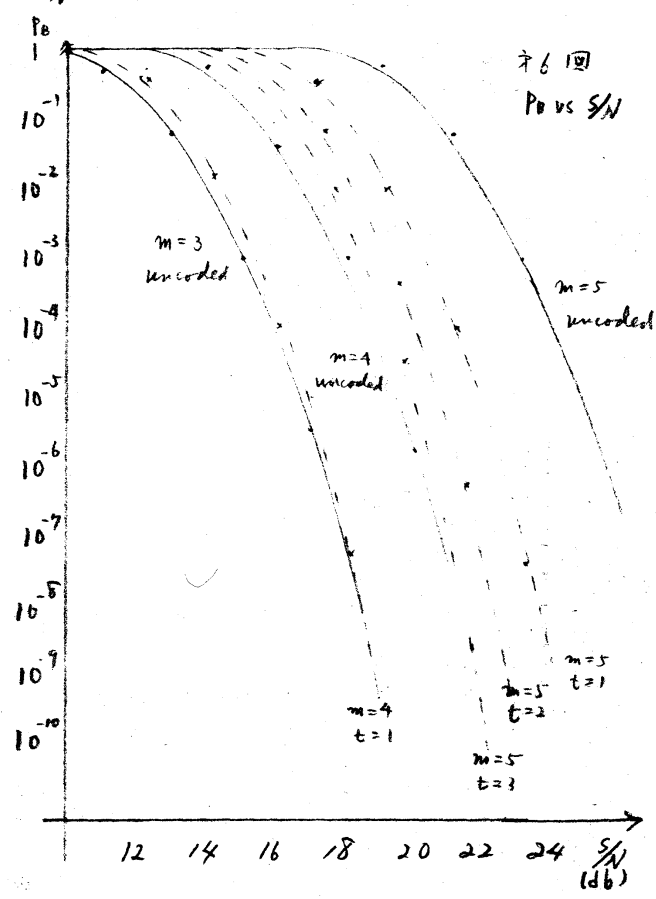
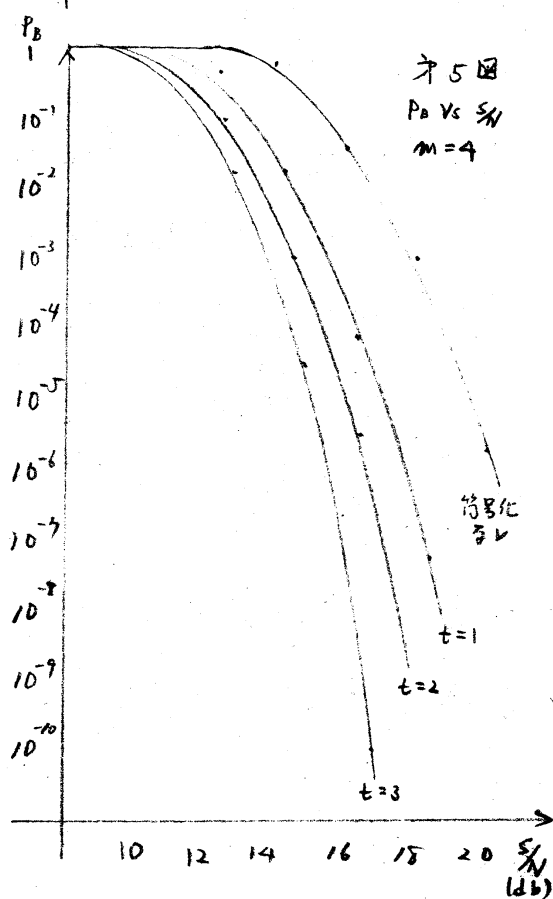
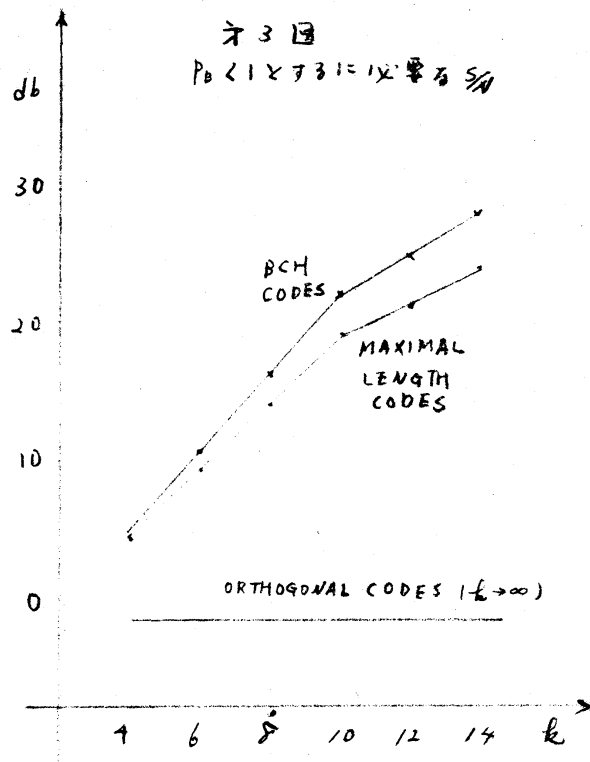
