

強さ b , 制約数 m , 大きさ N ($130 \leq N \leq 150$) の balanced array の構成

神戸大 教育 白倉 暉弘

§1. 序

処理組合せ N をもつ分解能 VII の 2^m 釣合型一部実施要因計画 (2^m -BFFD) は強さ b , 制約数 m , 大きさ N の balanced array (B -array) からえられることが小本, 白倉, 桑田 [3] に示された。 B -array T はつぎのように定義される。 $m \times N$ $(0,1)$ 行列 T において, T の任意の b 個の行からなる部分行列 T_0 の列に weight i ($i=0,1,\dots,b$) のベクトルが各々 μ_i 回現われる時, T は強さ b , 制約数 m , 大きさ N , index set $\{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_b\}$ の B -array という。又 B -array と関係深い simple array (S -array) についても定義しておく。 $\Omega(j; m)$ ($j=0,1,\dots,m$) を weight j のすべて異なる $(0,1)$ ベクトル $\binom{m}{j}$ 個の列からなる $m \times \binom{m}{j}$ 行列とする。そのとき各々 $\Omega(j; m)$ を λ_j (≥ 0) 個並べて得られる行列はパラメータ $(m; \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ をもつ S -array とよばれる。明らかに上記の S -array は

強さ b , 制約数 m , 大きさ $N = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \lambda_j$, indices $\mu_i = \sum_{j=0}^m \binom{m-b}{j-i} \lambda_j$ の B -array である。しかし逆はかならずしも云えない。ここでは $130 \leq N \leq 150$ を満たす分解能 VII の 2^9 -BFFD を生ずる B -array はすべて S -array であることを示す。 $m=6, 7, 8$ の B -array の構成に対しては、白倉 [1, 2] を参照のこと。くりかえしをさけるために、特にことわらない限り、ここでは B -array は強さ b , 制約数 $m=9$, 大きさ N , index set $\{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_b\}$ の B -array を考えていることにする。

(注意) B -array T が分解能 VII の 2^9 -BFFD であるための必要条件は T の異なる列ベクトルの数が少なくとも 130 であるということが [3] に示されている。このことは $N < 130$ となる B -array から分解能 VII の 2^9 -BFFD は決して得られないことを意味している。

§2. 諸定理

B -array T に対して、 z_k を weight k をもつ T の列ベクトルの数とする。このとき $z_0 = z_9 = 0$ であるとき T は *trim* B -array とよばれ、*trim* B -array によって生ずる design $\mathcal{D}$ は *trim design* とよばれる。ここでは $128 \leq N \leq 150$ を満たす *trim* B -array T^* に限定して話を進めることにする。

定理 1 *trim* B -array T^* に対して、

- (1)
- (a) $N \geq 42\mu_3$
 - (b) $N \geq \frac{42}{5}(3\rho_2 + \mu_3)$
 - (c) $N \geq 9\rho_1 + 39\mu_3$
 - (d) $\rho_1 \geq \mu_3/3$

ただし $\rho_2 = \mu_2 + \mu_4$, $\rho_1 = \mu_1 + \mu_5$ 。

定理 2 $\text{trim B-array } T^*$ に対して, $\mu_3 \geq 4$ は $N \geq 168$ を意味する。

定理 3 T^* を分解能 VII の $\text{trim } 2^2\text{-BFFD}$ とする。そのとき $\mu_3 \geq 1$, $\rho_2 > \frac{6}{5}\mu_3$ である。

定理 2, 3 より $\mu_3 = 1, 2, 3$ の場合に限定することが出来る。

定理 4 T^* を $\mu_3 = 1$, $N \leq 150$ を満たす分解能 VII の $\text{trim } 2^2\text{-BFFD}$ とする。そのとき $5 \geq \rho_2 \geq 2$, $12 \geq \rho_1 \geq 1$, $6\rho_2 - 3\rho_1 + \rho_0 = 10$ (i.e., $z_4 = z_5 = 0$) である。ただし $\rho_0 = \mu_0 + \mu_6$ 。

定理 5 T^* を定理 4 の design とする。そのとき T^* は $(\lambda_0 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_9 = 0, \lambda_3 = 1)$ 又は $(\lambda_0 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_9 = 0, \lambda_6 = 1)$ の $S\text{-array}$ である。

定理6 T^* を $\mu_3 = 2$, $N \leq 150$ を満たす分解能 VII の trim 2^2 -BFFD とする。そのとき $5 \geq p_2 \geq 3$, $8 \geq p_1 \geq 1$ である。

定理7 $\mu_3 = 2$, $p_2 = 5$, $N \leq 150$ を満たす trim B-array T^* は存在しない。

定理8 $\mu_3 = 2$, $p_2 = 4$, $128 \leq N \leq 150$ を満たす trim B-array T^* は存在しない。

定理9 $\mu_3 = 2$, $p_2 = 3$, $128 \leq N \leq 150$ を満たす trim B-array T^* は存在しない。

定理10 T^* を $\mu_3 = 3$, $N \leq 150$ を満たす分解能 VII の trim 2^2 -BFFD とする。そのとき $p_2 = 4$, $3 \leq p_1 \leq 2$, $3p_1 = p_0 + 3$ (i. e., $z_4 + z_5 = 126$, $z_2 = z_3 = z_6 = z_7 = 0$, $z_1 + z_8 = 9(p_1 - 1)$) である。

定理11 定理10 の design T^* は $\lambda_0 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_9 = 0$, $\lambda_4 + \lambda_5 = 1$ の S-array である。

