

ネータの正規化定理について

日大理工・数 小林英恒 (Kobayashi, Hidetsune)

0. 序

体 k 上の多項式環 $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ のイデアル $a = (f_1, f_2, \dots, f_r)$ が与えられたとき、これの高さを計算する方法を示す。これによって a で定義される代数的集合の次元が分かる。次元を知るためにはヒルベルト多項式を計算する方法があるが、今回は正規化定理について検討した。この報告は 2 つの部分に分かれ、第 1 節で準備、第 2 節で構成法を示す。

1. 準備

環 A の素イデアルの列

$$P_0 \supset P_1 \supset \dots \supset P_r$$

の長さは r であるという。 P を環 A の素イデアル、

$$P \supset P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset P_r$$

を P から始まる素イデアルの列の最長のものとするとき、 P の高さは r であるといい、この高さを $\text{ht}(P)$ と略記する。列の長さが無限大なら P の高さは ∞ であるという。 a を環 A のイデアルとするとき、

$$\min_{P \supset a} \text{ht} P$$

を a の高さという。環 A の素イデアルの高さの最大値を A の次元といい、 $\dim(A)$ と表す。

以下の議論は永田“可換体論”に従う。

次の補題は、2 節の構成法で使われるので、証明をのせておく。

補題 k は体とし、 $f \in k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ 、 $f \notin k$ ならば、 $k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ の元 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ を次のようにとって $k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ が $k[Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$ 上整となるようにできる。

$$1. Y_1 = f, Y_i = X_i + X_1^{m_i}, i = 2, \dots, n.$$

2. $Y_1 = f, Y_i = X_i + C_i X_1, i = 2, \dots, n$ ただし k が無限体のとき.

1. の m_i は好みの整数の倍数にとることができる.

証明

1.

t を $\deg f$ より大きな整数とする.

$$\omega(X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \dots X_n^{\alpha_n}) = \sum \alpha_i t^{i-1}$$

とおくと、辞書式順序で

$$(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1) \succ (\beta_n, \beta_{n-1}, \dots, \beta_1)$$

であることと,

$$\omega(X^\alpha) > \omega(X^\beta)$$

であることとは、同値である. $f = \sum a_A X^A$ の項のうち辞書式順序で最大なものは唯一であるから、 $\omega(X^A)$ が最大になる項は唯一である. その項を

$$M = a_A X_1^{a_1} X_2^{a_2} \dots X_n^{a_n}$$

とする. $m_i = t^{i-1}$ ($i \geq 2$) ととり, $Y_i = X_i + X_1^{m_i}$ ($i \geq 2$) とおく. M を $X_1, Y_2, \dots, Y_n$ で表すと,

$$a_A X_1^{a_1} (Y_2 - X_1^{m_1})^{a_2} \dots (Y_n - X_1^{m_n})^{a_n}$$

$$= X_1^{\omega(M)} + a_1(Y_2, \dots, Y_n) X_1^{\omega(M)-1} + \dots$$

となる. よって

$$f(X_1, X_2, \dots, X_n) = f(X_1, Y_2 - X_1^{m_1}, \dots, Y_n - X_1^{m_n})$$

$$= X_1^{\omega(M)} + b_1(Y_2, \dots, Y_n) X_1^{\omega(M)-1} + \dots + b_{\omega(M)}(Y_2, \dots, Y_n)$$

ここで, $Y_1 = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ とおくと,

$$X_1^{\omega(M)} + b_1(Y_2, \dots, Y_n) X_1^{\omega(M)-1} + \dots + b_{\omega(M)}(Y_2, \dots, Y_n) - Y_1 = 0$$

これは X_1 が $k[Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$ 上整であることを示す.

$X_i + X_1^{m_i} = Y_i$ より, X_i は $k[X_1, Y_1, \dots, Y_n]$ 上整だから, $k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ は $k[Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$ 上整である.