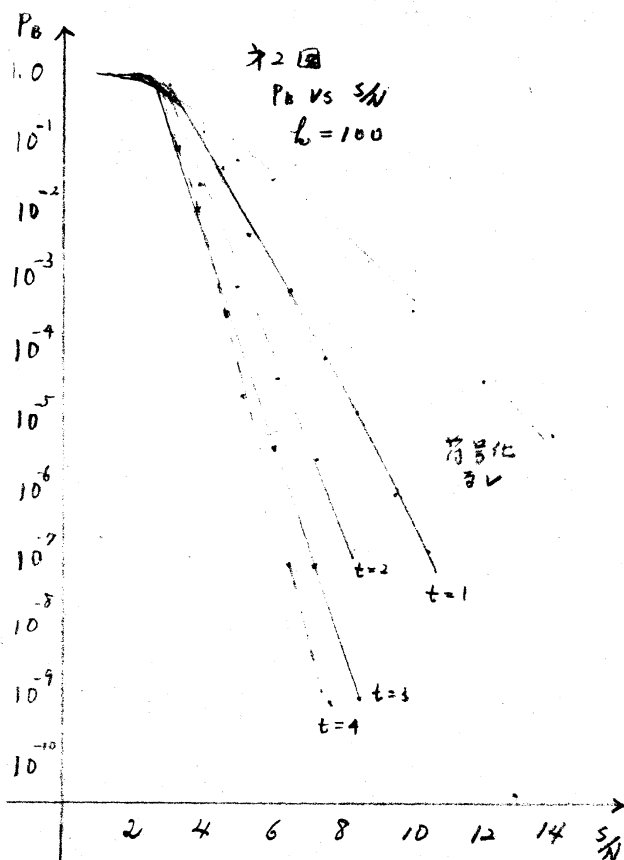
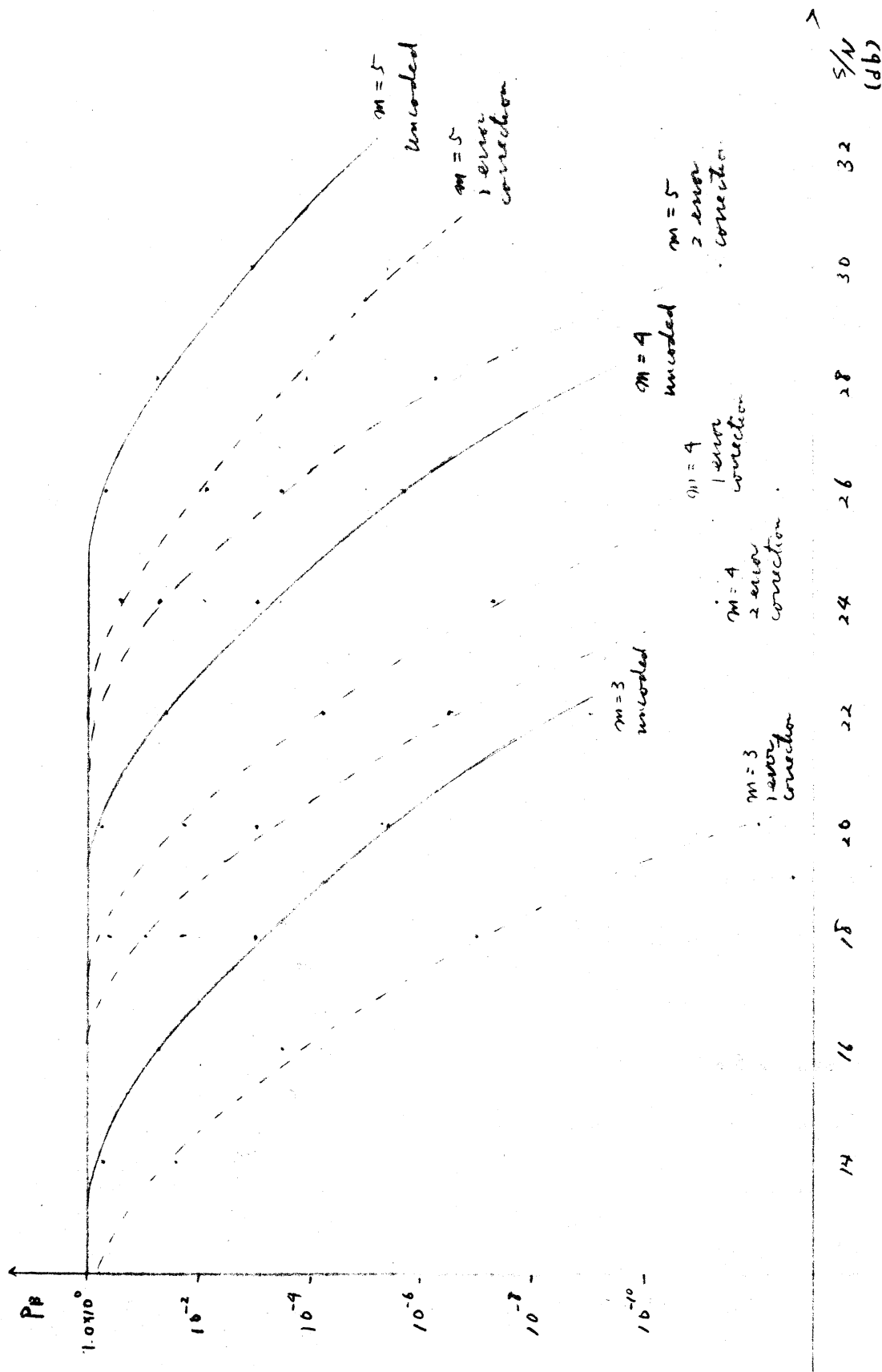