§3. 定理 4, 5 の証明

補題 1 trim B-array T^* に対して

- (a) $\gamma_1 = -16\mu_3 + 15\rho_2 - 12\rho_1 + 7\rho_0 \geq 0$
 (b) $\gamma_2 = 4(23\mu_3 - 21\rho_2 + 15\rho_1 - 5\rho_0) \geq 0$
 (c) $\gamma_3 = 28(-7\mu_3 + 6\rho_2 - 3\rho_1 + \rho_0) \geq 0$
 (d) $\gamma_4 = 14(10\mu_3 - 6\rho_2 + 3\rho_1 - \rho_0) \geq 0$

ただし $\gamma_1 = z_1 + z_8$, $\gamma_2 = z_2 + z_7$, $\gamma_3 = z_3 + z_6$, $\gamma_4 = z_4 + z_5$ 。補題 2 T' を $\mu_3 = 1$ となる強さ 6, 制約数 $m = 8$ の B-array とする。このとき T' は $\lambda'_4 = 0$, $\lambda'_3 + \lambda'_5 = 1$ となる 8×9 ($8; \lambda'_0, \lambda'_1, \dots, \lambda'_8$) をもつ S-array である。補題 3 B-array T に対して, $0 \leq k \leq 6$ となるある整数 k に対して $\mu_k = 0$ ならば T は S-array である。定理 4 の証明 不等式 $5 \geq \rho_2 \geq 2$, $12 \geq \rho_1 \geq 1$ は (1a, b, c) と定理 3 から明らかである。さて $T^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, 9$) を trim B-array T^* の i 行を除いて得られる $8 \times N$ 行列とする。このとき $T^{(i)}$ は又 $\mu_3 = 1$ となる強さ 6, 制約数 8 の

B -arrayなので、補題2から $T^{(i)}$ は $\lambda_4^{(i)} = 0$ となるパラメータ $(8; \lambda_0^{(i)}, \lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_8^{(i)})$ をもつ S -array である。 $\lambda_k^{(i)}$ は行列 $\Omega(k; 8)$ が $T^{(i)}$ の部分行列として現われる回数なので、 $\lambda_4^{(i)} = 0$ ($i=1, 2, \dots, 9$) は $y_4 = z_4 + z_5 = 0$ を意味する。よって (2d) から $6p_2 - 3p_1 + p_0 = 10$ がわかる。

定理5の証明 定理4と (2c, d) から $z_3 + z_6 = 84$, $z_4 = z_5 = 0$ である。ふたたび B -array $T^{(i)}$ を考える。補題2より、 $T^{(i)}$ は $\lambda_4^{(i)} = 0$, $\lambda_3^{(i)} + \lambda_5^{(i)} = 1$ となる S -array である。 $\lambda_k^{(i)}$ は非負整数なので、 $\lambda_3^{(i)} = 1$ あるいは 0 に応じて $\lambda_5^{(i)} = 0$ あるいは 1 となる。今ある i に対して $\lambda_3^{(i)} = 1$, $\lambda_5^{(i)} = 0$ ならば、すべての j ($= 1, 2, \dots, 9$) に対して $\lambda_3^{(j)} = 1$, $\lambda_5^{(j)} = 0$ が成り立つことを示す。 $z_4 = 0$, $\lambda_3^{(i)} = 1$ から $z_3 \geq 56$ がわかる。さて $\lambda_3^{(j)} = 0$, $\lambda_5^{(j)} = 1$ となる j が存在したと仮定しよう。そのとき $z_5 = 0$ なので $z_6 \geq 56$ よって $z_3 + z_6 \geq 112$ が成り立たなければならない。しかしこれは $z_3 + z_6 = 84$ に矛盾。よって $\lambda_3^{(i)} = 1$, $\lambda_5^{(i)} = 0$ ならば $z_3 = 84$, $z_6 = 0$ が成り立つ。よって一般性を失うことなく T^* はつぎのように表現することができる。

$$T^* = [T_{(1)} : T_{(2)} : T_{(3)} : T_{(7)} : T_{(8)}]$$

ただし $T_{(k)}$ は weight k の列ベクトルからなる行列。 T^* の任意の b 個の行からなる部分行列において, weight 3 の列ベクトルが現われる個数は $T_{(3)}$ のみによっているので, $T_{(3)}$ はそれ自身 $\lambda_3 = 1$ となる S -array であることがわかる。 $T_{(3)}$ は又強さ b の B -array であるので, 残りの部分行列 $[T_{(1)}: T_{(2)}: T_{(7)}: T_{(8)}]$ も又強さ b の B -array であり, その index set は $\{\mu_0', \mu_1', \mu_2', \mu_3' = 0, \mu_4', \mu_5', \mu_6'\}$ の型をしている。補題 3 よりこの部分行列は S -array である。よって T^* は $\lambda_0 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0, \lambda_3 = 1$ となる S -array である。同様にして $\lambda_3^{(i)} = 0, \lambda_5^{(i)} = 1$ の場合にも T^* は $\lambda_0 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_7 = 0, \lambda_6 = 1$ となる S -array であることが証明できる。

References

- [1] T. Shirakura (1976). Optimal balanced fractional 2^m factorial designs of resolution III , $6 \leq m \leq 8$. Ann. Statist. 4.
- [2] 白倉 (1974). Balanced design と関連した balanced array について。数理研講究録 211 13-24
- [3] S. Yamamoto, T. Shirakura and M. Kuwada (1975). Balanced array of strength 2t and balanced fractional 2^m factorial designs. Ann. Inst. Statist. Math. 27 143-157.