2.

k が無限体であるとき、

$$f(c_1 X_1, X_2 + c_2 X_1, \dots, X_n + c_n X_1), c_i \in k$$

の X_1 の最高次の係数 $f(c_1, c_2, \dots, c_n)$ が 0 でなければよい。□

定理 $a \subset k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ は高さ r のイデアルとすると、 $k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ の元 $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ で

1. $k[X_1, X_2, \dots, X_n]$ は $k[Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$ 上整
2. $k[Y_1, Y_2, \dots, Y_n] \cap a = (Y_1, Y_2, \dots, Y_r)$
3. $Y_{r+1} = X_{r+1} + f_i(X_1, X_2, \dots, X_r), f_i \in \pi[X_1, X_2, \dots, X_r]$

となるものが存在する。ここに、 π は k の素体。

系 $A = k[a_1, a_2, \dots, a_n]$ とする。 $z_1, z_2, \dots, z_t \in A$ で

1. A は $k[z_1, z_2, \dots, z_t]$ 上整
2. $z_1, z_2, \dots, z_t$ は k 上代数的独立

となるものが存在する。

2. 正規化の構成的な方法

$k[x_1, x_2, \dots, x_n] \supset (f_1, f_2, \dots, f_m)$ なるイデアルが与えられたとする。
 $t < \deg f_1$ なる整数をとり、 $m_i = t^{i-1}$ ($i \geq 2$) とおく。以下、無限体のときに限って議論をすすめることにする。(有限体の時も同様に議論を進めることができる。)

$$\begin{cases} u_1 = x_1 \\ u_2 = x_2 + c_1 x_1 \\ \dots \\ u_n = x_n + c_n x_1 \end{cases}$$

なる座標変換を行なう。 f_1 は

$$f_1 = cu_1^N + a_1(u_2, \dots, u_n)u_1^{N-1} + \dots + a_N(u_2, \dots, u_n)$$

の型になっていることを確認したのち、

$$y_1 = f_1, y_2 = u_2, \dots, y_n = u_n$$

とおく。

また、

$$f_i(u_1, u_2 - c_2 u_2, \dots, u_n - c_n u_n) \text{ を } \tilde{f}_i(u_1, u_2, \dots, u_n)$$

とおく。

$a = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_m)$ の辞書式順序によるグレブナ基底を $\{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ とおく。

命題 $a \cap k[y_1, y_2, \dots, y_n] \ni h(y_1, y_2, \dots, y_n)$ で (y_1) に属さないものが存在するためには、 $\{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ のうちに $y_2, y_3, \dots, y_s$ の多項式であるものが存在することが必要十分である。

証明

$h(y_2, \dots, y_n) \in a \cap k[y_1, y_2, \dots, y_n]$ が存在したとする。

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(u_1, u_2 - c_2 u_1, \dots, u_n - c_n u_1) \in a$$

だから、

$$0 \neq h(0, y_2, \dots, y_n) \in a, h(0, y_2, \dots, y_n) \longrightarrow 0 \{g_1, \dots, g_s\}$$

ゆえ、 $g_1, g_2, \dots, g_s$ のうち、いくつかは $y_2, \dots, y_n$ の多項式。

逆はあきらか。□

$\{g_1, g_2, \dots, g_s\}$ の番号をつけなおして、 $g_1, \dots, g_{s_1}$ は u_1 を含み、 $g_{s_1+1}, \dots, g_r$ は u_1 を含まないとする。

$$a \cap k[y_2, \dots, y_s] = (g_{s_1+1}, \dots, g_s)$$

で、 $\{g_{s_1+1}, \dots, g_s\}$ は $a \cap k[y_2, \dots, y_n]$ のグレブナ基底である。次に

$$\begin{cases} v_2 = y_2 \\ v_3 = y_3 + \tilde{c}_3 y_2 \\ \dots \\ v_n = y_n + \tilde{c}_n y_2 \end{cases}$$

と座標変換を行う。

$$g_j(v_2, v_3 - \tilde{c}_3 v_2, \dots, v_n - \tilde{c}_n v_2) \text{ を } \tilde{g}_j(v_2, \dots, v_n)$$

とおき、あらためて、 $y_i = v_i, i = 3, \dots, n$ とおく。また、 $y_2 = g_{s_1+1}(v_2, v_3 - \tilde{c}_2 v_2, \dots, v_n - \tilde{c}_n v_n)$ とおく。

$(\tilde{g}_{s_1+1}, \dots, \tilde{g}_n)$ のグレブナ基底を $\{h_1, h_2, \dots, h_t\}$ とおく。

前の命題と同様に、

$$a \bigcap k[y_1, y_2, y_3, \dots, y_n] \ni g(y_1, y_2, \dots, y_m)$$

で、 (y_1, y_2) に属さないものが存在することと、 $h_1, \dots, h_t$ の中に $y_3, \dots, y_n$ の多項式が存在することとが同値である。

このような g がなければ、ここで終了、有れば同様の繰り返しを行ない。終了した時点で

$$a \bigcap k[y_1, y_2, \dots, y_n] = (y_1, \dots, y_r)$$

となる。