Fig. 7. Prob. of Block Error vs. Peak Signal to Noise Ratio



参考文献

1. C.E. Shannon, "A mathematical theory of communication" B.S.T.J. 27, p. 379-723 & v. p. 623-656, 1948.
2. Univ. of Hawaii, "The ALOHA system", a proposal to the airforce office of scientific research.
3. A.H. Levesque, "Recent development in error control techniques", Signal Processing Techniques in Digital Communication, 1969 Wescon Technical Papers, August 1969.
4. K.L. Jordan, Jr. "The performance of sequential decoding in conjunction with efficient modulation", IEEE Trans. on Comm. Tech. vol. COM-14, pp. 283-297, June 1966.
5. A.J. Viterbi, "Phase-coherent communication over the continuous gaussian channel," in Golomb-edited "Digital communication with space application", Prenticehall 1964.
6. J.L. Massey, "Advances in threshold decoding" in Balakrishnan edited "Advances in communication systems", Academic press, 1968.
7. C.R. Cahn, "Performance of digital phase-modulation communication systems", IRE Trans. Comm. Systems, 7, pp. 3-6, May, 1959.
8. W.R. Bennett & J.R. Davey, "Data Transmission", McGraw-Hill

Book Co., 1965

9. 岩垂好裕 “バー スト訂正符号系の統一の取扱い”, 信学
論 52-A-8号, 昭和44年8月.